JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lineaariset Lien ryhmät **30.1.2012 / Harjoitus 2**
D 355 klo. 8-10 ja A XXX 16-18. matrix

1. Affiinit kuvaukset lineaarikuvauksina

Kuvaus $f_{A,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + b$ (Tässä $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ja $b \in \mathbb{R}^n$.) on n-ulotteinen *affiini kuvaus*, siis yhdistelmä kääntyvästä lineaarikuvauksesta (alla) ja siirrosta (päällä). Jos seuraavat laskut tuntuvat raskailta, voit olettaa, että $n = 1$, jolloin A ja b ovat lukuja.

1. *Totea suoraan, että n-ulotteiset affiinit kuvaukset muodostavat (myös tapauksessa $n = 1$ epäkommutatiivisen ryhmän* $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$*, laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen.*

Jos haluat vielä/jo vähän miettiä, niin huomaa, että ryhmällä $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ *on aliryhmä* $\mathrm{Isomet}(n, \mathbb{R}) = \{f_{A,b} \mid A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})\}$*, joka muodostuu isometrisista eli etäisyyden säilyttävistä kuvauksista* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— itse asiassa jopa kaikista, minkä huomaaminen vaatinee hetken harkintaa.*

2. *(jatkoa) Kuvaus* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ *on bijektio* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \{1\}$.

Olkoon $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *ja* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. *Osoita, että*

a) $(n+1) \times (n+1)$ *-matriisilla* $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on ominaisuus* $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + b \\ 1 \end{pmatrix}$, *joten se voidaan luonnollisella tavalla samaistaa affiiniin kuvaukseen* $f_{A,b} \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ *(ja näin esim. tietokoneanimaatioissa tehdäänkin).*

b) Osoita, että yhdistettyä affiinia kuvausta $f_{A,b} \circ f_{A',b'}$ *vastaa* $(n + 1) \times (n + 1)$ *-tulomatriisi* $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *eli kuvaus* $f_{A,b} \mapsto \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on ryhmähomomorfismi* $\mathrm{Aff}(N, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{R})$ *eli* ”ryhmän $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ lineaarinen esitys”.

c) Osoita, että em. homomorfismi on injektio ja affiini ryhmä siis on tulkittu matriisiryhmän $\mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{R})$*:n aliryhmäksi. (Uskollinen esitys - faithful representation)*

Kommentti: Sivutuotteena on todettu, että yllättäen myös $(\mathbb{R}, +)$ *on matriisiryhmä — samoin jokainen* $(\mathbb{R}^n, +)$*. Itse asiassa reaaliluvut voidaan em tarkasteluissa korvata kompleksiluvuilla tai kvaternioilla, joten niidenkin additiiviset ryhmät ovat matriisiryhmiä - viime demojen perusteella jopa reaalisiakin!*

2. SO(2)

Yksikkökompleksiluvut $\cos\varphi + i\sin\varphi$ *(ja kertolasku) muodostavat tason kiertojen ryhmän* SO(2)*, joka*

a) voidaan samaistaa matriisiryhmään $\{M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \mid M^{-1} = M^T$ *ja* $\det M = 1\}$

b) on kommutatiivinen

c) voidaan joukkona samaistaa (tavalliseen yksiulotteiseen) ympyrään $\mathbb{S}_1$.

Ennenkuin jatkat lukemista, koeta arvata mitä ovat sen aliryhmät. Vihje: On äärellisiä ja äärettömiä.

3. *Tietenkin aliryhmiä ovat itse* SO(2) *ja triviaali aliryhmä* $\{1\}$. *a) Mikä on pienin* SO(2)*:n epätriviaali aliryhmä?*

b) Osoita, että jokainen äärellinen syklinen ryhmä $\mathbb{Z}_n$ *on (isomorfiaa vaille)* SO(2)*:n aliryhmä.*

c) Osoita, että edellä mainittujen aliryhmien yhdiste on SO(2)*:n aliryhmä, ns.* rationaalisten kiertojen ryhmä $\mathbf{R}$.

4. jatkoa. *d) Osoita, että myös ääretön syklinen ryhmä* $\mathbb{Z}$ *on (isomorfiaa vaille)* SO(2)*:n aliryhmä.*

e) Mitkä edellämainituista aliryhmistä ovat suljettuja joukkoja avaruudessa $\mathbb{R}^4$*? Mitkä avoimia? Entä muut?*

"Pikku bonuskysymys") Onko olemassa muita äärellisiä SO(2)*:n aliryhmiä kuin sykliset?*

3. SU(2)

Yksikkökvaterniot muodostavat kvaternioiden vinokunnassa multiplikatiivisen ryhmän aliryhmän

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ q = \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} \mid \det q = 1 \right\}.$$

Geometrisesti SU(2) *on 4-ulotteisen avaruuden* $\mathbb{H} \sim \mathbb{R}^4$ *yksikköpallo* $\mathbb{S}_3 \subset \mathbb{R}^4$.

5. *Ryhmän* SU(2) *nimi tulee sanoista "unitaarinen" ja "spesiaali". Tarkasta, että* SU(2) *muodostuu tasan niistä kompleksisista* 2×2*-matriiseista* $A = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$, *joilla on seuraavat ominaisuudet.*

$(z_{11}, z_{21}) \perp (z_{21}, z_{22})$ *ja* $\|(z_{11}, z_{21})\| = \|(z_{21}, z_{22})\| = 1$ *ja* $\det A = 1$. *Tässä ortogonaalisuus* $\perp$ *ymmärretään avaruuden* $\mathbb{C}^2$ *tavallisen kompleksisen sisätulon mielessä. Muista kompleksikonjugointi. Vihje:* $\det q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ *on* $\mathbb{C}^2$*-vektorin* $(a+id, b-ic)$ *pituuden neliö.*

6. *Totea, että yhtäpitävää on myös seuraava: Kompleksilineaarikuvaus* $L_A\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \mapsto Aw$ *säilyttää normin eli* $\|L_A w\| = \|w\|$ *kaikille* w *ja lisäksi* $\det A = 1$.

Apu: Paluupuolessa voit käyttää tunnettua (!) tietoa, että lineaarinen isometria säilyttää myös sisätulon: $(L_A w | L_A v) = (w|v)$ *kaikille* $w, v \in \mathbb{C}^n$. *Reaalisisätulolle vastaava ominaisuus on varmaan tuttu LAG:sta. Kompleksinen (ja sivutuottena* *reaalinenkin) versio perustuu "polarisaatioyhtälöön"* $\|u+v\|^2 = (u+v|u+v) = (u|u) + (v|v) + (u|v) + \overline{(u|v)} = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u|v)$, *josta sisätulon reaaliosa* $\mathrm{Re}(u|v)$ *voidaan laskea, kun kaikkien vektorien pituudet tunnetaan. Imaginaariosa saadaan vastaavasti laskemalla auki* $\|u+iv\|^2$.

Kommentti: Normin säilymisestä seuraa, että L_A *on bijektio (LAG!) ja metriikan mielessä isometria, onhan nyt* $\|L_Aw - L_Av\| = \|w-v\|$ *kaikille* $w, v \in \mathbb{C}^2$. *Isometrista kompleksilineaarikuvausta ja sen matriisia sanotaan unitaariseksi. Unitaarisella matriisilla on* $|\det A| = 1$, *siis yksikkökompleksiluku. Ei välttämättä ole* $\det A = 1$, *vaan unitaarisen matriisin determinantti voi olla mikä tahansa yksikkökompleksiluku. "Spesiaalisuus" viittaa siihen, että* $\det A$ *on nimenomaan 1. Unitaarista vastaava reaalinen käsite on ortogonaalimatriisi (harhaanjohtavasti kyllä). Ortogonaalimatriisin determinantti on siten 1 tai -1.*

7. *Totea, että yhtäpitävää unitaarisuuden kanssa on seuraava:* $A^{-1} = A^*$ *eli* $AA^* = A^*A = 1$, *missä* A^* *on A:n transpoosin kompleksikonjugaatti eli A:n* adjungaatti.

*Kommentti: Sana "adjungointi" on matematiikassa ylikuormitettu ja tarkoittaa milloin mitäkin "liittämistä". Myös tähtisymboli * on kovin kuormitettu. Siksi kompleksisen matriisin adjungaattia merkitään etenkin fysiikan kirjoissa usein symbolilla* $A^\dagger$, *joka luetaan "A miekka", tai "A tikari" ei "A risti".*

4. Heijastuksista ja kierroista

8. *Vakuuttaudu parhaasi mukaan seuraavien tasogeometristen (tai LAG!) väitteiden todenperäisyydestä:*

a) Kahden erisuuntaisen suoran suhteen otettujen peilausten yhdistetty kuvaus on kierto akselien leikkauispisteen ympäri. Jos akselien välinen kulma on $\alpha < \pi$, *niin kiertokulma on* 2α.

b) Olkoon kolmio $\triangle ABC$ *teräväkulmainen (ts. kulmat alle* $90^\circ = \frac{\pi}{2}$*). Kuvaus, joka saadaan suorittamalla ensin kierto pisteen* A *ympäri kulman* $2A$ *verran ja sitten pisteen* B *ympäri kulman* $2B$ *verran on kierto kulman* C *ympäri. Kuinka suuri?*