JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaatiikan historia **Harjoitus 9 / 2011**

1. Algebran peruslause

1. a) Osoita suoraan kompleksikonjugoinnin määritelmästä $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$, että kaikille kompleksiluvuille z_1 ja z_2 pätee

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

ja

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

b) Osoita edellisen avulla, että jos p on reaalikertoiminen polynomi, niin kaikille kompleksiluvuille z pätee

$$\overline{p(z)} = p(\overline{z})$$

ja että siis nollakohdan kompleksikonjugaatti on nollakohta, joten ei-reaalisia nollakohtia on parillinen määrä!

2. Todista edellisen ja algebran peruslauseen avulla, että reaalinen polynomi voidaan lausua tulona reaalisista 1. ja 2. asteen polynomeista. Anna vielä esimerkki kompleksikertoimisesta polynomista, jolla ei ole tätä ominaisuutta (Triviaalia!). Historiallinen tausta parin sanoin.

2. Monenlaista geometriaa

3. Piirrä kuva (aika pitkästä) sylinteristä ja hahmottele sen pinnalle sellainen geodeettinen viiva, joka a) on (euklidinen) ympyrä, b) on suora, c) ei ole kumpikaan. Voivatko geodeettiset viivat leikata toisiaan? Voiko kaksi geodeettista viivaa leikata toisiaan monta kertaa? Millaisia mahtavat olla kartion geodeettiset viivat? (Vihje: Kääri auki!)

Mikä mahtaa olla sylinteri- tai kartiopinnan kaarevuus (Se on nolla, miksi)? Piirrä kolmio ja laske ulkokulmien summa. Miten tämä liittyy kaarevuuteen?

3. Abstraktin algebran alku

4. Keksi mahdollismman monta kolmen muuttujan (x_1, x_2, ja x_3) 2-asteista symmetristä polynomia. (Polynomi p on *symmetrinen,* mikäli $p(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_3, x_2) = p(x_2, x_1, x_3) = ...$ (kaikki 3!=6 järjestystä).)

5. Kuinka monta viidettä juurta on kompleksiluvulla 1? Piirrä ja/tai laske ne.

6. Perustele jotenkin, miksi luvut 1,2,3,.....,2011 voidaan järjestää mihin tahansa järjestykseen vaihtamalla vaiheittain kerrallaan jonon kaksi lukua keskenään, jopa vain aina 2 vierekkäistä. Tarvittavien vaihtojen lukumäärä n riippuu vaihtojärjestyksestä, mutta $(-1)^n$ ei riipu. Mistä tämä johtuu? (Kuka on tämmöistä ensin miettinyt? Miten tämä liittyy lineaarialgebraan?)

7. Määrää suppein $\mathbb{C}$:n alikunta, johon kuuluvat
a) luvut 0 ja 1
b) kaikki rationaaliluvut ja $\sqrt{2}$
c) kaikki reaaliluvut ja i
d) kaikki rationaaliluvut, $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$. (Tämä vaatii jo oveluutta, onnea tai esitietoja!)

8. Osoita, että kvaternioiden vinokunnan voi tulkita kaikkien kompleksisten $2 \times 2-$matriisien renkaan alirekaaksi.

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Vihje: Huomaa, että jokainen $A \in R$ on lineaarikombinaatio Cayleyn matriiseista (vuodelta 1858) eli "Paulin spin-matriiseista"
$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
ja että näillä on kvaternioiden laskusäännöt: $\mathbf{i^2} = -\mathbf{1}, \mathbf{ij} = -\mathbf{k}$ jne., joten ne voidaan samaistaa peruskvaternioihin $1, i, j$ ja k.

4. Analyysin ongelmia ja ratkaisuja

1. Toinen seuraavista:

9 a). Määrää seuraavien funktioiden trigonometriset Fourier-sarjat
$f(x) = a_0 + b_1 \cos x + a_1 \sin x + b_2 \cos(2x) + a_2 \sin(2x) + b_3 \cos(3x) + a_3 \sin(3x) + \ldots$:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, \text{ kun } \frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4}, \text{ kun } -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \text{ tai } \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ kun } -\pi \le x < 0 \\ x, \text{ kun } 0 \le x < \pi \end{cases}$

(c) $f(x) = x, \text{ kun } -\pi \le x < \pi$

(Tämä ei ole vaikeaa: Fourier on antanut kertoimille valmiit lausekkeet (ks. esim. Tieteiden kuningatar s.713), jotka vain tarvitsee laskea auki tässä tapauksesa!)

Huomaa, että jatkuvien funktioiden äärellinen summa on jatkuva. Ennen Fourieria ajateltiin, että varmaan myös äärettömän funktiosarjan summa on jatkuva, jos yhteenlaskettavat ovat sitä. Mutta ylläolevat osoittavat, ettei näin ole. Missä vika? Millä ehdolla jatkuvuus säilyisi? Mihin historian aikaan ja henkilöihin tällaisten kysymysten ratkaisu liittyy?

9 b). Yritä todistaa suoraan, että analyyttisten funktioiden summa, tulo ja yhdistetty kuvaus ovat analyyttisiä funktioita (Weierstrassin mielessä; anal. funktio on potenssisarjan summa). Miten asia hoidellaan helpommin! (Kompleksianalyysin kurssi)

5. Lopuksi

10. Pohdi, onko äärettömän kunnan aksioomajärjestelmä ristiriidaton.