Lineaariset Lien ryhmät **30.1.2012 / Harjoitus 2 Ratkaisut**

1. Affiinit kuvaukset lineaarikuvauksina

Kuvaus $f_{A,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + b$ (Tässä $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ja $b \in \mathbb{R}^n$.) on n-ulotteinen *affiini kuvaus*, siis yhdistelmä kääntyvästä lineaarikuvauksesta (alla) ja siirrosta (päällä). Jos seuraavat laskut tuntuvat raskailta, voit olettaa, että $n = 1$, jolloin A ja b ovat lukuja.

1. *Totea suoraan, että n-ulotteiset affiinit kuvaukset muodostavat (myös tapauksessa $n = 1$ epäkommutatiivisen ryhmän* $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$*, laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen.*

Jos haluat vielä/jo vähän miettiä, niin huomaa, että ryhmällä $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ *on aliryhmä* $\mathrm{Isomet}(n, \mathbb{R}) = \{f_{A,b} \mid A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})\}$*, joka muodostuu isometrisista eli etäisyyden säilyttävistä kuvauksista* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— itse asiassa jopa kaikista, minkä huomaaminen vaatinee hetken harkintaa.*

Ratkaisu

Kaikki bijektiot $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ muodostavat ryhmän. Osoitetaan, että affiinit kuvaukset muodostavat sen aliryhmän.

- identtinen kuvaus on affiini
- affiinin kuvauksen $x \mapsto Ax + b$ käänteinen on $y \mapsto A^{-1}(y - b) = A^{-1}(y) - A^{-1}(b)$, joka on affiini.(Erityisesti jokainen affiini kuvaus on bijektio)
- affiinien kuvausten $x \mapsto Ax + b$ ja $x \mapsto Bx + c$ yhdistetty kuvaus on $x \mapsto B(Ax + b) + c = BAx + Bb + c$, joka on affiini.

Epäkommutatiivisuuden toteamiseksi riittää havaita, että esimerkiksi
$f_{\mathbf{1},\mathbf{e_1}} \circ f_{\mathbf{21},\mathbf{2e_1}} = f_{\mathbf{21},\mathbf{3e_1}}$, mutta $f_{\mathbf{21},\mathbf{2e_1}} \circ f_{\mathbf{1},\mathbf{e_1}} = f_{\mathbf{21},\mathbf{5e_1}}$

"Hetken harkinta":

- Ortogonaalinen lineaarikuvaus $A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ on isometrinen. (Muita isometrisia lineaarikuvauksia $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ei ole olemassa). Siirto $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on tietenkin myös isometrinen (ei lineaarinen, koska origo siirtyy.), joten tutkittavat kuvaukset ovat isometrioita. Samaan tapaan kuin yllä todetaan, että ne muodostavat $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$:n aliryhmän.
- Jos $x \mapsto f(x)$ on isometrinen, niin $x \mapsto f(x) - f(0)$ on isometrinen ja säilyttää origon paikallaan. Jos onnistumme osoittamaan, että tällainen kuvasus on lineaarinen bijektio, niin se on ortogonaalinen ja f siis affiini isometria.
- Todella, jokainen origon kiinnittävä isometria $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarinen (ja siis ortogonaalinen), olennaisesti siksi, että isometria kuvaa suorat suoriksi ja suunnikkaat suunnikkaiksi. Lisäksi isometria on injektio ja lineaarinen injektio $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on bijektio. (Luennolla todistettiin samoja asioita vetoamalla siihen, että isomertriset isomorfismit ovat peilausten yhdistelmiä.)

2. *(jatkoa) Kuvaus* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ *on bijektio* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \{1\}$.

Olkoon $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *ja* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. *Osoita, että*

a) $(n+1) \times (n+1)$ *-matriisilla* $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on ominaisuus* $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + b \\ 1 \end{pmatrix}$, *joten se voidaan luonnollisella tavalla samaistaa affiiniin kuvaukseen* $f_{A,b} \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ *(ja näin esim. tietokoneanimaatioissa tehdäänkin).*

b) Osoita, että yhdistettyä affiinia kuvausta $f_{A,b} \circ f_{A',b'}$ *vastaa* $(n + 1) \times (n + 1)$ *-tulomatriisi* $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *eli kuvaus* $f_{A,b} \mapsto \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on ryhmähomomorfismi* $\mathrm{Aff}(N, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{R})$ *eli* ”ryhmän $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ lineaarinen esitys”.

c) Osoita, että em. homomorfismi on injektio ja affiini ryhmä siis on tulkittu matriisiryhmän $\mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{R})$*:n aliryhmäksi. (Uskollinen esitys - faithful representation)*

Kommentti: Sivutuotteena on todettu, että yllättäen myös $(\mathbb{R}, +)$ *on matriisiryhmä — samoin jokainen* $(\mathbb{R}^n, +)$. *Itse asiassa reaaliluvut voidaan em tarkasteluissa korvata kompleksiluvuilla tai kvaternioilla, joten niidenkin additiiviset ryhmät ovat matriisiryhmiä - viime demojen perusteella jopa reaalisiakin!* Ratkaisu

a) Matriisit kertomalla näkee heti, että $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + b \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + b \cdot 00 & Ab' + b \cdot 1 \\ 0A' + 1 \cdot 0 & 0b' + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & Ab' + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, joka on sama kuin yhdistettyä affiinia kuvausta $f_{A,b} \circ f_{A',b'} = f_{AA',Ab'+b}$ vastaava matriisi (Vrt. ed. tehtävä).

c) Jos $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on neutraalialkio eli ykkösmatriisi, niin $A = \mathbf{1}$ ja $b = 0 \in \mathbb{R}^n$. Tällöin vastaava affiini kuvaus $f_{A,b}$ on identtinen kuvaus, affiiniryhmän neutraalialkio. Ryhmähomomorfismi on siis injektio.

2. SO(2)

Yksikkökompleksiluvut $\cos\varphi + i \sin\varphi$ *(ja kertolasku) muodostavat tason kiertojen ryhmän* $\mathrm{SO}(2)$, *joka*

a) voidaan samaistaa matriisiryhmään $\{M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid M^{-1} = M^T$ *ja* $\det M = 1\}$

b) on kommutatiivinen

c) voidaan joukkona samaistaa (tavalliseen yksiulotteiseen) ympyrään $\mathbb{S}_1$.

Ennenkuin jatkat lukemista, koeta arvata mitä ovat sen aliryhmät. Vihje: On äärellisiä ja äärettömiä.

3. *Tietenkin aliryhmiä ovat itse* $\mathrm{SO}(2)$ *ja triviaali aliryhmä* $\{1\}$. *a) Mikä on pienin* $\mathrm{SO}(2)$*:n epätriviaali aliryhmä?*

Ratkaisu: Eiköhän liene $\{1, -1\}$

b) Osoita, että jokainen äärellinen syklinen ryhmä $\mathbb{Z}_n$ *on (isomorfiaa vaille)* $\mathrm{SO}(2)$*:n aliryhmä.*

Ratkaisu: Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritellään, että f_n on kierto kulman $\frac{2\pi}{n}$ verran. Tällöin f_n^m on kierto kulman $\frac{2m\pi}{n}$ verran ja f_n virittää aliryhmän $\{f_n^m | m \in \mathbb{Z}\}$, joka on isomorfinen $\mathbb{Z}_n$ kanssa, koska n on ensimmäinen luku m, jolla $f_n^m = \mathbf{1}$ eli syklisen ryhmän kertaluku.

c) Osoita, että edellä mainittujen aliryhmien yhdiste on $\mathrm{SO}(2)$*:n aliryhmä, ns.* rationaalisten kiertojen ryhmä $\mathbf{R}$.

Ratkaisu: E.m. ryhmien yhdiste on tietenkin $\mathbf{R} = \{\mathbf{f_n^m} \mid \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} \in \mathbb{Q}\}$, joka on helppo todeta aliryhmäksi.

4. jatkoa. *d) Osoita, että myös ääretön syklinen ryhmä* $\mathbb{Z}$ *on (isomorfiaa vaille)* $\mathrm{SO}(2)$*:n aliryhmä.*

Ratkaisu: Olkoon $s \in \mathbb{R}$ irratonaaliluku ja f kierto kulman $2s\pi$ verran. Tällöin f^m on kierto kulman $2sm\pi$ verran ja f_n virittää aliryhmän $\{f^m | m \in \mathbb{Z}\}$, joka on isomorfinen $\mathbb{Z}$ kanssa, sillä mikään f^m ei ole identtinen kuvaus $\mathbf{1}$, koska muuten olisi $2sm\pi = 2k\pi$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$ ja siis $s = k/m \in \mathbb{Q}$.

e) Mitkä edellämainituista aliryhmistä ovat suljettuja joukkoja avaruudessa $\mathbb{R}^4$? Mitkä avoimia? Entä muut?

Ratkaisu: Äärelliset ovat tietenkin suljettuja.

Kohtien e) ja d) äärettömät ryhmät eivät ole avoimia, koska epätyhjä avoin joukko $\mathbb{R}^n$:ssä on aina ylinumeroituva. , Kumpikaan ei myöskään ole suljettu joukko, koska koska kaikki kierrot ovat kummankin sulkeumassa, sillä erityisesti voi tietenkin irrationaalista kiertoa approksimoida jonolla rationaalisia kiertoja, mutta myös totta, että irrtionaalisen kieron monikerrat ovat tiheässä ympyrän kehällä. (Tod. hahmoteltiin demoissa). *"Pikku bonuskysymys") Onko olemassa muita äärellisiä* $\mathrm{SO}(2)$*:n aliryhmiä kuin sykliset?*

Ratkaisu: Ei. äärellinen aliryhmä ei voi sisältää irrationaalista kiertoa, koska d):n mukaan sellainen virittää äärettömän

Lemma: Jos aliryhmä $H \subset SO(2)$ sisältää kierron f_n^m, missä $\mathrm{syt}(m,n) = 1$, niin $f_n \in H$. Perustelu: Koska $\mathrm{syt}(m,n) = 1$, niin Eukleideen algoritmin avulla löytyy luvut $s, b \in \mathbb{Z}$, joilla $an + bm = 1$, jolloin $f_n = f_n^1 = f_n^{an+bm} = (f_n^n)^a (f_n^m)^b = 1 \cdot (f_n^m)^b \in H$.

Lemman seuraus: Jos aliryhmä $H \subset SO(2)$ sisältää kierron f_n^m, missä $\mathrm{syt}(m,n) = 1$, niin jokainen $f_n^m \in H$.

Ongelman ratkaisu: Jokainen $SO(2)$:n aliryhmä H on lemman nojalla yhdiste joistakin äärellisistä syklisistä ryhmistä $\langle f_n \rangle$. Äärellisen monen yhdiste on itsekin syklinen, mikä riittää tarkastaa kahden yhdisteelle (induktio!). Ja nythän $\langle f_n, f_k \rangle = \langle f_{\mathrm{pyj}(n,k)} \rangle$, sillä tietenkin f_n ja $f_k \in \langle f_{\mathrm{pyj}(n,k)} \rangle$, mutta myös $f_{\mathrm{pyj}(n,k)} \in \langle f_n, f_k \rangle$, koska $\mathrm{pyj}(n,k) = \frac{nk}{\mathrm{syt}(n,k)}$ ja siis Eukleideen algoritmilla $\frac{1}{\mathrm{pyj}(n,k)} = \frac{\mathrm{syt}(n,k)}{nk} = \frac{an+bk}{nk} = \frac{a}{k} + \frac{b}{n}$, mistä väite seuraa.

(On olemassa lyhempi ratkaisu, joka perustuu siiihen, että syklisen ryhmän aliryhmä on aina syklinen . ... mikä puolestaan perustuu edelliseen päättelyyn)

3. SU(2)

Yksikkökvaterniot muodostavat kvaternioiden vinokunnassa multiplikatiivisen ryhmän aliryhmän

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} \mid \det A = 1 \right\}.$$

Geometrisesti SU(2) on 4-ulotteisen avaruuden $\mathbb{H} \sim \mathbb{R}^4$ yksikköpallo $\mathbb{S}_3 \subset \mathbb{R}^4$.

5. Ryhmän SU(2) nimi tulee sanoista ”unitaarinen” ja ”spesiaali”. Tarkasta, että SU(2) muodostuu tasan niistä kompleksisista 2×2-matriiseista $A = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix}$, joilla on seuraavat ominaisuudet.

$(z_{11}, z_{12}) \perp (z_{21}, z_{22})$ ja $\|(z_{11}, z_{12})\| = \|(z_{21}, z_{22})\| = 1$ ja $\det A = 1$. Tässä ortogonaalisuus $\perp$ ymmärretään avaruuden $\mathbb{C}^2$ tavallisen kompleksisen sisätulon mielessä. Muista kompleksikonjugointi. Vihje: $\det A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ on $\mathbb{C}^2$-vektorin $(a + id, b - ic)$ pituuden neliö.

Ratkaisu: Selvästi SU(2)-matriisi on muotoa $q = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} \\ -\bar{z}_{12} & \bar{z}_{11} \end{pmatrix}$, mistä näkyyy, että $z_{11}\bar{z}_{21} + z_{12}\bar{z}_{21} = 0$ eli $(z_{11}, z_{12}) \perp (z_{21}, z_{22})$. Lisäksi SU(2)-matriisilla on selvästi $\|(z_{11}, z_{12})\| = \|(z_{21}, z_{22})\| = 1$ ja $\det A = 1$. Varsinainen väite on siis käänteinen puoli. Sen todistamiseksi tarkastellaan kompleksista matriisia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$, jolla on ominaisuudet

$$a\bar{b} + x\bar{y} = 0$$
$$|a|^2 + |x|^2 = 1$$
$$|b|^2 + |y|^2 = 1$$
$$\text{ja } ay - bx = 1.$$

Ensimmäisestä yhtälöstä seuraa, että

$$\frac{|a|}{|x|} = \frac{|y|}{|b|},$$

joten kahdedsta keskimmäisestä saadaan $|x| = |b|$ ja $|a| = |y|$. Siis $x = -\bar{a}e^{i\psi}$ ja $y = -\bar{b}e^{i\phi}$ joillain kulmilla ψ, ϕ. Ortogonaalisuusehto $a\bar{b} + x\bar{y} = 0$ saa muodon

$$a\bar{b} - \bar{b}e^{i\phi}ae^{-i\psi} = 0,$$

josta sieventämällä $a\bar{b}(1 - e^{i(\phi-\psi)} = 0$, siis $1 = e^{i(\phi-\psi)}$, ja siis $\phi = \psi$. Lopuksi determinanttiehto $ay - bx = 1$ (, jota ei vielä olekaan käytetty) on $(|a|^2 + |b|^2)e^{i\phi} = 1$, mistä $\phi = 0$.

HUOM: Tämän tehtävän tulokset yleistyvä t$n \times n$-mtriiseille, mutta etenkin viimeinen todistus hankloituu. Todistamalla unitaarisen matriisin ominaisuudet fiksummassa järjestyksessä pääse vähemmällä. Näin on tehty kirjassa.

6. *Totea, että yhtäpitävää on myös seuraava:*

Kompleksilineaarikuvaus $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \mapsto Aw$ *säilyttää normin eli* $\|L_A w\| = \|w\|$ *kaikille* w *ja lisäksi* $\det A = 1$.

Ratkaisu: Olkoon $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ unitaarinen ja $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Nyt

$$\begin{aligned}
\|A(x,y)\|^2 &= |(ax+by), (-\bar{b}x+\bar{a}y)|^2 \\
&= (ax+by)\overline{(ax+by)} + (-\bar{b}x+\bar{a}y)\overline{(-\bar{b}x+\bar{a}y)} \\
&= (ax+by)(\bar{a}\bar{x}+\bar{b}\bar{y}) + (-\bar{b}x+\bar{a}y)(-b\bar{x}+a\bar{y}) \\
&= |a|^2|x|^2 + ax\bar{b}\bar{y} + by\bar{a}\bar{x} + |b|^2|y|^2 + |b|^2|x|^2 - \bar{b}xa\bar{y} - \bar{a}yb\bar{x} + |a|^2|y|^2 \\
&= |a|^2|x|^2 + |b|^2|y|^2 + |b|^2|x|^2 + |a|^2|y|^2 \\
&= (|a|^2+|b|^2)(|x|^2+|y|^2) = (|x|^2+|y|^2) = |\|(x,y)\|^2.
\end{aligned}$$

Paluupuolessa käytetään tunnettua (!) tietoa, että lineaarinen isometria säilyttää myös sisätulon: $(L_A w|L_A v) = (w|v)$ kaikille $w, v \in \mathbb{C}^n$. (Tehtävässä annettu perustelu tälle lemmallae alla.) Jos siis A säilyttää vektorien pituuden, niin A säilyttää ortogonaalisuudenkin, erityisesti kantavektorien kuvat eli A:n sarakkeet ovat 1:n pituiset ja ortogonaaliset, kuten väitettiin.

Lemman perustelu: *Reaalisisätulolle vastaava ominaisuus on varmaan tuttu LAG:sta. Kompleksinen (ja sivutuottena reaalinenkin) versio perustuu "polarisaatioyhtälöön"* $\|u+v\|^2 = (u+v|u+v) = (u|u) + (v|v) + (u|v) + \overline{(u|v)} = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u|v)$, *josta sisätulon reaaliosa* $\mathrm{Re}(u|v)$ *voidaan laskea, kun kaikkien vektorien pituudet tunnetaan. Imaginaariosa saadaan vastaavasti laskemalla auki* $\|u+iv\|^2$.

Kommentti: Normin säilymisestä seuraa, että L_A on bijektio (LAG!) ja metriikan mielessä isometria, onhan nyt $\|L_A w - L_A v\| = \|w - v\|$ kaikille $w, v \in \mathbb{C}^2$. Isometrista kompleksilineaarikuvausta ja sen matriisia sanotaan unitaariseksi. Unitaarisella matriisilla on $|\det A| = 1$, *siis yksikkökompleksiluku. Ei välttämättä ole* $\det A = 1$, *vaan unitaarisen matriisin determinantti voi olla mikä tahansa yksikkökompleksiluku. "Spesiaalisuus" viittaa siihen, että* $\det A$ *on nimenomaan 1. Unitaarista vastaava reaalinen käsite on ortogonaalimatriisi (harhaanjohtavasti kyllä). Ortogonaalimatriisin determinantti on siten 1 tai -1.*

7. *Totea, että yhtäpitävää unitaarisuuden kanssa on seuraava: $A^{-1} = A^*$ eli $AA^* = A^*A = 1$, missä A^* on A:n transpoosin kompleksikonjugaatti eli A:n* adjungaatti.

Ratkaisu:Laske auki, niin huomaat, että $A^{-1} = A^*$ merkitsee, että A:n sarakkeet ovat orotgonaaliset (nollanurkat!) ja ykkösen pituiset (diagonaalinurkat).

*Kommentti: Sana "adjungointi" on matematiikassa ylikuormitettu ja tarkoittaa milloin mitäkin "liittämistä". Myös tähtisymboli * on kovin kuormitettu. Siksi kompleksisen matriisin adjungaattia merkitään etenkin fysiikan kirjoissa usein symbolilla $A^\dagger$, joka luetaan "A miekka", tai "A tikari" ei "A risti".*

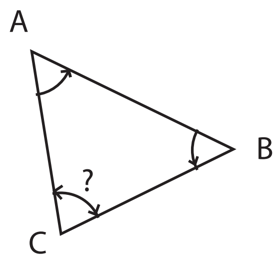
8. *Todista, että* SU(2) *on kvaternioiden vinokunnassa multiplikatiivisen ryhmän aliryhmä. (Nyt helppoa!)* Ratkaisu: Seura edellisestä!

4. Heijastuksista ja kierroista

8. *Vakuuttaudu parhaasi mukaan seuraavien tasogeometristen (tai LAG!) väitteiden todenperäisyydestä:*

a) Kahden erisuuntaisen suoran suhteen otettujen peilausten yhdistetty kuvaus on kierto akselien leikkauispisteen ympäri. Jos akselien välinen kulma on $\alpha < \pi$, niin kiertokulma on 2α.

b) Olkoon kolmio $\triangle ABC$ teräväkulmainen (ts. kulmat alle $90° = \frac{\pi}{2}$). Kuvaus, joka saadaan suorittamalla ensin kierto pisteen A ympäri kulman $2A$ verran ja sitten pisteen B ympäri kulman $2B$ verran on kierto kulman C ympäri. Kuinka suuri?



Ratkaisu. Kierto A:n ympäri kulman $2A$ verran vie C:n peilikuvakseen sivun AB taakse ja kierto B:n ympäri kulman $2B$ verran tuo sen takaisin, joten kiertojen yhdistetty kuvaus pitää C:n paikallaan ja on siis, isometria kun on, kierto juuri pisteen C ympäri. Kierron suuruus on tietenkin $2A + 2B$, koska kiertoja yhdistäessä kulmat lasketaan yhteen kiertopisteistä riippunatta. Lopuksi voi sieventää huomaamalla, että $2A + 2B = 2(A + B) = 2(180 - C) = 360 - 2C = -2C$.