Matematiikan historia 2007
Harjoitus 8 ma 5.3. 14-16 MaD 380 , 16-18 MaD 355.

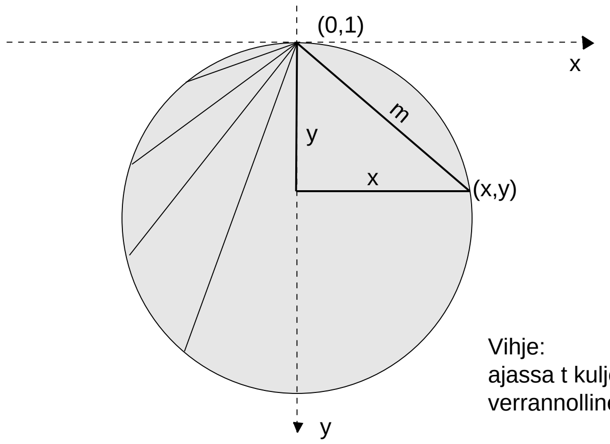
Esseet. Esseen voi tehdä itse valitsemastaan aihesta. On kuitenkin hyvä kysyä minulta <kahanpaa@maths.jyu.fi>, onko aihe hyvä. Ikävä olisi esimerkiksi, jos kaikki kirjoittaisivat samasta. Aiheeksi käy esimerkiksi jonkin matemaattisen idean tai asian kehityshistoria, jonkin kulttuuripiirin matemattinen taso/luonne, jonkin henkkiön matemaattinen työ - jopa yksittäinen oivallus tai muu samantapainen juttu. Pelkkä henkilöhistoria ilman matematiikkaa ei kelpaa! Halukkaat voivat pyytää monistamaan esseensä muille halukkaille. Kurssin tulos menee reksiteriin, kun tentti ja esseee on tehty. essee ei vaikuta laatuarvosanaan (paitsi jos se on aivan erinomainen).

Tentti on 21.3. ja uusinta 4.4. Demopisteet kelpaavat kumpaankin. Ne eivät vielä ole korpissa, mutta koetan laittaa.

1. Miten kolmannen asteen yhtälön $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kertoimet liittyvät yhtälön juuriin? (Tunnet kai vastaavan tuloksen toisen asteen yhtälölle?) Tämän yhteyden todisti selvästi vasta Girard 1600-luvulla, mutta renessanssin matemaatikot tunsivat ainakin vakiotermin merkityksen.

2. Piirrä tavallista asteikollista viivoitinta apuna käyttäen likimääräisesti Mercatorin kulmatarkan sylinteriprojektiokartan asteruudukko 20 asteen välein käyttämättä bonustehtävän (alin) tulosta. Riittää tarkastella pohjoista pallonpuoliskoa ja leveyksiä väliltä $0° - 90°$.

3. (Galilei) Onton pallon huipusta pudotetaan massapiste suoraa viivaa pitkin kitkatta. Aika, joka kuluu kunnes se törmää seinään, ei riipu suunnasta! Perustele?



Vihje:
ajassa t kuljettu matka m on
verrannollinen loppunopeuteen.

4. Napier käytti N-logaritmitaulujensa laatimiseen 20 vuotta. tulos oli hyvä, virheitä vähän. Kun hän oli valmis, hän huomasi, että nykyaikaisen tyyppinen taulukko olisi kätevämpi. Sellaista hän ei eläessään saanut valmiiksi, mutta jutteli asiasta Briggsin kanssa, joka teki työn. Briggs ei muuntanut Napierin taulukoitas, vaan laski kokonaan uudet. Briggsin logaritmitaulut olivat käytössä laskukoneiden kehittymiseen asti.

Laske logaritmituaulkon avulla tulo $4567 \cdot 45678$.

Itse asiassa Napier ei edes mainitse, miten lsketaan tulon logaritmi. Koska tähtitieteen laskuissa itse asiassa tarvittiin trigonometriaa, laditiin alun perin logaritmitaulukoiden ja trigonometristen taulukoiden yhdistelmiä. Tällainen

$$34°40' \quad 5688011 \quad 5642242 \quad 3687872 \quad 1954370 \quad 8224751 \quad 55°20'$$

1. sarakkeella on kulma α, toisella sen sini, viimeinen sarake on $90° - \alpha$ ja edellinen sen sini eli $\cos\alpha$. Kolmas ja viides sarake ovat (Napier-)logaritmit näistä sineistä. Keskimmäinen sarake on naapuriensa erotus, siis Nlog $\tan\alpha$-.

a) Laadi vastaava rivi luonnollisin logaritmein tai 10-kantaisin.

b) Olkoon kolmiosta annettu kaksi kulmaa α ja β sekä α:n vastainen sivu a. Selitä, miten lasketaan (nykyaikaistetun) Napierin taulukon avulla kulma β. (Sinilause!)

c) Entäpä, jos on annettu kaksi sivua a ja b ja biiden välinen kulma γ?

Vihje: Huomaa, etä tiedät summan $\alpha + \beta$. Nyt kannataa käyttää apuna kaavaa (jota ei tarvitse nyt todistaa)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

5. Määrää Cavalierin periaatteella (Boyer s. 466, Suomela s. 36) toruksen tilavuus, kun pyörähtävän ympyrän säde on r ja ympyrän keskipisteen etäisyys pyörähdysakselista on c. (Vertaa makaavaan sylinteriin, pituus $2\pi c$, säde r.)

6. Päättele hyperbelille tangentti Robervalin kinemaattisella menetelmällä. Periaate on, että hyperbelillä liikkuva piste etääntyy kummastakin polttopisteestä tasan samalla nopeudella, onhan hyperbeli niiden pisteiden ura, joden etäisyyksien erotus polttopisteistä on vakio. Vastaava ellipsille? (Ja parabelille?)

7. Suomelan tehtävä 5.1 sivu 55 ——MILLÄ KEINOLLA TAHANSA. (Kepler ja Fermat)

8. Olkoon

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Määrää sarjakehitelmä(n alkua) funktiolle

a) $f+g$ (helppo)
b) $3f$ (helppo)
c) fg (vertaa polynomeihin!)
d) $1/f$ (, jos osaat. Etsitty sarja kerrottuna f:n sarjalla antaa pelkän ykkösen!)

9. (Jos jää aikaa) Määritä Vièten trigonometrisella menetelmällä (Boyer sivu 439) sadasosan tarkkuudella juuri yhtälölle

$$x^3 - 9x^2 + 15x + 7 = 0.$$

10. ”Bonustehtävä”, josta ei saa pistitä: Laske Mercatorin kartan leveyspiiriviivojen korkeudet. Tuloksesa on muistakseni sekä tan että log. Tarkasta tulos vertaamalla edellisen tehtävän kuvioon.