JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lineaariset Lien ryhmät **27.2.2012 / Ratkaisut 6**
D 381 klo. 16-18.

1. *Matriisiryhmällä* $\mathrm{U}(n)$ *on epätriviaali normaali aliryhmä* $\mathrm{SU}(n)$*, joka on homomorfismin* $\det : \mathrm{U}(n) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ *ydin. Osoita suoraan määritelmän mukaan, että Lien algebra* $T_{\mathbf{1}}(\mathrm{SU}(n))$ *on Lien algebran* $T_{\mathbf{1}}(\mathrm{U}(n))$ *ideaali.*

Ratkaisu

1. tapa: Olkoon $X \in T_{\mathbf{1}}(\mathrm{SU}(n))$ ja $Y \in T_{\mathbf{1}}(\mathrm{U}(n))$. On osoitettava, että $[X, Y] \in T_{\mathbf{1}}(\mathrm{SU}(n))$.
Valitaan polut $A :]a, b[\to \mathrm{SU}(n)$ ja $B :]a, b[\to \mathrm{U}(n)$, joilla $A(0) = B(0) = \mathbf{1}$, $A'(0) = X$, ja $B'(0) = Y$. Tarkastellaan kuvausta $F :]a, b[^2 \to \mathrm{SU}(n) : t \mapsto A(s)B(t)A(s)^{-1}$. (Se on todella kuvaus ryhmään $\mathrm{SU}(n)$, koska

$$\det(A(s)B(t)A(s)^{-1}) = \det A(s) \det B(t) (\det A(s))^{-1} = \det B(t) = 1,$$

mikä vielä kerran todistaa samalla, että $\mathrm{SU}(n)$ on **normaali** aliryhmä $\mathrm{U}(n)$:ssa. Kuten viime kerran demoissa saadaan — derivoimalla ensin t:n suhteen kohdasssa 0 ja sitten s:n suhteen kohdasssa 0 — Lien sulku $[X, Y]$ tangenttiavaruudessa $T_{\mathbf{1}}(\mathrm{SU}(n))$ kulkevan polun nopeusvektorina, joka tietenkin kuuluu avaruuteen $T_{\mathbf{1}}(\mathrm{SU}(n))$.

2 tapa:

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{1}}(\mathrm{SU}(n)) &= \mathfrak{su}(n) = \{X \mid X + \overline{X}^T = 0 \text{ ja } \operatorname{Tr} X = 0\} \\ &\subset \{X \mid X + \overline{X}^T = 0\} = \mathfrak{u}(n) = T_{\mathbf{1}}(\mathrm{U}(n)) \end{aligned}$$

0 on vektorialiavaruus. Lisäksi kaikilla $X \in T_{\mathbf{1}}(\mathrm{SU}(n))$ ja $Y \in T_{\mathbf{1}}(\mathrm{U}(n))$ on $[X, Y] \in \mathfrak{u}(n)$, koska $u(n)$ on Lien algebra, ja lisäksi $\operatorname{Tr}([X, Y]) = \operatorname{Tr}(XY - YX) = \operatorname{Tr}(XY) - \operatorname{Tr}(YX) = \operatorname{Tr}(XY) - \operatorname{Tr}(XY) = 0$, koska Tr on lineaarikuvaus ja aina $\operatorname{Tr}(XY) = \operatorname{Tr}(XY)$ (, mikä todistettiin viime kerralla ja todistetaan uudelleen seuraavssa tehtävässä.) Kaikenkaikkian siis $[X, Y] \in \mathfrak{su}(n)$, kuten pitääkin.

2. *Todistetaan (uudelleen), että* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ *on Lien algebran* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ *ideaali. Itse asiassa näytetään, että jopa* minkä tahansa *kahden* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$*-matriisin Lien sulku on joukossa* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$*:*

Olkoon $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. *Olkoot* $\mathbf{e}_{ij}$ $(1 \le i, j \le n)$ *avaruuden* $\mathbb{R}^{n^2}$ *ortonormaalin kannan muodostavat kantamatriisit, joilla kohdassa* (ij) *on* 1*, muuten nollia.*

a) Mitä ovat matriisitulot $\mathbf{e}_{ij}X$ *ja* $X\mathbf{e}_{ij}$*? Laske* $\operatorname{Tr}[X, \mathbf{e}_{ij}]$*. Pitäisi olla* 0*. Osoita tästä, että* $\operatorname{Tr}[X, Y] = 0$ *kaikilla* $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$*.*

b) Osoita, että $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ *on Lien algebran* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$*:n ideaali.*

c) Laske $[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{jk}]$*. (Tulos on* $\mathbf{e}_{ik}$*, kun* $i \ne j$*, muuten* $\mathbf{e}_{ii} - \mathbf{e}_{jj}$*.*

d) Yleistä edellinen laskemalla kaikki $[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{kl}]$*. (Tulos on* $\delta_{jk}\mathbf{e}_{il} - \delta_{li}\mathbf{e}_{kj}$*.*

Ratkaisu

a) 1. tapa:

$\mathbf{e}_{ij}X$ saadaan matriisista X siirtämällä j:s rivi i:nnen rivin paikalle ja nollaamalla kaikki muut alkiot.
$X\mathbf{e}_{ij}$ saadaan matriisista X siirtämällä i:s sarake j:nnen sarakkeen paikalle ja nollaamalla kaikki muut alkiot.
$\mathrm{Tr}[X, \mathbf{e}_{ij}] = \mathrm{Tr}(X\mathbf{e}_{ij}) - \mathrm{Tr}(X\mathbf{e}_{ij}) = x_{ji} - x_{ji} = 0$. Koska mikä tahansa matriisi $Y \in \mathfrak{gl}(n)$ on lineaarikombinaatio kantamatriisesta $\mathbf{e}_{ij}$ ja kuvaus $Y \mapsto [X, Y] \mapsto \mathrm{Tr}([X, Y])$ on kahden lineaarikuvauksen yhdistelmänä lineaarinen, niin $\mathrm{Tr}(|X, Y])$ on lineaarikombinaatio nollista, siis 0. On osoitettu, että jopa *minkä tahansa* kahden $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$-matriisin Lien sulku on nollajälkisten matriisien joukossa $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

b) Osoitetaan, että $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ on Lien algebran $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$:n ideaali. Tietysti se on vektorialiavaruus. Olkoon $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ja $Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Silloin edellisen mukaan $\mathrm{Tr}(|X, Y]) = 0$, joten $[X, Y] \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

2. tapa:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_{ij}X)_{kl} &= \sum_{\alpha} (\mathbf{e}_{ij})_{k\alpha} x_{\alpha l} \\
&= \sum_{\alpha} \delta_{ik}\delta_{j\alpha} x_{\alpha l} \\
&= \delta_{ik} \sum_{\alpha} \delta_{j\alpha} x_{\alpha l} \\
&= \delta_{ik} x_{jl}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X\mathbf{e}_{ij})_{kl} &= \sum_{\alpha} x_{k\alpha} (\mathbf{e}_{ij})_{\alpha l} \\
&= \sum_{\alpha} x_{k\alpha} \delta_{i\alpha}\delta_{jl} \\
&= \delta_{jl} \sum_{\alpha} x_{k\alpha} \delta_{i\alpha} \\
&= \delta_{jl} x_{ki}
\end{aligned}$$

c) Kohdan a) mukaan $[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{jk}] = \mathbf{e}_{ik}$, kun $i \neq j$, muuten $\mathbf{e}_{ii} - \mathbf{e}_{jj}$. Tämän näkee kummallakin tavalla sijoittamalla $X = \mathbf{e}_{jk}$. Tai sitten laskee ensin d)-kohdan, josta tämä on erikoistapaus.

d) Kohdan a) mukaan $[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{kl}] = \delta_{jk}\mathbf{e}_{il} - \delta_{li}\mathbf{e}_{jk}$. Tämän näkee kummallakin tavalla sijoittamalla $X = \mathbf{e}_{kl}$.

3. *a) Osoita, ettei myöskään Lien algebra* $\mathfrak{u}(n) = \{X \mid X + \overline{X}^T = 0\}$ *ole yksinkertainen etsimällä Lien algebrasta* $\mathfrak{u}(n) = \{X \mid X + \overline{X}^T = 0\}$ *yksiulotteinen ideaali* $\mathfrak{I}$. *(Lue tehtävä loppuun!)*

b) Osoita, että $\mathfrak{I}$ *on aliryhmän* $\mathbf{Z}(\mathrm{U}(n))$ *tangenttiavaruus.*

c) Osoita, että exp *on surjektio* $\mathfrak{I} \to \mathbf{Z}(\mathrm{U}(n))$.

Ratkaisu

a) Olkoon $\mathfrak{I} = \mathbb{R}X$ Lien algebran $\mathfrak{u}(n) = \{X \mid X + \overline{X}^T = 0\}$ (reaalisesti) yksiulotteinen ideaali. Ideaaliominaisuus merkitsee, että kaikilla $Y \in \mathfrak{u}(n)$ on $[X, Y] \in \mathbb{R}X$ eli $[X, Y] \parallel X$. Erityisesti kelpaa tilanne $[X, Y] = 0$, joka vallitsee ainakin kaikille ykkösmatriisin suuntaisille $X = \alpha\mathbf{1}$. Mutta tässä tehtävässä etsitään ideaalia $\mathfrak{I} = \mathbb{R}X \subset \mathfrak{u}$, joten on vaadittava $X + \overline{X}^T = 0$ eli $\alpha\mathbf{1} + \overline{\alpha}\mathbf{1} = 0$ eli $\alpha \in i\mathbb{R}$. Etsityksi yksiulotteiseksi ideaaliksi kelpaa siis $\mathfrak{I} = i\mathbb{R}\mathbf{1}$.

b) Tunnetusti $\mathbf{Z}(\mathrm{U}(n)) = \{e^{it}\mathbf{1} \mid t \in \mathbb{R}\} \sim U(1)$, jolle kuvaus $t \mapsto A(t) = e^{it}\mathbf{1}$ on surjektiivinen polku, jolla $A(0) = \mathbf{1}$ ja $A'(0) = ie^{i\cdot 0}\mathbf{1} = i\mathbf{1} =$, joka juuri virittää a)-kohdan ideaalin.

c) Näkyy olevan!

4. *Osoita, että jokainen* $\mathfrak{su}(n)$ *on yksinkertainen Lien algebra: Luennolla osoitettiin, että* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ *on yksinkertainen ja että* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n) + i\,\mathfrak{su}(n)$. *Osoita, että jos* $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{su}(n)$ *olisi epätriviaali ideaali, niin* $\mathfrak{I} + i\mathfrak{I} \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n) + i\,\mathfrak{su}(n)$ *olisi epätriviaali ideaali.*

Ratkaisu

Ainakin $\mathfrak{I} + i\mathfrak{I}$ on ilmeinen vektorialiavaruus. Se eroaa tietenkin triviaalista ideaalista $\{0\}$, mutta myös triviaalista ideaalista $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n) + i\,\mathfrak{su}(n)$, sillä $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$-matriisin A hajoitelma $A = B + iC \in \mathfrak{su}(n) + i\,\mathfrak{su}(n)$ on yksikäsitteinen, joten jos valitaan $B \in \mathfrak{su}(n) \setminus \mathfrak{I}$, niin $B + iB \in (\mathfrak{su}(n) + i\,\mathfrak{su}(n)) \setminus \mathfrak{I} + i\mathfrak{I}$.

Lopuksi tutkitaan Lien sulkeet. Olkoon siis $X + iY \in \mathfrak{I} + i\mathfrak{I}$ ja $Z + iW \in \mathfrak{su}(n) + i\,\mathfrak{su}(n)$. Lasketaan

$$\begin{aligned}
&= (X+iY)(Z+iW) - (Z+iW)(X+iY) \\
&= XZ - YW + i(XW + YZ) - ZX + WY - i(ZY + WX) \\
&= [X,Z] - [Y,W] + i([X,W] + [Y,Z]) \in \mathfrak{I} + i\mathfrak{I}.
\end{aligned}$$

5. *Lien algebra* $\mathfrak{so}(4)$ *ei ole yksinkertainen, mutta suuremmilla* $n \in \mathbb{N}$ *Lien algebra* $\mathfrak{so}(n)$ *on yksinkertainen. Todistus on samantapainen kuin* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$*:n tapauksessa, mutta hieman mutkikkaampi, koska kantavektorit joudutaan valitsemaan toisin, sillä* $\mathfrak{so}(n)$ *muodostuu kaikista reaalisista vinosymmetrisistä matriiseista. On luonnollista valita kantavektoreiksi matriisit:*

$$E_{ij} = e_{ij} - e_{ji}.$$

Olkoon $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$. *Laske* XE_{ij}. *Mikä yksinkertaisuustodistusten välinen ero paljastuu? (Ei ole tarkoitus todistaa yksinkertaisuutta tässä.)*

Ratkaisu

Jaettiin kirjasta kaikki tähän liittyvä.

6. *Luennolla on osoitettu, että* log *on bijektio matriisiryhmän G joltain ykkösen ympäristöltä U_1 vastaavan Lien algebran $\mathfrak{g}$ origon ympäristölle V_0 ja* exp *on sen käänteiskuvaus, erityisesti ympäristöt U_1 ja V_0 ovat siis homeomorfiset. Osoita tämän avulla, että ympäristöt voidaan valita siten, että matriisiryhmässä jokaisella alkiolla $A \in U_1$ on kaikilla $n \in \mathbb{N}$ olemassa n:s juuri B,* **vieläpä tasan yksi ympäristöön U_1 kuuluva**. *(Vertailun vuoksi; ryhmässä* SO(2) *on ykkösalkiolla kaksi neliöjuurta, mutta toinen on "kaukana" ykkösestä.)*

Ratkaisu

Valitaan ryhmässä G neutraalialkion ympäristö

$$U_1 = \{A \in G \mid \|A - \mathbf{1}\| < \frac{1}{100}\},$$

jolloin logartimifunktio on diffeomorfismi $U_1 \to V_0 = \log(U_1) \subset \mathfrak{g}$. Olkoon $A \in U_1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan A:n kuvaa $\log A \in \mathfrak{g}$. Koska $\mathfrak{g}$ on vektoriavaruus, niin $\frac{1}{n}\log A \in \mathfrak{g}$ ja siis $B = \exp(\frac{1}{n}\log A) \in G$. Tämä B on $\sqrt[n]{A} \in G$, sillä $B^n = (\exp(\frac{1}{n}\log A))^n = \exp(\log A) = A$. Mutta ei ole laskematta selvää, että olisi $B \in U_1$ eli $\frac{1}{n}\log A \in V_0$.

Kun $A \in U_1$, niin

$$\|\log A\| = \|\log(1 - (1 - A))\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{1} - A)^k}{\pm k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\mathbf{1} - A\|^k}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k100^k} < \frac{1}{90}.$$

Kaikille $X \in \mathfrak{g}$ on

$$\|\exp X - \mathbf{1}\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|X^k\|}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!} = e^{\|X\|} - 1.$$

Erityisesti

$$\|B - \mathbf{1}\| = \|\exp(\frac{1}{n}\log A) - \mathbf{1}\| \leq e^{\|\frac{1}{n}\log A\|} - 1 = e^{\frac{1}{n}\|\log A\|} - 1 \leq e^{\frac{1}{90\,n}} - 1 \leq e^{\frac{1}{180}} - 1 < \frac{1}{100}.$$

Että juuri B on ainoa ratkaisu joukossa U_1 johtuu siitä, että logaritmifunktio ja eksponenttifunktio ovat toisilleen käänteiset $U_1 \to V_0$ ja toteuttavat yhteenlaskukaavansa, joten A:n n:nnen juuren etsiminen vastaa tasan $\frac{\log A}{n}$:n määräämistä.

7. *Mietipä tätä! (kirjan harjoitukset sivulta 153-154.)*

Ratkaisu

Näissä harjoitustehtävissä todistetaan mm, että

$$e^X e^Y = e^Y e^X \implies XY = YX$$

ja

$$e^{X+Y} = e^X e^Y \implies XY = YX,$$

mikä kumoaa aikaisemmissa harjoituksissa esiintyneen Wikipediasta poimimani "tuloksen" .

Todistus etenee näin: Olkoon aluksi $e^X e^Y = e^Y e^X$. Osoitetaan, että $XY = YX$. Voi olettaa, että $\|X\|$ ja $\|Y\|$ ovat pienempiä kuin vaikkapa $\frac{1}{10}$, jolloin $e^X - \mathbf{1}$ ja $e^Y - \mathbf{1}$ ovat < 1 ja siis logaritmisarja antaa $X = \log(e^X)$ ja $Y = \log(e^Y)$.

Siis $XY = YX$, sarjan termithän voidaan vaihtaa. (Vrt. s. 141 eli logaritmin summakaavan todistus.)

Jos taas oletetaan, että $e^{X+Y} = e^X e^Y$, niin Campbellin, Bakerin j Hausdorffin lauseen mukaan

$$e^{X+Y} = e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\text{ylemmänasteisia termejä}}.$$

Siis jälleen, jos $\|X\|$ ja $\|Y\|$ ovat pienempiä kuin vaikkapa $\frac{1}{10}$, jolloin myös $\|[X,\mu]\|$ on pieni (suuruusluokka 1/100), niin

$X + Y = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] +$ ylemmänasteisia termejä, joten $0 = +\frac{1}{2}[X,Y] +$ ylemmänasteisia termejä , erityisesti $0 = +\frac{1}{2}[X,Y]$. Koska tämä pätee pienille X, Y se pätee aina. $\square$