Matematiikan historia 2001
Harjoitus 11 (Ennakkotieto) **Demoaika** <u>**tiistai 27.11.2001 klo. 12.00- 14.00**</u>

HUOMAA PITKÄ AIKA!

1. Euler aloittaa eksponenttifunktion sarjakehitelmän – erityisesti e:n lukuarvon laskemisen – kehittelyn kirjoittamalla yleisellä kantaluvulla a:

$$a^{\epsilon} = 1 + k\epsilon,$$

missä ϵ on "äärettömän pieni luku" ja sanoo, että k on vain a:sta riippuva vakio. Laske tämä "vakio" $k = k(a)$ eli

$$k = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{a^{\epsilon} - 1}{\epsilon}.$$

(Tulos voidaan tietysti tulkita derivaataksi.)

2. Todista de Moivren kaava

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Eulerin tapaan: induktiolla. Mikä on yhteys kompleksiseen eksponenttifunktioon?

3. a) Lausu i^i viiden desimaalin tarkkuudella (useitakin ratkaisuja). b) Lausu i^{i^i} sekä tarkasti että desimaaliapproksimaationa.

4. Boyer Lue kaikki Boyerin tehtävät sarjoista Euler – French revolution – Gauss ja ratkaise niistä 2.

5. Suomelan tehtävä 1 sivulta 90 (Sarja 8; Kulman kolmijako, Gauss)

6. Vertaa lukua n pienempien alkulukujen lukumäärää lukuun $\frac{n}{\log n}$, kun $n = 100$ ja suuremmillakin n, nos jaksat tai käytössäsi on tarvittavaa tekniikkaa.

7. Suomelan tehtävä 4 sivulta 91 (Sarja 8; Jatkuvuuden säilyminen, Cauchy.)

8. Suomelan tehtävä 5 sivulta 91 (Sarja 8; Jatkuvuuden säilyminen, Abel.)

9. Suomelan tehtävä 6 sivulta 91. (Sarja 8; Fourier-sarjoja)

10. Määrää suppein $\mathbb{C}$:n alikunta, johon kuuluvat

a) kaikki rationaaliluvut

b) kaikki rationaaliluvut ja $\sqrt{2}$

c) kaikki reaaliluvut ja i.

11. Todista Cauchyn lause, jonka mukaan äärellisen kommutatiivisen ryhmän G aliryhmän H alkioiden lukumäärä on koko ryhmän alkioiden lukumäärän tekijä. Vihje: ryhmä jakautuu yhtä suuriin ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssissa $a \sim b \iff a - b \in H$.

12. Todista reaalilukujen perusominaisuudet lähtemällä Dedekindin leikkauksista (Tämä tehtävä on hyvin laaja, eikä sitä käsitellä kokonaan. Pisteitä ahkeruuden mukaan. Täydellisyys on mielenkiintoisin kohta!).