JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Lineaariset Lien ryhmät **20.2.2012 / Harjoitus 5**
D 355 klo. 8-10 ja D 381 klo. 16-18.

Laskuharjoituksia

1. Määrää kuvauksen $f : M_{n\times n} \to M_{n\times n} : A \mapsto A^2$ derivaatta kohdassa $X \in M_{n\times n}$.

2. Olkoon $A \in M_{n\times n}$. Laske kuvauksen $f : \mathbb{R} \to M_{n\times n} : t \mapsto e^{tA}$ derivaatta kohdassa $t \in \mathbb{R}$. (Vastaus on Ae^{tA}. Siis mikä lineaarikuvaus?)

3. Ortogonaaliryhmien O(3) ja SO(3) yhteinen tangenttiavaruus kohdassa **1** eli Lien algebra on $\mathfrak{so}(3) = \{X \in M_{3\times 3} \mid X + X^T = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x & -y \\ x & 0 & -z \\ y & z & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.
Tämän virittävät esimerkiksi kantavektorit
$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Laske kaikki näiden keskinäiset Lien sulkeet ja osoita siten, että $\mathfrak{so}(3)$ sisältää alkioidensa Lien sulkeet, kuten Lien algebran kuuluukin.

Jos vielä huvittaa, huomaa, että $\mathfrak{so}(3) = \{X \in M_{3\times 3} \mid X^T = -X\}$ ja todista tästä suoraan, että $X, Y \in \mathfrak{so}(3) \implies [X, Y] - [Y, X] \in \mathfrak{so}(3)$.

4. Todista, että kaikille $X, Y \in M_{n\times n}$ on $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$.
Vihje:

$$\begin{gathered} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} + \cdots + x_{1n}y_{n1} \\ x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} + \cdots + x_{2n}y_{n2} \\ \vdots \\ x_{n1}y_{1n} + x_{n2}y_{2n} + \cdots + x_{nn}y_{nn} \end{gathered}$$

5. Lue liite 1. Kommentoi sitä parilla rivillä.

6. Lue liite 2. Kommentoi sitä parilla rivillä.

Lien sulkeet ja polkujen kommutaattori

Olen sanonut ”kommutaattoriksi” milloin mitäkin suuretta, mm Lien sulkeita. Tämän puhetavan taustalla on seuraava tarkastelu: Määritellään ensin kommutaattorikäsite **ryhmässä**: Määr: Ryhmän G alkioiden g ja h *kommutaattori* on

$$ghg^{-1}h^{-1}.$$

Polkujen g ja $h : [a, b] \to G$ *kommutaattori* on

$$[a, b]^2 \to G : \ (s, t) \mapsto g(s)h(t)g(s)^{-1}h(t)^{-1}.$$

7. Olkoot A ja $B : [a, b] \to \mathrm{GL}(n) = G$ (mikä tahansa muukin metriisiryhmistämme kelpaa) kahdesti differentoituvia polkuja, joilla $A(0) = B(0) = \mathbf{1}$ ja olkoot $X = A'(0)$ ja $Y = B'(0)$. Kiinnitetään muuttuja s ja tarkastellaan (osittais)kuvausta

$$D_s : t \mapsto A(s)B(t)A(s)^{-1}B(t)^{-1}.$$

Laske (osittais)derivaatta

$$\frac{\partial}{\partial t} D_s(t) = D_s'(t)$$

ja osoita, että

$$D_s'(0) = A(s)YA(s)^{-1} - Y.$$

8. (jatkoa) $D_s'(0)$ kuuluu tangenttiavaruuteen $T_{\mathbf{1}}G$, joten kuvaus

$$E : s \to D_s'(0)$$

on differentioituava polku avaruudessa $T_{\mathbf{1}}G$. Laske sen derivaatta eli nopeus kohdassa $s = 0$. (Tulos on $XY - YX$ ja kuuluu avaruuteen $T_{\mathbf{1}}G$).