JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lien ryhmät **14.5.2012 D 380 klo. 14-16** **Ratkaisut 6+5=11**

1. *Ratkaise edellisen kierroksen tehtävä numero 8 (Invariantti mitta tavalliselle pallolle differentiaalimuotojen avulla.) Käytössäsi on malliratkaisu! Piirrä kuva ja tulkitse laskussa esiintyneet käsitteet geometrisesti.*

Ratkaisu: Ks. kierros 10.

2. ja **3.** *Johda Haarin mitta ryhmälle* $\mathrm{SU}(2)$. *(Ei vaikea, enemmän pisteitä vain!)*

Ohje: $\mathrm{SU}(2) \sim \mathbb{S}_3 \subset \mathbb{R}^4$ *(Muista, miksi ja miten. Voit perustella lokaalia parametrisointiakin (ks alla)).*

Lokaali parametrisointi: $F :]0,\pi[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^4 : (\theta,\varphi,\psi) \mapsto (x_1,x_2,x_3,x_4)$, *missä*

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta \\ x_2 &= \sin\theta\cos\varphi \\ x_3 &= \sin\theta\sin\varphi\cos\psi \\ x_4 &= \sin\theta\sin\varphi\sin\psi \end{aligned}$$

Laske $F^*\omega$, *missä*

$$\omega = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots dx_4.$$

Tulos on $\sin^\theta \sin\varphi \, d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi$. *Mitta on siis:*

Ratkaisu: Oleellissti kutenb edellinen tehtävä[1]

Tätä voi yksinkertaistaa, kun integroitavana on **keskusfunktio**: Ryhmässä määritelty funktio on *keskusfunktio*, mikäli se saa saman arvon kaikissa samaan konjugattiluokkaan kuuluvissa pisteissä eli on invariantti konjugaatioiden suhteen:$f(x) = f(gxg^{-1})$ kaikilla $x, g \in G$. Toisin sanoen keskusfunktio on itse asiassa määritelty konjugaattiluokkien joukossa. Ryhmän $\mathrm{SU}(2)$ alkiot ovat kaikki diagonlisoituvia matriiseja, itse asiassa jokaisella $x \in \mathrm{SU}(2)$ on olemassa $g \in \mathrm{SU}(2)$ siten, että

$$gxg^{-1} = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}.$$

Ryhmän $\mathrm{SU}(2)$ keskusfunktion arvo kohdassa $x = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{bmatrix}$ riippuu siis ainoastaan x:n ominisarvoista, jotka ovat yksikkö-kompleksilukuja ja toistensa kompleksikonjugatteja. Itse asiassa $f(x)$ riippuu ainoastaan niiden summasta eli x:n jäljestä, sillä $gxg^{-1} = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$ ovat konjugaatti- ekvivalentit:, onhan jälkimmäinen $h(gxg^{-1})h^{-1}$, missä h on $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$. Koska $\operatorname{Tr} x = e^{-i\phi} + e^{i\phi} \in [-2,2] \subset \mathbb{R}$, niin on siis jokainen $\mathrm{SU}(2)$:n keskusfunktio muotoa $f(\frac{1}{2}\operatorname{Tr} x) = f(\operatorname{Re}\alpha) = f(x_1) = f(\cos\theta)$.

[1] Kirja sivut 130-132.

Integroituvan **keskusfunktion** $f(\cos\theta)$ integraali ryhmän $\mathrm{SU}(2)$ Haarin mitan suhteen on siis

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{SU}(2)} f(x)\,dx(\mu) &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin(\varphi)\int_{\psi=0}^{2\pi} f(\cos\theta)\sin^2\theta\,d\theta d\varphi d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} f(\cos\theta)\sin^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

4. *Ratkaise edellisen kierroksen tehtävä numero 9: Käytössäsi on kaikki "Lineaariset Lien ryhmät"- kurssin tiedot. Osoita, että lineaarisen Lien ryhmän $G \subset M^{n\times n}$ Lien algebra on*

$$\mathfrak{g} = \{X \in M^{n\times n} \mid \exp(tX) \in G \textit{ kaikille } t \in \mathbb{R}\}.$$

Ratkaisu: Ks. kierros 11.

5. *Olkoon A neliömatriisi. Todista, että matriisifunktio $t \mapsto \gamma(t) = \exp(tA)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ ja alkuehdon $\gamma(0) = I$ eikä muita ratkaisuja ole.*

Ratkaisu: a) Differentiaaliyhtälö: Derivoidaan $\gamma(t) = \exp(tA)$. Koska kyseessä on reaalimuuttujan funktio, voidaan laskea

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp((t+h)A) - \exp(tA)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(tA)\exp(hA)) - \exp(tA)}{h} \\ &= \exp(tA)\lim_{h\to 0}\frac{\exp(hA) - I}{h} = \exp(tA)I = \exp(tA),\end{aligned}$$

sillä eskponenttifunktion derivaatta kohdassa 0 on identtinen kuvaus.

Toinen tapa olisi vedota useamman muuttujan ketjusääntöön ja siihen, että eksponenttikuvauksen derivaatta kohdassa A on

$$(D\exp)_A X = \exp A \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}(\mathrm{ad}\,A)^k X,$$

missä $\mathrm{ad}\,A\,X = [A,X] = AX - XA$ ja siis $(\mathrm{ad}\,A)^2\,X = [A,[A,X]]$ jne. Tämä johtaisi tilanteeseen, jossa A:n ja X:n rooleissa olisivat tA ja sA, siis kommutoivat matriisit, jolloin $\mathrm{ad}\,A\,X = [A,X] = 0$. Sarjasta jäisi siis vain vakiotermi 1.

b) Alkuehto: $\gamma(0) = \exp(0A) = \exp(0) = I$.

c) Yksikäsitteisyys: Funktiolla $f(t) = \gamma(t)\exp(-tA)$ on derivaatta (tulon derivoimiskaavahan pätee myös matriisitulolle):

$$f'(t) = \gamma'(t)\exp(-tA) + \gamma(t)\exp'(-tA) = A\gamma(t)\exp(-tA) + \gamma(t)(-A)\exp(-tA) = 0,$$

joten se on vakio, siis $f(t) = f(0) = \gamma(0)\exp(-0A) = I$, joten $\gamma(t)\exp(-tA) = I$. $\square$

6. *Käytä edellisen kurssin tietoja todistaaksesi, että ryhmän* $\mathrm{SU}(2)$ *adjungoitu esitys* Ad *on surjektiivinen ryhmähomomorfismi* $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ *ja määrää sen ydin.*

Ratkaisu: Lineaarisen ryhmän adjungoitu esitys liittää alkioon eli matriisiin $g \in G$ konjugoinnin $\mathrm{Ad}_g : G \mapsto G : h \mapsto ghg^{-1}$. Tehtävän tilanteessa siis adjungoitu esitys liittää ryhmän $\mathrm{SU}(2)$ alkioon eli matriisiin $g \in \mathrm{SU}(2)$ konjugoinnin $\mathrm{SU}(2) \mapsto \mathrm{SU}(2) : h \mapsto ghg^{-1}$. Edellisellä kurssilla olemme huomanneet, että $\mathrm{SU}(2)$ voidaan samaistaa yksikkökvaternioiden ryhmään, jolloin $\mathrm{SU}(2) \subset (\mathbb{H}^*, \cdot)$ ja että yksikkökvaterniolla konjugointi on kierto imaginaaristen kvaternioiden avaruudessa $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \subset \mathbb{H}$, että kaikki kierrot saadaan näin ja saatu kuvaus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ on homeomorfismi, jonka ydin on $\pm I$. Riittää siis osoittaa, että kuvaus, joka liittää kaikkien yksikkökvaternioiden ryhmässä $\mathrm{SU}(2)$ tapahtuvaan konjugointiin $\mathrm{SU}(2) \mapsto \mathrm{SU}(2) : h \mapsto ghg^{-1}$ imaginaaristen kvaternioiden avaruudessa $\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^3$ tapahtuvan konjugoinnin, on isomorfismi. Luonnollisesti avaruuden kierrot voidaan tulkita pelkän yksikköpallon kierroiksi. Imaginaaristen yksikkökvaternioiden joukko $\mathbb{S}_2 = \mathrm{SU}(2) \cap \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}$ on avaruuden $\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^3$ yksikköpallo , joten tarkasteltava isomorfismiehdokas on kuvaus, joka konjugointiin $\mathrm{SU}(2) \mapsto \mathrm{SU}(2) : h \mapsto ghg^{-1}$ liittää sen rajoittuman $\mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_2$. Tietenkin rajoittuman muodostaminen on homomorfismi ja tiedämme, että se on myös surjektio, todettiinhan jo yllä, että kaikki kierrot saadaan näin. Jää todettavaksi injektiivisyys. Injektiivisyys puolestaan seuraa siitä, että konjugoinnin muodostamiskuvauksen $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ ydin on $\pm I$ ja että myös Ad kuvaa $\pm I$ samaksi kuvaukseksi. $\square$

Tämä liittyy Haarin mitan konstruointiin ryhmälle $\mathrm{SO}(3)$, olemmehan edellä juuri konstruoineet rotaatioinvariantin mitan $\mathbb{R}^4$:n yksikköpallolle $\mathbb{S}_3$ eli ryhmälle $\mathrm{SU}(2)$. Tulos oli

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} f(x)\, dx(\mu) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} f \circ F(\theta, \varphi, \psi) \sin^2\theta \sin\varphi \; d\theta d\varphi d\psi,$$

missä F on tehtävien 2 ja 3 parametrisointi. Ad on edellä kuvattu surjektiivinen 2–1 -morfismi $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$. ($\mathrm{SO}(3)$ on siis topologisena avaruutena sama kuin projektiivinen avaruus $\mathbf{Pr_3}$) . Koska ryhmät $\mathrm{SU}(2)$ ja $\mathrm{SO}(3)$ ovat "lokaalisti isomorfiset" on niillä sma Haarin mitta - paitsi että tietenkin tarvitan kerroin 2, koska toinen ryhmä peittää toisen kahdesti. Kiinnostavampaa on nyt kuitenkin lausua $\mathrm{SO}(3)$:n Haarin mitta joissakin tutummissa koordinaateissa, esimerkiksi kiertoakselin ja kiertokulman avulla tai Eulerin kulmien avulla. Mentetelmäksi tarjoutuu myös koordinaatiston vaihto Lien algebran kautta, onhan meillä lauseke Haarin mitalle Lien algebran Lebesguen mitan avulla.

7. *Luennolla 7.5. todistettiin, että* $\Delta(g) = |\det \mathrm{Ad}(g)|^{-1}$*. Todista tämän avulla. että jos* $\mathrm{Ad}(G)$ *on kompakti, niin* G *on unimodulaarinen eli sen vasen ja oikeainvariantti mitta ovat sama.*

Ratkaisu: Kuvaus Ad on jatkuva homeomorfismi ryhmälle $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Sen kuvajoukko on siis multiplikatiivisen ryhmän aliryhmä ja oletuksen mukaan kompakti, siis $\subset \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$. Siis $\Delta(g) = |\det \mathrm{Ad}(g)|^{-1} = 1$. $\square$

8. *Olkoon* $\mathcal{V} = M^{p\times q} = \{p \times q\text{-matriisit}\}$*. Olkoon* $A \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ *ja* $B \in \mathrm{GL}(q, \mathbb{R})$*. Kuvaus*

$$T : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : X \mapsto AXB$$

on vektoriavaruus-endomorfismi *eli lineaarikuvaus avaruudelta itselleen. Määrää sen determinantti.*

Ratkaisu: Yhden sarakkeen kertominen on lineaarikuvaus, jonka determinantti on $\det A$, samoin rivin kertominen oikealta antaa $\det B$. Siis koko kuvauksen determinantti on $(\det A)^p(\det B)^q$.

9. *(jatkoa)*
Olkoon G muotoa

$$g = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad A \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{R}),\ B \in \mathrm{GL}(q, \mathbb{R}), C \in M^{p \times q}$$

olevien $n \times n$-matriisien ryhmä, missä $n = p + q$.

Määrää Lien algebra $\mathfrak{g}$, adjungoitu esitys ad *ja modulifunktio Δ.*

Ratkaisu: Huomatan aluksi, että tietenkin G muodostuu neliömatriiseista, joten $p = q$. Monistossa G pisteen I kautta kulkevan polun derivaatat ovat tietenkin juuri muotoa $t \mapsto g = \begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}, \quad X \in M^{p \times p}, Y \in M^{q \times q}, Z \in M^{p \times q}$ olevat matriisit, joten nämä muodostavat Lien algebran g. Koska kyseessä on lineaarinen Lien ryhmä, niin G:n adungoitu esitys Lien algebrallaan $\mathfrak{g}$ on

$$\mathrm{ad}_{\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}}(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}.$$

Etsitty modulifunktio on siis edellisen tehtävän mukaan $\Delta(g) = |\det Ad_g| = |\det Ad_g| = (\det \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix})^0 = 1.$