JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lien ryhmät **16.4.2012 / Harjoitus 6+3=9**
D 381 klo. 16-18.

1. Klassisen moniston M tangenttikimppu TM voidaan varustaa sileän moniston rakenteella siten, että karttaympäristöjä ovat joukot $\bigcup_{p\in U} T_pM$, missä U on moniston M karttaympäristö, karttalehdet ovat joukkoja $\varphi(U)\times\mathbb{R}^d$ ja lokaalit parametrisoinnit ovat kuvaukset

$$\varphi(U)\times\mathbb{R}^d \to \bigcup_{p\in U} T_pM : (x,X)\mapsto(\varphi(x), D_x\varphi X).$$

Miten tangenttikimpun topologia määräytyy? (Anna topologian kanta tai kuvaile avoimet joukot tai ympäristöt tms.)

2. (Jatkoa) Onko tavallisen pallon $\mathbb{S}_2$ tangenttikimppu topologisena avaruutena sama kuin tuloavaruus $\mathbb{S}_2\times\mathbb{R}^2$? Onko Möbiuksen nauhan M tangenttikimppu topologisena avaruutena sama kuin tuloavaruus $M\times\mathbb{R}^2$?

3. Osoita, että ainoa jatkuva ryhmähomomorfismi ρ kääntyvien 2×2-matriisien ryhmältä $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ positiivilukujen multiplikatiiviselle ryhmälle $\mathbb{R}^*_+$, jolla lisäksi

$$\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \overset{\rho}{\mapsto} a,$$

on kuvaus $A\mapsto|\det A|$.

(Minä todistin tämän ensin rivinvaihtomatriisille $\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ja symmetrisille eli diagonalisoituville matriiseille.)

4. (Jatko)
a) Osoita, että ainoat jatkuvat ryhmähomomorfismit ρ kääntyvien 2×2-matriisien ryhmältä $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ positiivilukujen multiplikatiiviselle ryhmälle $\mathbb{R}^*_+$ ovat kuvaukset $A\mapsto|\det A|^\alpha$, missä $\alpha\in\mathbb{R}$.
b) Entä ryhmähomomorfismit $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}^*_+$? (tai $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}^*$?)

5. väärä tehtävä.....

6. Ryhmän $G=\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eli $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$alkiot ovat kääntyvät $n\times n$-matriisit. Matriisitulo vasemmalta $gA=L_g(A):G\to G$ on lineaarikuvaus (sellaisen rajoittuma), joten se on itsensä derivaatta ja sen Jacobin determinentti on siis sen determinantti. Koska matriisitulo vasemmalta $gA=L_g(A)$ lasketaan kertomalla A sarakkeittain, se voidaan kirjoittaa: $gA=[gx^1,\dots,gx^n]$, missä vektorit $x^1,\dots,x^n$ ovat matriisin A sarakkeet.

Osoita, että

$$JL_g=\det L_g=(\det g)^n.$$

7. Osoita, että vastaavalla tavalla saadaan oikenpuoleisen kertolaskun Jacobin determinantti siitä huomiosta, että oikealta kertominen kertoo matriisin riveittäin. Siksi myös

$$JR_g=\det R_g=(\det g)^n.$$

8. Olkoon μ Lien ryhmän G normalisoitu vasen Haarin mitta ja $g \in G$. Osoita, että myös $\mu_g(A) = \mu(gAg^{-1})$ on vasen Haarin mitta. (Onko sekin normalisoitu?)

9. Osoita, että moduli Δ on ryhmähomomorfismi $G \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$.