JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lien ryhmät **Ti 22.5.2012 D 380 klo. 10-12** **Harjoitus 6+6=12**

1. Käytä ehtoa $\mathfrak{g} = \{X \in M^{n\times n} \mid \exp(tX) \in G \text{ kaikille } t \in \mathbb{R}\}$ ja tarvittaessa tietoa $\det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A$ todistaksesi yhden tai useampia seuraavista.

(1) $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) = \{X \in M^{n\times n} \mid X + X^T = 0\}$

(2) $\mathfrak{u}(n,\mathbb{C}) = \{X \in M^{n\times n} \mid X + \overline{X}^T = 0\}$

(3) $\mathfrak{su}(n,\mathbb{C}) = \{X \in M^{n\times n} \mid X + \overline{X}^T = 0 \text{ ja } \operatorname{Tr} X = 0\}$

2. Osoita, että

$$\exp(\operatorname{ad} X) = \operatorname{Ad}(\exp X)$$

Ohje: Sekä kuvaus $\gamma_1(t) = \exp(t \operatorname{ad} X)$ että kuvaus $\gamma_2(t) = \operatorname{Ad}(\exp(tX))$ ovat lineaarisen Lien ryhmän G yhden parametrin aliryhmiä samalla alkuarvolla $\gamma_1'(0) = \gamma_1'(0) = \operatorname{ad} X$, joten ne ovat sama kuvaus. Tarkasta yksityiskohdat.

3. Täydennä merkityt yksityiskohdat:

Lien sulkeiden säilymisen toteamiseksi vektorikentät $\xi \in \Xi G$ kannattaa tulkita derivaatioiksi, onhan derivaatioiden $\widetilde{\xi}$ ja $\widetilde{\eta}$ Lien sulje yksinkertaisesti $[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}] = \widetilde{\xi} \circ \widetilde{\eta} - \widetilde{\eta} \circ \widetilde{\xi}$. Merkitsemme vektorikenttää ξ vastaavaa derivaatiota tässä selvyyden vuoksi $\widetilde{\xi} \in \Xi G$. Muistin virkistykseksi:

$$\widetilde{\xi} : \mathcal{C}^\infty(G) \to \mathcal{C}^\infty G : \quad (\widetilde{\xi} f)(g) = (Df)_g \xi_g.$$

Erityisesti vektorikenttää ξ_X vastaa derivaatio

$$(\widetilde{\xi}_X f)(g) = (Df)_g (\xi_X)_g = (Df)_g (gX).$$

Erityisesti, jos $X \in T_e G$ tulkitaan 1. tehtävän määritelmän mielessä, siis matriisina, jolla jokainen $\exp(tX) \in G$), niin ketjusäännön mukaan derivoiden ((a) Tarkasta tämä!):

$$(\widetilde{\xi}_X f)(g) = (Df)_g (gX) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(g \exp tX).$$

Tästä saadaan sulkeiden säilymiskaava. Väite on

$$([\widetilde{\xi}_X, \widetilde{\xi}_Y] f)(g) = (\widetilde{\xi}_{[X,Y]} f)(g).$$

Määritelmän mukaan

$$([\widetilde{\xi}_X, \widetilde{\xi}_Y])(g) = (\widetilde{\xi}_X (\widetilde{\xi}_Y f))(g) - (\widetilde{\xi}_Y (\widetilde{\xi}_X) f)(g).$$

Tässä pätee kaava $(*)$:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\xi}_X (\widetilde{\xi}_Y f))(g) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(g \exp sX \exp tY) \\ &= (D^2 f)_g (gX, gY) + (Df)_g (gXY).\end{aligned}$$

(b) Osoita, että väite seuraa kaavasta $(*)$ ja tuloksesta (a).

(c) Todista kaava $(*)$[1]

[1] En ole vielä itse laskenut.

4. Olkoon ω d-ulotteisen lineaarisen Lien ryhmän vaseninvariantti d-muoto ja

$$x \mapsto \varphi(x) = x^{-1},$$

Käänteisen muodostamiskuvaus $G \to G$. Osoita, että

$$\varphi^* \omega = \det(-\operatorname{Ad}_g)\omega.$$

Ohje: a) Muista (tai osoita) että $(D\varphi)_e X = -X$. b) Osoita sitten, että kaikilla $g \in G$ on $(D\varphi)_g(gX) = g^{-1}(Ad_g X)$. c) Loput.

5. Osoita, että jos Lien ryhmän G esitys η on unitaarinen ja $W \subset$ on invariantti aliavaruus, niin W:n ortogonaalinen komplementti $W^{\perp} = \{v \in V \mid (v,u) = 0 \text{ kaikilla } u \in W\}$ on myös invariantti.

6. Olkoon G kompakti Lien ryhmä ja η sen äärellisulotteinen esitys. Silloin on olemassa "korjattu" sisätulo avaruudessa V siten, että η on sen suhteen unitaarinen. Ohje: Osoita, että $(u|v)_\eta = \int_G (\eta_g u|\eta_g v)\, d\mu(g)$ kelpaa. Huomaa, että kun $g \in G$, niin $\{gh \mid h \in G\} = G$.