JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lineaariset Lien ryhmät **6.2.2012 / Harjoitus 3 Ratkaisut**

Kvaternioiden vinokunta $\mathbb{H}$ on reaalinen 4-ulotteinen vektoriavaruus $\langle 1, i, j, k\rangle$, jossa *imaginaariset kvaterniot* muodostavat 3-ulotteisen aliavaruuden $\langle 1, i, j, k\rangle \sim \mathbb{R}^3$. Se ei ole multiplikatiivinen aliryhmä, mutta **yksikkökvaterniolla** $q \in \mathrm{SU}(2)$ **konjugointi** $q' \mapsto qq'q^{-1}$ **kuvaa imaginaarisen kvaternion imaginaariseksi kvaternioksi, jolla on sama normi.** Erityisesti yksikkökvaterniolla konjugointi kuvaa $\mathbb{R}^3$:n lineaarisesti ja isometrisesti itselleen — se on itse asiassa $\mathbb{R}^3$:n kierto! Tämä yhteys määrittelee ryhmähomomorfismin $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.

1. *Määrää em. homomorfismin ydin ja kuvajoukko. Ovatko ryhmät* SU(2) *ja* SO(3) *isomorfiset?*

Ratkaisu: Ei uutta asiaa, vaan kertaus (jota tarvitaan muissa tehtävissä). Ydin: Millä yksikkökvaternioilla $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ on $q' \mapsto qq'q^{-1}$ identtinen kuvaus? Kaikilla $q' \in H$ oltava $qq'q^{-1} = q'$. Koska yksikkökvaterniolla on $1 = |q|^2 = q\bar{q}$ ja siis $q^{-1} = \bar{q}$, on kaikilla $q' \in H$ oltava $qq'\bar{q} = q'$.

Erityisesti $qi\bar{q} = i$ eli
$(a + bi + cj + dk)i(a - bi - cj - dk) = i$, eli, (koska ij=-ji ja ik=-ki)
$i(a + bi - cj - dk)(a - bi - cj - dk) = i$, eli
$(a + bi - cj - dk)(a - bi - cj - dk) = 1$, eli
$(a + bi - cj - dk) = (a - bi - cj - dk)^{-1} = (a - bi + cj + dk)^{-1}$, eli $c = d = 0$.

Vastaavasti kommutoivat j:n kanssa vain muotoa $a + cj$ olevat kvaterniot, joten kaikkien kanssa kommutoivia ovat vain reaaliset kvaterniot $q = a$. Koska oletetiin, että $|q| = 1$ jäävät vain $q = \pm 1$. Nämä kelpavat tietenkin. Homomorfismin ydin on $\{1, -1\}$.

Luennolla todistettiin, että jokainen kierto $\in \mathrm{SO}(3)$on tätä tyyppiä, joten kuvaus on surjektio.

Voisivatko yksikkökvaternioiden ryhmä SU(2) ja kiertoryhmä SO(3) olla isomorfiset? Ainakaan edellä konstruoitu homomorfismi ei ole injektio, siis ei isomorfismi. Voisivatko siis SU(2) ja SO(3) olla isomorfiset jollain toisella kuvauksella? Eivät voi, sillä SO(3) on yksinkertainen, mutta SU(2):lla on epätriviaali normaali aliryhmä – edellisen homomorfismin ydin – $\{1, -1\}$.

2. *a) Tarkastellaan avaruuden* $\mathbb{R}^4$ *kiertoja. Olkoon* $(e_1, \ldots, e_4)$ *ortonormaali kanta. Mikä matriisi edustaa lineaarikuvausta* $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$*, joka kiertää* $(x_1 - x_2)$*-tasoa kulman* ϕ *verran ja kiinnittää kaksi muuta koordinaattiakselia. b) Entä jos kierretään* $(x_3 - x_4)$*-tasoa kulman* ϕ *verran ja kiinnitetään kaksi muuta koordinaattiakselia?*

Ratkaisu: a) $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

3. *Keksi edellisen tehtävän avulla* SO(4)*:n aliryhmä, joka on isomorfinen torusryhmän* $\mathbb{T}^2 = \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$ *kanssa. (Tämä ilmaistaan sanomalla: "Etsi* SO(4)*:stä* $\mathbb{T}^2$*.")*

Ratkaisu: Sellainen on injektiivisen isomorfismin

$$(\phi,\psi)\mapsto\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}$$

kuvajoukko.

4. "Todista yhdellä sanalla", että ryhmät $\mathbb{S}_3$ (eli SU(2)) ja $\mathbb{S}_1^3$ (eli $\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(2)$) eivät ole isomorfiset.

Ratkaisu: Tehtävän idea on varoittaa harhaanjohtavista merkinnöistä. Ryhmää $\mathbb{S}_3$ merkitään kirjallisuudessa usein, jopa yleensä $\mathbb{S}^3$, onhan se 3-ulotteinen "sfääri"!

Ratkaisu: Eri keskusta! (On muitakin ilmeisiä eroja)

5. Olkoon $v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ ja $\|(a,b,c)\|=1$ sekä T taso $(a,b,c)^\perp$. Peilaus tason T suhteen on lineaarikuvaus. Mikä on sen matriisi?

Ratkaisu: Vektorin $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ortogonaalinen projektio yksikkövektorille v on $(u|v)v$ ja etsitty peilikuva siis $u-2(u|v)v$, joka koordinatein on
$(x,y,z)-2(ax+by+cz)(a,b,c)=$
$(x-2(ax+by+cz)a, y-2(ax+by+cz)b, z-2(ax+by+cz)c)=$
$((1-2a^2)x-2aby-2acz, -2abx+(1-2b^2)y-2bcz, -2acx-2bcy+(1-2c^2)z$. Matriisi on siis

$$\begin{pmatrix}1-2a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & 1-2c^2\end{pmatrix}=\mathbf{1}-2\begin{pmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}$$

Tulos on odotetusti symmetrinen, sillä tietenkin peilaus on (ortogonaalisesti) diagonalisoituva (ominaisarvoin 1 ja -1).

6. Olkoon $A,B\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

a) Olkoon $\phi:[0,1]\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ polku eli jatkuva kuvaus, joka yhdistää A:n ykkösmatriisiin, siis $\phi(0)=1$ ja $\phi(1)=A$. Konstruoi $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$:ssa polku, joka yhdistää A^{-1}:n ykkösmatriisiin.

b) Olkoon lisäksi $\psi:[0,1]\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ polku eli jatkuva kuvaus, joka yhdistää A:n ykkösmatriisiin, siis $\psi(0)=1$ ja $\psi(1)=B$. Konstruoi $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$:ssa polku, joka yhdistää AB:n ykkösmatriisiin.

c) Osoita, että aliryhmän $G\subset\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ykkösalkion sisältävä polkuyhtenäinen komponentti on G:n aliryhmä.

Ratkaisu:

a) $\theta:[0,1]\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}):t\mapsto\phi(t)^{-1}$ on $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$:ssa polku, joka yhdistää A^{-1}:n ykkösmatriisiin.

b) $\theta:[0,1]\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}):t\mapsto\phi(t)\psi(t)$ on $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$:ssa polku, joka yhdistää AB:n ykkösmatriisiin.

c) Osoita, että aliryhmän $G\subset\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ykkösalkion sisältävä polkuyhtenäinen komponentti K_1 on G:n aliryhmä.

I Neutraalialkio kuuluu ykkösalkion sisältävään polkuyhtenäinen komponenttiin K_1.
II Jos matriisi A kuuluu komponenttiin K_1, niin on olemassa polku, joka yhdistää A:n ykkösmatriisiin, ja siis a) mukaan myös polku, joka yhdistää A^{-1}:n ykkösmatriisiin, jolloin $A^{-1}\in K_1$.

III Jos matriisit A ja B kuuluvat komponenttiin K_1, niin on olemassa polku, joka yhdistää A:n ykkösmatriisiin, ja polku, joka yhdistää B:n ykkösmatriisiin, joten b) mukaan on myös polku, joka yhdistää AB:n ykkösmatriisiin, jolloin $AB \in K_1$.

Tulos on merkillepantava!

7. *(Jatkoksi tehtäville 5-7/2) a) Osoita, että kompleksinen* 2×2*-matriisi* A *on kompleksiortogonaalinen eli muotoa* $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ *tasan silloin, kun* $JAJ^{-1} = \overline{A}$*, missä* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Olkoon A_{2n} *kompleksinen* $2n \times 2n$*-matriisi. Osoita, että* A_{2n} *on kvaternio-*$n\times n$*-matriisi jos ja vain jos* $J_{2n}A_{2n}J_{2n}^{-1} = \overline{A}_{2n}$*, missä* J_{2n} *on kompleksinen* $2n\times 2n$*-matriisi* $\begin{pmatrix} J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J \end{pmatrix}$*, missä* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Osoita, että tällöin $\det A_{2n}$ *on reaaliluku (, joten tapauksessa* $A_{2n} \in \mathrm{Sp}(n)$ *on* $\det A_{2n} = \pm 1$.*)*

Ratkaisu:

a) Jos A on kompleksiortogonaalinen, niin

$JA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{b} & \bar{a} \\ -a & -b \end{pmatrix}$

ja

$\overline{A}J = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{b} & \bar{a} \\ -a & -b \end{pmatrix}$, siis sama.

Jos taas oletetaan, että matriisilla $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b}+x & \bar{a}+y \end{pmatrix}$ pätee $JB = \overline{B}J$, niin käytetään hyväksi tietoa, että $B = A + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$ ja lasketaan edellistä kohtaa käyttäen

$JB = JA + J\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \overline{A}J + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \overline{A}J + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ja

$\overline{B}J = \overline{A}J + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} J = \overline{A}J + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \overline{A}J + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$. Nämä ovat samat vain, kun $x = y = 0$.

b) Kvaterniot ovat määritelmänsä mukaan täsmälleen muotoa $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, siis samoja kuin kompleksiset ortogonaalimatriisit, joten väite pätee tapauksessa $n = 1$. Muille n huomatan, että kompleksinen $2n \times 2n$-matriisi A on muotoa

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

missä kukin C_{ij} on kompleksinen 2×2-matriisi. Koska matriisit voi kertoa lohkoittain, niin

$$J_{2n}A = \begin{pmatrix} J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JC_{11} & JC_{12} & \dots & JC_{1n} \\ JC_{21} & JC_{22} & \dots & JC_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ JC_{n1} & JC_{n2} & \dots & JC_{nn} \end{pmatrix} ja$$

$$\overline{A}J_{2n} = \begin{pmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \dots & \overline{C}_{1n} \\ \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} & \dots & \overline{C}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{C}_{n1} & \overline{C}_{n2} & \dots & \overline{C}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{C}_{11}J & \overline{C}_{12}J & \dots & \overline{C}_{1n}J \\ \overline{C}_{21}J & \overline{C}_{22}J & \dots & \overline{C}_{2n}J \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{C}_{n1}J & \overline{C}_{n2}J & \dots & \overline{C}_{nn}J \end{pmatrix}$$

Nämä matriisit ovat a)-kohdan mukaan samat aina ja vain, kun jokainen C_{ij} on kvaternio. $\square$

c) Kvaternion determinantti on tunnetusti/selvästi positiiviluku, siis reaalinen. Näin on tapaus $n = 1$ selvä. Yleinen tapaus ei heti palaudu tähän, mutta laskun alkuosa antaa aiheen seuraavaan ideaan:

$\det J \det A = \det JA = \det \overline{A} \det J \in \mathbb{C}$, joten $\det A = \det \overline{A} = \overline{\det A}$. $\square$

8. *Tehtävän* **1.** *mukaan on olemassa luonnollinen kaksi yhteen - homomorfismi* $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.

a) Keksi esimerkki toruksesta $\mathbb{T}^1 \subset \mathrm{SU}(2)$. *(Kaikki isomorfiaa vaille.)*

b) Todista, että löytämäsi (ja itse asiassa jokainen) $\mathbb{T}^1 \subset \mathrm{SU}(2)$ *on maksimaalinen, näyttämällä, että jos* $\mathbb{T}^1 \subset T^2 \subset \mathrm{SU}(2)$, *niin on olemassa* $\mathbb{T}^1 \subset T^2 \subset \mathrm{SO}(3)$.

c) Osoita, että $\mathbf{Z}(\mathrm{SU}(2)) = \{1, -1\}$.

Ratkaisu: a) SU(2) (eli Spin(3)) muodostuu kaikista yksikkökvaternioista. Niiden joukkoon sisältyy yksiulotteinen torus eli ympyrä $\mathbb{T}^1 = \{\cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi \in \mathbb{H} \bigm| \phi \in \mathbb{R}\}$, joka todella myös on aliryhmä (ja topologinen aliavaruus. $\mathbf{i}$:n rooliin kävisi yhtä lailla mikä tahansa imaginaarinen yksikkökvaternio $\mathbf{u}$, mutta valitaan nyt näin.)

b) Tehtävässä määritelty *peitekuvaus* $F : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) : q' \mapsto qq'q^{-1}$ on 2-1 ryhmähomomorfismi ja kuvaa yksikkökvaterniot $\pm(\cos\phi + \mathbf{u}\sin\phi)$ (ja vain ne) kierroksi kulman 2ϕ verran (imaginaarisen kvaternion eli) vektorin $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ ympäri.

Kohdan a) toruksen eli ympyrän $\mathbb{T}^1$ kuva on siten SO(3):n ympyrä, siis torus ($\sim \mathbb{T}^1$), joka muodostuu kaikista kierroista akselin $\mathbf{i}$ ympäri, ja kuvapiste $F(\cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi)$ kiertää sen kahdesti, kun $\cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi$ kiertää $\mathbb{T}^1$:n yhden kerran.

Tiedämme, että torus $F(\mathbb{T}^1) \subsetneq F(\mathbb{T}) \subset \mathrm{SO}(3)$ on maksimaalinen. On osoitettava, että SU(2):n torus $\mathbb{T}^1$ on maksimaalinen. Jos olisi olemassa torus $\mathbb{T}^1 \subsetneq \mathbb{T} \subset \mathrm{SU}(2)$, niin olisi $F(\mathbb{T}^1) \subsetneq F(\mathbb{T}) \subset \mathrm{SO}(3)$, mikä on mahdotonta, jos $F(\mathbb{T}) \subset \mathrm{SO}(3)$ on torus. (Aito inkluusio säilyy siksi, että jos $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^1$, niin $F(x) \in F(\mathbb{T}) \setminus F(\mathbb{T}^1)$, sillä muuten on olemassa $y \in \mathbb{T}^1$, jolla $F(x) = F(y)$, jolloin $x = -y$, sillä tehtävän 1 nojalla $x = \pm y$ ja selvästi $x \neq y$. Mutta nytpä torus $\mathbb{T}^1$ on origokeskinen ympyrä, joten $y \in \mathbb{T}^1 \implies x = -y \in \mathbb{T}^1$. Mahdotonta.)

Torushan $F(\mathbb{T})$ on, mutta itse asiassa riittää osoittaa, että se on kommutatiivinen aliryhmä, koska luennolla näytettiin, että SO(3):n torus $\mathbb{T}^1$ on jopa maksimaalinen kommutatiivinen aliryhmä. Mutta kommutatiivisuus säilyy tietenkin ryhmähomomorfismissa, joten todistus on valmis.

c) $x \in \mathbf{Z}(SU(2)) \implies F(x) \in \mathbf{Z}(F(SU(2))) = \mathbf{Z}(S = (3)) = \{1\}$, joten $\mathbf{Z}(SU(2)) \subset \{\pm 1\}$, joka kelpaa.