JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lien ryhmät **19.3.2012 / Harjoitus 6+1=7**
D 381 klo. 16-18.

Monistoaiheista kirjallisuutta on saatavissa ilmaiseksi verkosta. Esimerkiksi:

- **Guillemin and Pollack**: Differential Topology. On ainakin 2 osoitetta: http://www.4shared.com/office/9055XIYR/Guillemin_Pollack_-_Differenti.html pdfdatabase.com/differential-topology-guillemin-pollack.html
- **Holopainen**: Differentiaaligeometria (harjoitustehtävineen!) osoitteessa https://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssit/ Johdatus+differentiaaligeometriaan,+syksy+2009

Kumpaankin kirjaan on olemassa myös harjoitustehtävien ratkaisut.

1. Derivoi funktio $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \psi(x) = \frac{3}{2}\int_0^x 1 - x^2\,dx$. Sen jälkeen, keksi

a) derivoituva tai jopa sileä kuvaus ympyrältä $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ neliölle $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}$
b) derivoituva tai jopa sileä kuvaus neliöltä ympyrälle
c) diffeomorfismi ympyrältä neliölle.

2. Lue liite.

3. Perustele, miksi ”Klassinen monisto on luonnollisesti abstrakti monisto”.

4. Perustele, miksi neliö ei ole klassinen monisto.

5. Neliön $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}$ voi yrittää varustaa abstraktin moniston rakenteella valitsemalla sille tavallisen topologian (joka tietenkin on Hausdorff) ja karttaympäristöt (piirrä ne; muodostuvat kahdesta sivusta.)

$$
\begin{aligned}
U_{++} &= \{x \in Q \mid x_1 + x_2 > 0\} \\
U_{+-} &= \{x \in Q \mid x_1 - x_2 > 0\} \\
U_{-+} &= \{x \in Q \mid x_1 + x_2 < 0\} \\
U_{--} &= \{x \in Q \mid x_1 - x_2 < 0\}
\end{aligned}
$$

sekä karttakuvaukset (kulmassa arvo 0)

$$
\varphi_{++} : U_{++} \to \mathbb{R} : \begin{cases} (x,1) \mapsto x - 1 \\ (1,y) \mapsto 1 - y \end{cases}
$$

$$
\varphi_{-+} : U_{-+} \to \mathbb{R} : \begin{cases} (x,-1) \mapsto x + 1 \\ (1,y) \mapsto y - 1 \end{cases}
$$

jne. (siis miten!)

Laske kartanvaihtokuvaukset ja lokaalit parametrisoinnit. Syntyikö monisto?

6. Ovatko edellisen tehtävän karttakuvaukset derivoituvia? (Kompa! Riippuu jostain.)

7. Parametrisoidaan ympyrä $S = S^1$ seuraavasti (tavalliseen tapaan):

$$\begin{aligned}
U_+ &= \{x \in S \mid x_1 > -1\} \\
U_- &= \{x \in S \mid x_1 < 1\} \\
\varphi_+^{-1} &: \quad]-\pi, \pi[\to S: \quad t \mapsto (\cos t, \sin t) \\
\varphi_-^{-1} &: \quad]0, 2\pi[\to S: \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)
\end{aligned}$$

a) Osoita, että nämä tekevät ympyrästä abstraktin moniston.

b) Osoita, että nämä ovat (klassisia) diffeomorfismeja määrittelyjokoiltaan kuvajoukoilleen ja osoittavat siis ympyrän klassiseksi monistoksi.

c) Vertaa neliölle (edellä) yrittämääsi abstraktin moniston rakenteeseen.

d) Osoita, että ympyrän kierto ja peilaus ovat sileitä kuvauksia, jopa $\mathbb{C}^\infty-$ diffeomorfismeja ja S on siis (abstrakti) Lien ryhmä.

Osoita suoraan määritelmistä, että ryhmän S^1 laskutoimitus on sileä kuvaus.

8. (Lähde: http://en.wikipedia.org/wiki/Indefinite_orthogonal_group .)
Määritellään:

- bilineaarikuvaus $V^2 \to \mathbb{R}$ on *bilineaarimuoto* Q vektoriavaruudessa $V \sim \mathbb{R}^n$
- bilineaarimuoto Q on *degeneroitumaton*, jos $(\forall y Q(x, y) = 0) \implies x = 0$. (Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kuvaus $x \mapsto Q(x, y)$ on lineaarinen isomorfismi $V \to V^* = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ on lineaarinen }\}$).
- bilineaarimuodon Q *matriisi* kannassa $E = (e_1, \ldots, e_n) \subset V$ on $n \times n$-matriisi, jossa
$$a_{i,j} = Q(e_i, e_j).$$
Luonnollisesti Q määräytyy täysin matriisistaan, kun kanta on annettu.
- bilineaarimuoto Q on *positiividefiniitti*, jos $(\forall x \neq 0 : Q(x, x) > 0)$.
- bilineaarimuoto Q on *symmetrinen*, jos $(\forall x, y : Q(x, y) = Q(y, x)$.
- Q on symmetrinen aina ja vain, kun sen matriisi on symmetrinen. Itse asiassa $Q(x, y) = x^T \operatorname{mat} Qy$, mistä näkyy, että kannassa, jossa Q on diagonalisoitu ominaisarvoin λ_i, pätee $Q(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, joten symmetrinen Q määräytyy isomorfiaa vaille täysin ominaisarvoistaan. Jos jokin ominaisarvo on 0, symmetrinen bilineaarimuoto on degeneroitunut. Degeneroitumattoman symmetrisen bilineaarimuodon ominaisarvot ovat siis kaikki nollasta eroavia.
- symmetrisen bilineaarimuodon Q *signatuuri* on kolmikko (n, m, k), missä $n = \#\{\text{pos. ominaisarvot}\}$, $m = \#\{\text{neg. ominaisarvot}\}$, $m = \#\{\text{0-ominaisarvot}\}$ laskettuna kertalukujensa mukaan. Degeneroitumattomassa tapauksessa signatuurin kolmas luku jätetään yleensä mainitsematta.
- (kääntyvä) lineaarikuvaus $T \in \mathrm{GL}(V)$ *säilyttää lineaarimuodon* Q, jos
$$Q(T(v), T(w)) = Q(v, w)$$
kaikille vektoreille $v, w \in V$.

Seuraavassa oletetaan, että Q on degeneroitumaton symmetrinen bilineaarimuoto.

a) Osoita, että lineaarimuodon Q säilyttävien lineaarikuvausten $T \in \mathrm{GL}(V)$ joukko on ryhmän $\mathrm{GL}(V)$ aliryhmä. Merkitään sitä $\mathrm{O}_Q(V)$.

b) Osoita, että jos Q on positiividefiniitti, niin $O_Q(V)$ on isomorfinen ryhmän $O_n(\mathbb{R})$ kanssa. (Tämä on tapaus, jossa Q:n signatuuri on $(n, 0)$).

9. (jatkoa) **Lorentzin ryhmä**

a) Osoita, että ryhmät $O_Q(V)$ and $O_{Q'}(V)$ ovat isomorfiset, jos symmetristen bilineaarimuotojen Q ja Q' signatuurit ovat samat. Merkitään yleisesti $\mathrm{O}(k,l)$):lla näiden kanssa isomorfista ryhmää.

b) *Lorentzin ryhmä* on $\mathrm{O}(3,1)$. Osoita, että $\mathrm{O}(3,1)$ on Lien ryhmä. Määrää sen dimensio. Ei ole kovinkaan paljon vaikemapaa osoittaa, että jokainen $\mathrm{O}(k,l)$ on Lien ryhmä. Kuinka moniulotteinen?