JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lien ryhmät **19.3.2012 / Ratkaisu 6+1=7**
D 381 klo. 16-18.

Monistoaiheista kirjallisuutta on saatavissa ilmaiseksi verkosta. Esimerkiksi:

- **Guillemin and Pollack**: Differential Topology. On ainakin 2 osoitetta: http://www.4shared.com/office/9055XIYR/Guillemin_Pollack_-_Differenti.html pdfdatabase.com/differential-topology-guillemin-pollack.html
- **Holopainen**: Differentiaaligeometria (harjoitustehtävineen!) osoitteessa https://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssit/ Johdatus+differentiaaligeometriaan,+syksy+2009
  Kumpaankin kirjaan on olemassa myös harjoitustehtävien ratkaisut.
- **Dummit and Foote**: : Abstract Algebra mm. osoittessa http://avaxhome.ws/ebooks/dummit_foote_abstract_algebra.html . Ei ole monistokirja, mutta muuten aihetta sivuva ilmaisjakelu.

1. *Derivoi funktio* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \psi(x) = \frac{3}{2}\int_0^x 1 - x^2\,dx$. *Sen jälkeen, keksi*

a) *derivoituva tai jopa sileä kuvaus ympyrältä* $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ *neliölle* $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}$

b) *derivoituva tai jopa sileä kuvaus neliöltä ympyrälle*

c) *diffeomorfismi ympyrältä neliölle.*

Ratkaisu: $\psi'(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2)$ on 0 kohdissa $x = \pm 1$ ja posiviivinen välillä $]-1, 1[$. Lisäksi $\psi(-1) = -1$ ja $\psi(1) = 1$.

a)

$$f : S \to Q : (\cos\varphi, \sin\varphi) \mapsto \begin{cases} (1, \psi(\frac{4}{\pi}x)), \text{ kun } -\frac{\pi}{4} \le \varphi < \frac{\pi}{4} \\ (1, \psi(\frac{4}{\pi}x - 2)), \text{ kun } \frac{\pi}{4} \le \varphi < 3\frac{\pi}{4} \\ (1, \psi(\frac{4}{\pi}x - 4)), \text{ kun } 3\frac{\pi}{4} \le \varphi < 5\frac{\pi}{4} \\ (1, \psi(\frac{4}{\pi}x - 6)), \text{ kun } 5\frac{\pi}{4} \le \varphi < 7\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Polkukuvauksen derivoituvuus nurkissa perustuu siihen, että niissä derivaatta on 0. (!) Siksi kuvajoukko ei ole ”sileän näköinen”. Pitäisikö siis sileän käyrän määritlmässä vaatia, ettei sen derivaatta ole missään 0. Tuntuisi järkevältä! Ehkä niin jossain tehdäänkin. Kannattaa tarvittaessa tarkastaa käytetty määritelmä — tuskin tästä mitään standardia noudatetaan.

b) Samalla idealla takaisinpäin:

$$g : Q \to S : \begin{cases} (\pm 1, y) \mapsto \pm\big(\cos\frac{\pi}{4}(\psi(y)), \sin(\frac{\pi}{4}\psi(y))\big), \text{ kun } -1 \le y \le 1 \\ (x, \pm 1) \mapsto \pm\big(\cos\frac{\pi}{4}(2 + \psi(x)), \sin(\frac{\pi}{4}(2 + \psi(x))\big), \text{ kun } -1 \le y \le 1 \end{cases}$$

c) Ei ole olemassa. Kulmat esteenä. (Muodollinen versio: Jos olisi olemassa diffeomorfismi nurkan ympäristöltä ympyränpätkän ympäristölle (tasossa molemmat), niin ympyrän tangentti vastaisi sileää käyrää, joka tangeeraisi neliötä nurkassa - mikä tietenkin on mahdotonta.)

2. *Lue liite.*

Ratkaisu:
Luettu. Kiinnitetään huomiota siihen, että on olemassa hieman erilaisia ”upotuksen”

käsitteitä (embedding, immersion, submersion...). Yksityiskohdat eivät nyt ole oleellisia, mutta on syytä pieneen varovaisuuteen kirjallisuutta lukiessa. Tässäkin: tarkasta kulloinenkin määritelmä tarpeen vaatiessa.

3. *Perustele, miksi "Klassinen monisto on luonnollisesti abstrakti monisto".*

Ratkaisu:

Topologisena avarutena klassinen monisto on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus, siis Hausdorff ja sillä on num. kanta. Kartanvaihdot ovat diffeomorfismeja ja lokaalit parametrisoinnit homeomorfismeja.

4. *Perustele, miksi neliö ei ole klassinen monisto. (Tämä tuli erehdyksessä uudelleen).*

Ratkaisu:

Kuten jo edellä tdettiin, muuten olisi olemassa diffeomorfismi nurkan avoimelta ympäristöltä janan avoimelle ympäristölle, joka veisi nurkan janalle. (Tämä tuli erehdyksessä uudelleen).

5. *Neliön* $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}$ *varustaminen abstraktin moniston rakenteella:*

Ratkaisu:

Valittu sille tavallinen topologia (joka tietenkin on Hausdorff) ja karttaympäristöt seuraavasti (muodostuvat kahdesta sivusta. Olen tähän ratkaisuun nimennyt ympäristöt myös uudelleen (paremmin) sisältämänsä nurkan mukaan.)

$$U_{++} = U_{(1,1)} = \{x \in Q \mid x_1 + x_2 > 0\} \text{ "x>-y" eli oikea yläpuolisko}$$
$$U_{+-} = U_{(1,-1)} = \{x \in Q \mid x_1 - x_2 > 0\} \text{ "x>y" eli oikea alapuolisko}$$
$$U_{-+} = U_{(-1,-1)} = \{x \in Q \mid x_1 + x_2 < 0\} \text{ "x<-y" eli vasen alapuolisko}$$
$$U_{--} = U_{(-1,1)} = \{x \in Q \mid x_1 - x_2 < 0\} \text{ "x<y" eli vasen yläpuolisko}$$

karttakuvaukset järjestetään homeomorfismeiksi siten, että kartanvaihdot ovat affiineja. Korjasin hieman tehtävässä annettua ehdotusta valitsemalla karttakuvaukset siten, että karttakuvauksen arvo alenee verrannollisesti sivua pitkin (matemaattisesti positiiviseen suuntaan eli myötäpäivään) sivua pitkin kujettuun matkaan ja kulman kohdalla saadaan arvo 0:

$$\varphi_{++} : U_{++} = U_{(1,1)} \to \mathbb{R} : \begin{cases} (x,1) \mapsto 1-x \\ (1,y) \mapsto y-1 \end{cases}$$

$$\varphi_{+-} : U_{-+} = U_{(1,-1)} \to \mathbb{R} : \begin{cases} (x,-1) \mapsto x-1 \\ (1,y) \mapsto 1+y \end{cases}$$

$$\varphi_{-+} : U_{-+} = U_{(-1,-1)} \to \mathbb{R} : \begin{cases} (x,-1) \mapsto x+1 \\ (-1,y) \mapsto -1-y \end{cases}$$

$$\varphi_{--} : U_{-+} = U_{(-1,1)} \to \mathbb{R} : \begin{cases} (x,1) \mapsto -x-1 \\ (1,y) \mapsto -y+1 \end{cases}$$

Lokaalit parametrisoinnit ovat muotoa $t \overset{\varphi_{++}^{-1}}{\mapsto} (1-t, 1)$

Kartanvaihtokuvaukset ovat siirtoja, esimerkiksi neliön yläsivun kartanvaihto on

$$t \overset{\varphi_{++}^{-1}}{\mapsto} (1-t,1) \overset{\varphi_{--}}{\mapsto} t_{++} = t-2.$$

Syntyi abstrakti monisto!

6. *Ovatko edellisen tehtävän karttakuvaukset derivoituvia?*

Ratkaisu:

Eivät tietenkään klassisesti, mutta kyllä asianomaisella abstraktilla monistolla - kuten karttakuvukset tietenkin aina!

7. *Parametrisoidaan ympyrä $S = S^1$ seuraavasti (tavalliseen tapaan):*

$$\begin{aligned}
U_+ &= \{x \in S \mid x_1 > -1\} \\
U_- &= \{x \in S \mid x_1 < 1\} \\
\varphi_+^{-1} : &\quad]-\pi,\pi[\to S : \quad t \mapsto (\cos t, \sin t) \\
\varphi_-^{-1} : &\quad]0,2\pi[\to S : \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)
\end{aligned}$$

Ratkaisut kysymyksiin:

a) Nämä tekevät ympyrästä abstraktin moniston, ovathan kartanvaihdot tässäkin pelkkiä siirtoja, siis sileitä.

b) Nämä tekevät ympyrästä myös klassisen (tasoon upotetun) moniston. Lokaalit parametrisoinnithan ovat (toisin kuin demoissa sanoin) diffeomorfismeja määrittelyjoukoiltaan (janoja) kuvajoukoilleen (kaaria), sillä niillä on (on kuin onkin!) luonnollinen jatko klassisiksi diffeomorfismeiksi janan ympäristöltä (tasossa) kaaren ympäristölle (tasossa).

$$\begin{aligned}
V_+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > -1 \text{ ja } \tfrac{1}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < 2\} \\
B_+ &= \{(t,r) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < t < \pi \text{ ja } \tfrac{1}{2} < r < 2\} \\
V_- &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 1 \text{ ja } \tfrac{1}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < 2\} \\
B_- &= \{(t,r) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < t < 2\pi \text{ ja } \tfrac{1}{2} < r < 2\} \\
\psi_+^{-1}(r,t) &= r(\cos t, \sin t) \\
\psi_-^{-1}(r,t) &= r(\cos t, \sin t)
\end{aligned}$$

c) Neliölle edellä luotu abstraktin moniston rakenne ei ollut klassinen! Itse asiassa se teki neliöstä diffeomorfisen ympyrän kanssa!

d) Ympyrän kierto ja peilaus ovat sileitä kuvauksia, jopa $\mathbb{C}^\infty-$ diffeomorfismeja.

8. *Osoita suoraan määritelmistä, että ryhmän S^1 laskutoimitus on sileä kuvaus.* Ratkaisu:

S on Lien ryhmä, sillä laskutoimitus $S^2 \to S$ on sileä, onhan se olennaisesti kompleksilukujen kertolasku. (Demoissa laskettiin reaaliset koordinaaatit auki.)