JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lien ryhmät 8.5.2012 D 380 klo. 14-16 Harjoitus 6+5=11
MAANANTAINA 7.5 pidän taas luennon illalla klo 16-18
Ajat voivat vielä muuttua, jos tarvetta ilmenee. Lue posti maananataina päivällä tai soita 050-4652301.

1. Ratkaise edellisen kierroksen tehtävä numero 8 (Invariantti mitta tavalliselle pallolle differentiaalimuotojen alvulla.) Käytössäsi on malliratkaisu! Piirrä kuva ja tulkitse laskussa esiintyneet käoitteet geometrisesti.

2. ja **3.** Johda Haarin mitta ryhmälle SU(2). (Ei vaikea, enemmän pisteitä vain!)
Ohje: $\mathrm{SU}(2) \sim \mathbb{S}_3 \subset \mathbb{R}^4$ (Muista, miksi ja miten. Voit perustella lokaalia parametrisointiakin (ks alla)).
Lokaali parametrisointi: $F\, :]0,\pi[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^4 : (\theta,\varphi,\psi) \mapsto (x_1,x_2,x_3,x_4)$, missä

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta \\ x_2 &= \sin\theta\cos\varphi \\ x_3 &= \sin\theta\sin\varphi\cos\psi \\ x_4 &= \sin\theta\sin\varphi\sin\psi \end{aligned}$$

Laske $F^*\omega$, missä

$$\omega = \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i-1}x_i\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\ldots dx_4.$$

Tulos on $\sin^\theta\sin\varphi\,d\theta\wedge d\varphi\wedge d\psi$. Mitta on siis:

4. Ratkaise edellisen kierroksen tehtävä numero 9: Käytössäsi on kaikki ”Lineariset Lien ryhmät”- kurssin tiedot. Osoita, että lineaarisen Lien ryhmän $G \subset M^{n\times n}$ Lien algebra on

$$\mathfrak{g} = \{X \in M^{n\times n} \;\big|\; \exp(tX) \in G \text{ kaikille } t \in \mathbb{R}\}.$$

5. Olkoon A neliömatriisi. Todista, että matriisifunktio $t \mapsto \gamma(t) = \exp(tA)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ ja alkuehdon $\gamma(0) = I$ eikä muita ratkaisuja ole.

6. Käytä edellisen kurssin tietoja todistaaksesi, että ryhmän SU(2) adjungoitu esitys Ad on surjektiivinen ryhmähomomorfismi $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO} = (3)$ ja määrää sen ydin. (En ole vielä perjantaina itse katsonut, mutta pitäisi onnistua.)
(Tämä liittyy Haarin mitan konstruointiin ryhmälle $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO} = (3)$).

7. Luennolla 7.5. todistetaan, että $\Delta(g) = |\det \mathrm{Ad}(g)|^{-1}$. Todista tämän avulla. että jos $\mathrm{Ad}(G)$ on kompakti, niin G on unimodulaarinen eli $senvasenjaoikeainvarianttimittaovatsama$

8. Olkoon $\mathcal{V} = M^{p\times q} = \{p \times q\text{-matriisit }\}$. Olkoon $A \in \mathrm{GL}(p,\mathbb{R})$ ja $B \in \mathrm{GL}(q,\mathbb{R})$. Kuvaus

$$T : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : X \mapsto AXB$$

on*vektoriavaruus-endomorfismi* eli lineaarikuvus avaruudelta itselleen. Määrää sen determinantti. KÄÄNNÄ

9. (jatkoa. En ole vielä perjantina itse laskenut.)
Olkoon G muotoa

$$g = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad A \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{R}),\ B \in \mathrm{GL}(q, \mathbb{R}), C \in M^{p \times q}$$

olevien $n \times n$-matriisien ryhmä, missä $n = p + q$.

Määrää Lien algebra $\mathfrak{g}$, adjungoitu esitys Ad ja modulifunktio Δ.