JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lineaariset Lien ryhmät **13.2.2012 / Harjoitus 4**
D 355 klo. 8-10 ja D 381 klo. 16-18.

1. Havainnollista seuraavalla tavalla itsellesi ja yleisöllesi, että SO(3):n keskus on pelkkä identtinen kierto:

a) Ota käteesi kirja. Pidä sitä vaakasuorassa. Ota huoneessa käyttöön koordinaatisto, jossa origo on kirjan keskipiste, kirjan selkä on y-akselin suuntainen, kirjan kannen normaali z-akselin suuntainen ja kirjan alareuna siis x-akselin suuntainen — tavalliseen tapaan. Kiinnitä sitten mielessäsi koordinaatisto avaruuteen, älä kirjaan. Merkitään seuraavassa X_ϕ:llä kiertoa x-akselin ympäri kulman ϕ verran, vastaavasti määritellään Y_ϕ ja Z_ϕ. Merkitsemme kulmia asteina. Tee harjoitusmielessä kirjalle (joka kerta samasta alkutilasta lähtien) kierrot X_{45}, X_{90}, Y_{60} ja Z_{270}. Jos haluat, voit harjoitella lisää tekemällä kaikki nämä peräkkäin eli kierron $Z_{270} \circ Y_{60} \circ X_{90} \circ X_{45}$, jossa siis ensimmäiset kaksi ovat x-akselin ympäri — näinhän kuvauksien yhdistämistä on tapana merkitä. Nyt osaat.

Tee kierrot $X_{90} \circ Z_{180}$ ja $Z_{180} \circ X_{90}$. Ei saisi tulla sama!

b) Totea, että mikään kierto X_ϕ ei kommutoi kierron Z_{180} kanssa, paitsi X_{180} .

c) Keksi jokin kierto, joka ei kommutoi kierron X_{180} kanssa.

d) Oletko valmis?

2. Etsitään maksimaalinen torus ortogonaaliryhmään $\mathrm{O}(n)$: Osoita, että $\mathrm{O}(n)$:n maksimaalinen torus sisältyy ryhmään $\mathrm{SO}(n)$ ja on siis $\mathrm{SO}(n)$:n maksimaalinen torus.

Olkoon $\mathbb{T} \subset \mathrm{O}(n)$ torus ja $A \in \mathbb{T}$. Osoitetaan, että $\det A = 1$. Vastaoletus: $\det A \neq 1$. Vaihtoehdot: $\det A \geq 1, \quad \det A \leq -1, \quad \det A = -1, \quad -1 < \det A \leq 1$.

3. Osoita, että jos ryhmän G ainoa normaali aliryhmä on sen keskus $Z = \mathbf{Z}(G)$, niin tekijäryhmä G/Z on yksinkertainen.

4. Kierroksen 3 harjoitustehtävissä 6 osoitettiin, että matriisiryhmän G ykkösalkion sisältävä polkuyhtenäinen komponentti H on aliryhmä. Osoita, että $GHG^{-1} \subset H$ eli H on jopa normaali aliryhmä.

5. Schreierin lauseen todistuksessa oletettiin ainoastaan, että H on *täysin epäyhtenäinen* eli että mistään sen alkiosta ei ole polkua mihinkään muuhun. On siis itse asiassa todistettu, että jos G on polkuyhtenäinen ja sen aliryhmä H täysin epäyhtenäinen, niin $H \subset \mathbf{Z}(G)$. Tästä esimerkkinä ovat kaikki aikaisemmassa harjoituksessa esiintyneet SO(2):n äärettömät aliryhmät (rationaaliset kierrot ja irrationaalisen kierron monikerrat). Nämä ovat normaaleja aliryhmiä, mutta se on pikemminkin yhteensattuma kuin sääntö:

Miksi yksikään $\mathrm{SO}(n)$:n aliryhmä ei ole sekä normaali että täydellisesti epäyhtenäinen, kun $n \geq 3$?

6. Mitkä seuraavista väitteistä ovat aina tosia, kun $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$? (Tässä $n \geq 2$)

a) $e^{2A} = (e^A)^2$.

b) $e^{A+B} = e^A e^B$ kaikilla $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \implies A = \lambda \mathbf{1}$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $e^{A+B} = e^A e^B$ kaikilla $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \impliedby A$ on diagonalisoituva.

d) $e^{A+B} = e^A e^B$ kaikilla $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \iff A \in \mathbf{Z}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

7. Osoita, että kvaternioiden eksponenttifunktio kuvaa avaruuden $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ 1-ulotteisen aliavaruuden eli origon kautta kulkevan suoran $s \subset \mathbb{R}^3$ ympyräksi. Määrää sen säde.

8. Miksi $e^{\mathbf{i}\pi/2} = \mathbf{i}$ ja $e^{\mathbf{j}\pi/2} = \mathbf{j}$?
Seuraus: $e^{\mathbf{i}\pi/2}e^{\mathbf{j}\pi/2} \neq e^{\mathbf{j}\pi/2}e^{\mathbf{i}\pi/2}$, joten ainakin toinen niistä on $\neq e^{\mathbf{i}\pi/2+\mathbf{j}\pi/2}$. Kaava $e^{a+b} = e^a e^b$ ei siis päde ainakaan kaikille kvaternioille a, b. Päteekö se kompleksiluvuille a, b?

9. Seuraavassa tehtävässä on pitkä johdanto:

Bilineaarikuvauksen derivaatta

Olkoot V, W ja U vektoriavaruuksia ja $\mathbb{K}$ niiden kerroinkunta. (Voit olettaa, että $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.)
Määritelmä: Kuvaus $B : V \times W \to U$ on *bilineaarinen*, jos sen kaikki osittaiskuvaukset

$$B(v, \cdot) : W \to U : w \mapsto B(v, w)$$

ja

$$B(\cdot, w) : V \to U : v \mapsto B(v, w)$$

ovat lineaarisia.

Esimerkkejä: Lähes kaikki lineaarialgebrassa ”tuloiksi” sanotut kuvaukset ovat bilineaarikuvauksia. Tarkemmin sanoen ainakin seuraavat ovat bilineaarikuvauksia:

(1) reaalilukujen tulo xy
(2) kompleksilukujen tulo zz'
(3) vektorin ja luvun tulo λv
(4) vektorien reaalinen sisätulo $(v|w)$
(5) matriisitulo AB,
(6) erityisesti matriisin ja vektorin tulo Ax
(7) lineaarikuvauksen arvon laskeminen Tv,
(8) erityisesti lineaarimuodon eli $\mathbb{K}$-arvoisen lineaarikuvauksen arvon laskeminen $\langle v|u'\rangle$
(9) funktioiden, erityisesti polynomien pisteittäinen tulo fg
(10) vektorien tensoritulo $x \otimes y$
(11) lineaarikuvausten tensoritulo $T \otimes S$

Lineaarikuvaus vektoriavaruudelta toiselle määräytyy yksikäsitteisesti kanta-alkioiden kuvista ja nämä voi valita miten tahansa. Erityisesti äärellisulotteisten avaruuksien välisten lineaarikuvausten esittäminen kannan avulla matriiseina perustuu tähän. Myös bilineaarikuvauksella on sama ominaisuus: bilineaarinen $B : V \times W \to U$ määräytyy täysin arvoista $B(k, l)$, missä k läpikäy V:n kannan K ja l läpikäy W:n kannan L, onhan $B\left(\sum_K \lambda_k k, \sum_L \mu_l l\right) = \sum_{K\times L} \lambda_k \mu_l kl$. Näin voidaan muodostaa esimerkkejä bilineaarikuvauksista — itse asiassa tietenkin kaikki äärellisulotteiset esimerkit.

Olkoon $V = \mathbb{K}[x] = \{f \mid f \text{ on } \mathbb{K}\text{-kertoiminen yhden muuttujan polynomi}\}$. Tavallinen polynomien kertolasku on *symmetrinen ts.*$(B(a, b) = B(b, a))$ bilineaarikuvaus

$V \times V \to V$. Sama pätee tietenkin useamman muuttujan polynomeille eli avaruudessa $V = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_d]$.

Yleisemmin, missä tahansa kommutatiivisessa $\mathbb{K}$-algebrassa A sisäinen kertolasku $A \times A \to A$ on $\mathbb{K}$-bilineaarinen ja symmetrinen; itse asiassa *kommutatiivinen* $\mathbb{K}$*-algebra* on määritelmän mukaan $\mathbb{K}$-vektoriavaruus, jossa lisäksi on annettuna symmetrinen bilineaarikuvaus $B : A \times A \to A$, jota sanotaan siäiseksi kertolaskuksi. [1]

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ kahden vektorin ristitulo on esimerkki alternoivasta bilineaarikuvauksesta. Perusesimerkki alternoivasta bilineaarikuvauksesta on kuitenkin 2×2-matriisin determinantti:

Olkoon $V = \mathbb{R}^2$. Kuvaus, joka kahteen vektoriin $v = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ ja $w = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ liittää determinantin $B(v, w) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ on alternoiva bilineaarikuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$.

Bilineaarikuvauksen derivointi. Bilineaarikuvaukselle $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ on yleisesti voimassa derivoimiskaava[2]:

$$\left(d_{(A,B)}B\right)(X, Y) = B(A, Y) + B(X, B).$$

Erityisesti ykkösalkioiden kohdalla — jättäen ”turhat” sulkeet merkitsemättä:

$$d_{(I,I)}B(X, Y) = B(I, Y) + B(X, I).$$

Bilineaarikuvauksen tulon kaavasta voi johtaa, että matriisin kääntämisen $k : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ derivaatta on

$$d_g k(X) = -g^{-1} X g^{-1}.$$

Erityisesti ykkösalkion $e = I \in G = GL(n, \mathbb{R})$ kohdalla

$$d_I k(X) = -X,$$

toisin sanoen matriisin kääntämisen derivaatta kohdassa I on -1:llä kertominen.

a) Tarkastellaan vektoriavaruudessa $V = M_{2\times2} = \{2 \times 2\text{-matriisit}\}$ bilineaarikuvausta $\beta : V \times V \to V : (A, B) \mapsto AB$, siis matriisituloa. Sen derivaatta kohdassa $X = 0, Y = \mathbf{1}$ on lineaarikuvaus $V \times V \to V$. Määrää se.

b) Tarkastellaan avaruuden $V = M_{2\times2}$ avoimessa joukossa (Miksi avoin?) $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) = \{A \in V \mid \det A \neq 0\}$ määriteltyä kuvausta $k : A \mapsto A^{-1}$. Määrää sen suunnattu derivaatta pisteessä $\mathbf{1} \in \mathrm{GL}(\mathbf{2}, /\mathbf{R})$ suuntaan $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ joko suoraan laskemalla tai yllä annetun käänteismatriisin derivaatan kaavan avulla — mieluiten kummallakin tavalla!

[1] Yleensäkin, jos bilineaarikuvaus $B : A \times A \to A$ on assosiatiivinen niin $(A, +, B)$ on samalla vektoriavaruus ja rengas, jolloin sanotaan, että A on *assosiatiivinen algebra*. Assosiatiivinen algebra ei aina ole kommutatiivinen eikä *yleinen algebra* eli pelkkä bilineaarikuvaus ole assosiatiivinen. Erityisesti Lien algebra ei ole kumpaakaan.

[2] On Purmosen diff lask 1 monisteessa harjoitustehtävänä! Hyvä kaava. Tämän erikoistapauksena saadaan mm. tunnettu tulon derivoimiskaava.