JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Lineaariset Lien ryhmät **23.1.2012 / Harjoitus 1**
D tai A ??? klo. 10.15-11.45 ja D 381 klo 16.15-17.45

1. Kompleksiluvut reaalisina matriiseina

Kuvaus $\mathbb{C} \to$ (2×2 -matriisien rengas):

$$z = a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on injektiivinen rengashomomorfismi, siis isomorfismi kuvajoukolleen, joka siis on kompleksilukujen kanssa isomorfinen kunta. Kompleksiluvut voi siis samaistaa tätä muotoa oleviin **reaalisiin** 2×2 -matriiseihin. Näin teemme seuraavassa.

1. a) Totea, että $|a + bi| = \sqrt{\det(a + bi)}$

b) Todista edellisen avulla, että kompleksilukujen normi eli itseisarvo on *multiplikatiivinen*, ts. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

c) Totea, että kompleksiluvun $z = a + bi$ kompleksikonjugaatti $\bar{z}$ on vastaavan matriisin transpoosi.

d) Mitä matriiseja vastaavat reaaliluvut?

e) Mitä matriisia vastaa $z\bar{z}$? Mitä huomaat?

f) Onko edellä mainittu isomorfismi ainoa tapa upottaa $\mathbb{C}$ alirenkaaksi kaikkien 2×2-matriisien renkaaseen? (Älä mieti liikaa: Muita emme ainakaan käytä.)

2. Pohdi, mutta älä mieti liikaa, sillä tätäkään emme käytä: Kompleksilukua $z = a + bi$ vastaavalla matriisilla kertominen on reaalisen 4-ulotteisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ reaalilineaarikuvaus itselleen, joten sillä on näin tulkittuna 4×4-matriisi. Määrää se.

3. Kaikkien 2×2-matriisien rengas on reaalisena vektoriavaruutena tietenkin helposti samaistettavissa avaruuteen $\mathbb{R}^4$ lineaari-isomorfismina esimerkiksi $(a, b, c, d) \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Tunnetulla tavalla $\mathbb{R}^4$ on euklidinen avaruus, siis sisätuloavaruus ja siis edelleen normiavaruus ja metrinen ja lopulta topologinen avaruus. Osoita, että edellisen tehtävän isomorfismin mielessä:

a) $\mathbb{C}$ on $\mathbb{R}^4$:n vektorialiavaruus (joten se perii sisätulon, normin ja topologian).

b) Onko kompleksiluvun $|z|$ itseisarvo on sama asia kuin vektorin $z \in \mathbb{R}^4$ normi?

c) Yksikkökompleksiluvulla $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$ kertominen on (reaalisen, 2-ulotteisen) tason $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^4$ kierto ja kuvaa avaruudessa $\mathbb{C}$ 1-ulotteisen aliavaruuden $\mathbb{R}$ ortogonaalikomplementikseen $\{x \in \mathbb{C} \mid (x|y) = 0 \forall x \in \mathbb{R}\}$.

4. a) Osoita, että kompleksilukujonon konvergenssi $z_n \to z$ vastaa matriisien $z_n \in \mathbb{R}^4$ jonon suppenemista avaruuden $\mathbb{R}^4$ euklidisessa topologiassa eli tavallisessa mielessä.

b) Osoita, että kompleksilukujonon konvergenssi $z_n \to z$ vastaa matriisien $z_n \in \mathbb{R}^4$ jonon suppenemista *alkioittain* eli siinä mielessä, että (reaalisille) 2×2-matriiseille

$$A_n \to A \iff (A_n)_{11} \to A_{11},\ (A_n)_{12} \to A_{12},\ (A_n)_{21} \to A_{21} \text{ ja } (A_n)_{22} \to A_{22}.$$

KÄÄNNÄ

2. Kvaterniot reaalisina matriiseina

Kuvaus $\mathbb{H} \to$ kompleksisten (2×2 -matriisien rengas):

$$a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k} \mapsto \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

on injektiivinen rengashomomorfismi, siis isomorfismi kuvajoukolleen, joka siis on kvaternioidenen kanssa isomorfinen vinokunta. Kvaterniot voi siis samaistaa tätä muotoa oleviin kompleksisiin 2×2 -matriiseihin, erityisesti

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Näin teemme seuraavassa.

5. a) Tarkasta suoraan matriisikertolaskulla, että Hamiltonin alkuperäisen kvaternioiden määritelmän ehdot $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ pätevät näille matriiseille. Laske myös **ij**, **jk** ja **ki** ja totea tästä (!), että kvaternioille pätee $qr = -rq$.

Tulkinta: Em. samaistus on tehty sillä tavalla, että reaalikertoimiset kvaterniomatriisit ovat samoja kuin edellä reaalisiksi 2×2 -matriiseiksi tulkitut kompleksiluvut, mikä merkitsee, että $\mathbb{C}$ on upotettu $\mathbb{H}$:hon valitsemalla $1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja $i \mapsto \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Olemme siis kompleksi- i-ksi valinneet tämän -1:n neliöjuuren eli imaginaariyksikön, vaikka niistä kvaternioissa olisi ollut valinnan varaa, esimerkiksi **j** tai **k**. (Huomaa, että vinokunnassa siis polynomilla voi olla enemmän juuria kuin sen aste ilmaisee.)

b) Koska kompleksiluvut on samaistettu reaalisiin 2×2 -matriiseihin, voi kvaterniot samaistaa reaalisiin 4×4 -matriiseihin, siis

$$a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k} \mapsto \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -d \\ d & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -b & c \\ -c & -b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b & c \\ -c & b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & d \\ -d & a \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -d & -b & c \\ d & a & -c & -b \\ b & c & a & d \\ -c & b & -d & a \end{pmatrix}$$

Käytämme monesta syystä mieluummin kompleksista esitystapaa, mutta on syytä tajuta tärkeä periaate, että **kvaterniot voi näin tulkita (paitsi kompleksilineaarikuvauksiksi $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$) myös reaalilineaarikuvauksiksi** $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, siis reaalisiksi matriiseiksi. Niiden agvulla pääsemme siis käsiksi neliulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^4$ geometriaan ja symmetrioihin. (Tämä ei ihan ole suhteellisuusteoriaan liittyvä versio.)

a) Totea, että *kvaternionormin neliö* $|a+bi+cj+dk|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$ on sama kuin **vastaavan kompleksisen** 2×2 **-matriisin** determinantti ja kvaternioidenkin normi on siis multiplikatiivinen: $|qq'| = |q||q'|$. Huomaa, että kvaternionormi tietenkin antaa euklidisen metriikan, kun tulkitaan yksinkertaisesti $a+bi+cj+dk = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

b) Totea, että kvaternion $q = a+bi+cj+dk$ konjugaatti $\bar{q} = a-bi-cj-dk$ on vastaavan matriisin **kompleksikonjugaatin** transpoosi.

c) Mitä kompleksisia 2×2-matriiseja vastaavat reaaliluvut?

d) Mitä kompleksista 2×2- matriisia vastaa $q\bar{q}$? Mitä huomaat?

6. Määrää kvaterniota $q = 1 + i$ vastaava
a) kompleksinen 2×2 -matriisi
b) sitä vastaava reaalinen 4×4 -matriisi (syötä äskeiseen kompleksiluvut reaalisina 2×2-matriiseina.)
c) reaalinen 4×4 -matriisi edellisen tehtävän mielessä
d) kuvausta $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : q' \mapsto qq'$ vastaava reaalinen 4×4 -matriisi
e) kuvausta $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : q' \mapsto q'q$ vastaava reaalinen 4×4 -matriisi
f) kuvausta $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : q' \mapsto qq'q^{-1}$ vastaava reaalinen 4×4 -matriisi

7. Suomenna ja todista tai kumoa: The quaternions $1, i, j$ and k form a non-Abelian group of order eight (with multiplication as the group operation).

8. Kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}^*$ kompleksikonjugaatin, normin ja käänteisluvun välillä on yhteys: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Päteekö samanlainen kaava kvaternioille?

Lopuksi. Kvaternion imaginaariosaa sanotaan myös sen vektoriosaksi.

Ilmoittautukaa korpin kautta kurssille, niin pääset e-postilistalle ja saat mm korjauksia huonoihin demotehtäviin.

Kaikenlaista tietoa kvaternioista löytyy mm sivulta
http://nethelper.com/article/Quaternions#Multiplication_of_basis_elements