JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaatiikan historia **Harjoitus 4 / 2011**

Kiina

1. Suorita kertolasku 124 kertaa 21 (tai 372 kertaa 82) kiinalaisella helmitaululla (Suan-Pan). Piirrä välivaiheet sarjakuvana.

2. *Kiinalainen jäännösongelma* Mestari Sunin mtematiikankirjassa (*Sunzi suanjing* noin vuodelta 300) on seuraava tehtävä, hieman nykyaikaisin sanankääntein ilmaistuna:

Pussissa on karkkeja. Kun niitä jaetaan tasan kolmelle namujen ystävälle, jää pussiin lopulta 2. Jos jateaan 5:lle, jää 3. Jos jaetaan 7:lle, jää 2. Kuinka monta karkkia pussissa on?

Kuinka monta? Esitä moderni ratkaisu.

3. Sunzin ratkaisuohje edelliselle on sanallinen ja moneen kertaan käännetynä seuraavanlainen:

Kun jaetaan kolmelle ja jäännös on 2, laita (muistiin) 140. Kun jaat viidelle ja jäännös on 3, laita 63. Kun jaat seitsemälle ja jäännös on 2, laita 30. Laske muistiluvut yhteen, niin saat 233. Tästä pois 210 antaa 23.

Sunzi selittää lisää: *Kolmosella jaettaessa laitetaan jokaista jäännöstä kohti muistiin 70, jokaista viitosella jäävää kohti laitetaan 21 ja seitsemällä jaettaessa 15. Jos summa on 106 tai yli, niin poista 105 ja saat tuloksen.* Onko oikein? Siinäkö kaikki?

Lisätietoa. Paljon myöhemmin — Song-dynastian aikana vuonna 1247 - Qin Jiushao julkaisi yleisen menetelmän lineaaristen kongruenssien ratkaisemiseksi. Esimerkki: Veroja kerätään 7 kaupungista, A, B, ... G. Kukin kaupunki joutuu maksamaan N megayania, siis yhtä paljon. Rahat tuodaan A-kaupungista 12 megayanin laatikoissa, B-kaupungista 11 megayanin laatikoissa ...kaupungista G 6 megayanin laatikoissa. Täysien laatikoiden lisäksi A-kaupunki maksaa 10 megayania, D ja G maksavat 4 ja muilta menee tasan. Kuinka paljon veroja kannetaan? Koeta ratkaista huomataksesi, mikä on vaikeaa.

Muinaisen Kiinan yhteiskunta oli keisarikeskeisyydestään huolimatta tavallaan aika demokraattinen ja byrokraattinen: periaatteessa kuka tahansa voi yletä virkahierarkiassa kuinka korkealle tahansa suorittamalla virkatutkintoja, jotka pääasiassa edellyttivät klassisen kirjallisuuden tuntemista. Noin vuodesta 200 alkaen tutkintoihin kuului myös mestari Sunin matemaattinen käsikirja *Sunzi suanjing*, jossa esiintyy peruslaskutoimitusten harjoittamisen lisäksi myös kiinalaisen jäänöslauseen klassinen versio, joka oli tehtävänä yllä.

Kiinalaiset johtuivat lukuteoriaan kalenteria tehdessään. Kiinalaieen kalenteriin kuului mm. 60 päivän jakso ja (melko) luonnollinen kuukausi, jossa tunnetusti on aika tarkkaan 29 ja puoli vuorokautta. Eräänä vuonna (nimeltään Shang yuan) 60 päivän jakson 1. päivä, täysikuu ja kevätpäivän tasaus sattuvat samana päivänä. Toistuuko sama tilanne milloinkaan? (Oleta, että vuodessa on $365\frac{1}{4}$ päivää. Käytä yksikkönä neljäsosapäiviä, niin saat kokonaislukuja.)

4. Lue Boyerin tehtävät luvuista ”KIINA JA INTIA”ja ratkaise niistä jokin Intiaan liittyvä.

1. Arabia

5. Lue Boyerin tehtävät luvusta ”The Arabic Hegemony”ja ratkaise niistä mieleisesi.

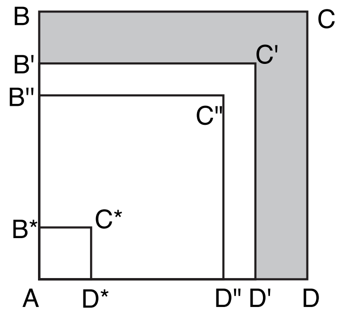
6. Luvut 220 ja 284 ovat *ystävykset*, kumpikin on toisen alkutekijöiden summa. Tarkasta tämä asia, jonka tiesivät myöhäisajan elleenitkin. He eivät löytäneet muita ystäväpareja, mutta Thābit ibn Qurra keksi n. vuonna 800 seuraavan lauseen. Kaikilla $n > 1$ merkitään $p_n = 3 \cdot 2^n - 1$ ja $q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$. Jos luvut p_{n-1}, p_n ja q_n ovat alkulukuja, niin luvut $a = 2^n p_{n-1} p_n$ ja $b = 2^n q_n$ ovat ystävykset. Tarkasta, että tapauksessa $n = 2$ näin käy, ja saadaan em. tunnettu lukupari. Seuraava pari, 17296 ja 18416, keksittiin kuitenkin vasta 500 vuotta myöhemmin (Kamāl al-Dīn al-Fārisi).

7. Al Khwarizmin *al-jabr*-kirjassa, josta algebran sanotaan alkavan, on seuraava tehtävä: Olen jakanut luvun 10 kahteen osaan, ja olen jakanut ensimmäisen toisella ja toisen ensimmäisellä ja osamäärien summa on $2\frac{1}{6}$. Etsi luvut!

8. Matemaatikko Al-Kashi ja Samarkandin ruhtinas Ulugh Beg laativat 1400-luvun alussa — läntisemmän islamilaisen luonnontieteen jo ohitettua kukoistuksensa huipun — taulukon, jossa kulman sini ja tangentti ilmoitettiin kulmaminuutin välein viiden seksagesimaalin tarkkuudella. Kuinka monta lukua siis laskettiin? Mikä tämä tarkkuus on desimaaleina? Osaatko arvioida, onko järkevää käyttää tätä kulmatiheyttä yhdessä tämän desimaalimäärän kanssa? Lähtökohtana muille laskuille he käyttivät likiarvoa $\sin 1° = 0,017452406437283571$, jonka Al-Kashi oli johtanut puolen kulman ja kolmasosakulman (!) kaavoilla. Onko tämä likiarvo oikein? (Vai onko ehkä joku kopioinut väärin?)

KÄÄNNÄ

9. Abu Bakr al Karaji (–1019) käytti matemaattista induktiota todistaakseen, että $1^3 + 2^3 + \ldots n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$. Itse asiassa hän todistaa väitteen ainoastaan, kun $n = 10$, mutta todistus ja väite yleistyvät., Tarkasta päättelyn yleistyvyys ja tunnista induktiovaihe. Päättely on seuraava:



Tarkastellaan neliötä $\square ABCD$, jonka sivun pituus on $1 + 2 + \cdots + 10$. Kuviossa $BB' = CC' = 10$. Kulma-alueen *(”gnomon”)* $BCDD'C'B'$ ala on

$$2 \cdot 10(1 + 2 + \cdots + 9) + 10^2 = 2 \cdot 10 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 10^2 = 9 \cdot 10^2 + 10^2 = 10^3.$$

Koko neliön ala on summa tästä ja neliön $\square AB'C'D'$ alasta:

$$(1 + 2 + \cdots + 10)^2 = (1 + 2 + \cdots + 9)^2 + 10^3.$$

Vastaavalla tavalla lasketaan

$$(1 + 2 + \cdots + 9)^2 = (1 + 2 + \cdots + 8)^2 + 9^3.$$

Lopuksi jäävän neliön $\square AB * C * D*$ ala on 1. Yhdistämällä tulokset saadaan väite.

Lisätieto Irakilaisen setelin kuva eisttää Alhazenia, oikealta nimeltään Abu Ali al-hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham (965-1039), yhtä arabimaailman kaikien aikojen suurimmista tiedemiehistä. Alhazen todisti em. kaavan kaikille n ja yleisti sen myös neljänsille potensseille käyttäen menetelmää, joka yleistyy summalle $\sum_{i=1}^{n} n^i$.