JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaatiikan historia

Harjoitus 1 / 24.1.2011
12-14 MaA 203 , 14-16 MaD 380

Egypti

1. Kirjoita hieroglyyfein $\frac{3}{5}$.

2. Boyer'n kirjan Egyptiä koskevan luvun tehtävä 6.

3. Seked on käänteisen kulmakertoimen eli loivuuden (!) yksikkö. Yksi seked vastaa yhden kyynärän (7 kämmentä!) nousua yhden kämmenen matkalla.

(1) Mikä on yhtä sekediä vastaava kulmakerroin? Entä kahta?
(2) Mikä on vastaava kulma?
(3) Missä kulmassa vanhan valtakunnan aikana rakennettujen Kheopsin ja Khefrenin pyramidien lappeet ovat maahan nähden, kun niiden sekedit ovat $5\frac{1}{2}$ ja $5\frac{1}{4}$?

4. Ratkaise Rhindin papyruksen tehtävä numero 65: ”Laske $\frac{100}{13}$”.

5. a) Boyer'n kirjan Egyptiä koskevan luvun tehtävä 19. (Tehtävässä on painovirhe; kämmen on 4 sormea!)
b) Laske katkaistun pyramidin tilavuus, kun tunnet sen pohja- ja kattoneliöiden sivut a ja b ja sivusärmän pituuden s.

6. Ratkaise väärän sijoituksen menetelmällä: $x + \frac{1}{9}x = 35$. Käytä tavallista numerojärjestelmää.

Kaksoisvirran maat.

7. Kirjoita 60- järjestelmässä luku 12345678987654321

8. Tehtävän tarkoituksena on mm. saada tuntumaa 60-järjestelmän tehokkuuteen.

(1) ”a)”Kuinka kauas on euron kolikko (halkaisija 23,25 mm) vietävä, jotta se näkyisi yhden kaarisekunnin kulmassa?
(2) ”b)”(Likimain) kuinka monta ”numeroa”$\in \{1, 2, \ldots, 59\}$ on luvun 10^n babylonialaisessa, siis hexagesimaalimuodossa. Entä kuinka pitkä 10^n on binäärilukuksi kirjoitettuna? Arvioi eri lukujärjestelmien etuja ja haittoja.

9. Laske 60-järjestelmässä:

(1) ”a)”$30, 12; 19 \times 11; 22, 17$
(2) ”b)”$30, 12; 19 \ : \ 3; 2$
(3) ”c)”$\sqrt{19}$ (pari askelta babylonialaisella algoritmilla. Aloita luvusta 4.)

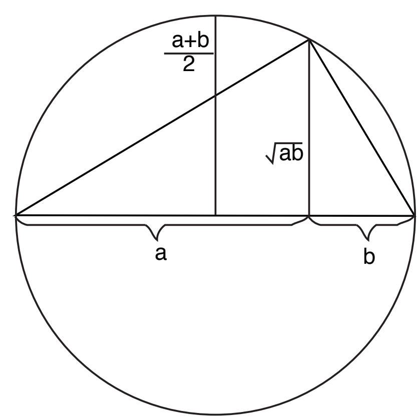
Vihje: tässä meikäläiset numerot ja laskinapu, mutta babylonialaisten algoritmi: Laskettava $\sqrt{10}$.

$$a_1 = 3$$
$$b_1 = \frac{10}{a_1} = 3,3333$$
$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = 3,16666$$
$$b_2 = \frac{10}{a_2} = 3,15789$$
$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) = 3,1622$$
$$b_3 = \frac{10}{a_3} = 3,1623$$

siinä välissä se on.

Miksi toimii? Tämä on hyvä tilaisuus kerrata analyysin perustaitoja.

Erityisesti on syytä huomata, että a_1 on liian pieni, joten tietysti b_1 on liian iso. Edelleen a_2 on liian pieni, sillä kahden positiiviluvun aritmeettinen keskiarvo on suurempi kuin niiden *geometrinen keskiarvo* $\sqrt{ab}$. Katsopa kuvaa:



Tarvittavia tietoja.

(1) 10-järjestelmä. Hieroglyfien $\mathbf{N}$ ja $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$.

(2) Mittayksiköt:

(a) pituus: kyynärä on 7 kämmentä, kukin **4 sormea.** 100 kyynärää on köysi, khet.

(b) ala: setat on neliökhet, siis noin $\frac{1}{4}$ hehtaaria. Pilkotaan puoliksi, neljäsosaksi, jne (Binääri !)

(c) tilavuus on perussuure: yksikkö hekat on noin gallona eli 5 litraa.

(d) hekatin paloittelu yleensä binaariosiin tai 1/10- osaksi (perusruukku on siis noin 1/2 litraa) (Binaariosat merkittiin toisinaan n horuksensilmämerkein. Mahdollinen yhteys sarjaan $\sum 2^{-n}$.)

(e) Käänteinen kulmakerroin, eli loivuus: yksi seked on yhden kyynärän nousuun (tai laskeutumiseen) tarvittava sivusuuntainen matka KÄMMENINÄ. 45 asteen nousukulmaa vastaa siis 7 sekediä, loivempia kulmia isompi sekedluku. Tässä on takana tietenkin yhdenmuotoisuuden käsite ja siis viime kädessä trigonometrian alku!

(f) ”laatu”: Laatu on käänteinen lukumäärä. Yksikkö ”pesu”ilmoittaa yhdestä viljahekatista leivottujen leipien (tai pantujen kaljatuoppien) lukumäärään.

(3) Luonnollisten lukujen tulo: Algoritmi: ”tuplaa ja summa”palauttaa kaiken helpoiksi yhteenlaskuiksi: esimerkiksi 9×5 lasketaan muodostamalla ensin luvut $5, \quad 2 \times 5, \quad 4 \times 5$ ja $lasketaan 8 \times 5$ ja huomaamalla, että $9 = 8 + 1$, joten $9 \times 5 = 8 \times 5 + 1 \times 5$. Taas binääri-ideat!

(4)

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{m}$$

lasketaan tekemällä edelliset laskutoimitukset nimittäjässä.

(5) $n \times \frac{1}{m}$ on vaikea. Samoin $\frac{n}{m}$ (samako?). Menettely on hienostunut:

$$\begin{array}{rl}
\frac{47}{33} & ? \\
\checkmark\ 1 & 33 \\
\checkmark\ \frac{1}{3} & 11 \\
\checkmark\ \frac{1}{11} & 3 \\
\text{-----------------} & \\
1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} & 47.
\end{array}$$

Vaikeampi tehtävä:

$$\begin{array}{rl}
& \frac{33}{47} \quad ? \\
& 1 \quad 45+2=47 \\
\checkmark & \frac{2}{3} \quad 30+(1+\frac{1}{3}) = 31+\frac{1}{3} \\
\checkmark & \frac{1}{47} \quad 1 \\
\checkmark & \frac{1}{94} \quad \frac{1}{2} \\
\checkmark & \frac{1}{282} \quad \frac{1}{6}
\end{array}$$

− − − − − − − − − − − − −

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{47}+\frac{1}{94}+\frac{1}{282} \qquad 33$$

tai vaihtoehtoisesti:

$$\begin{array}{rl}
& \frac{33}{47} \quad ? \\
& 1 \quad 45+2=47 \\
\checkmark & \frac{1}{2} \quad (22+\frac{1}{2})+1 = 23+\frac{1}{2} \\
& \frac{1}{5} \quad 9+(\frac{1}{5}\times 2) \\
\checkmark & \frac{1}{5} \quad 9+\frac{1}{3}+\frac{1}{15} \text{ Katsottu taulukosta !} \\
\checkmark & \frac{1}{470} \quad \frac{1}{10}
\end{array}$$

− − − − − − − − − − − − −

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{470} \qquad 33$$

Mitä kertoimia kannattaa valita pitkin matkaa? Esimerkiksi edellisessä on ensimmäisessä vaiheessa valittu puolikas aika satunnaisesti (vrt. edellinen). Toisessa vaiheessa huomataan, että $\frac{1}{2} \times 47 = 23\frac{1}{2}$, joten jäännös, eli tavoite on $33 - 23\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$. Viidennes 47:sta on jo hyvin lähellä tätä.

(6) Ei tiedetä tarkkaan, miten egyptiläiset kirjurit onnistuivat laatimaan oheisen $\frac{2}{n}$:n taulukon (n pariton!).

(7) Murtolukujen yhteenlaskumetodi oli periaatteessa nykyinen, siis yhteisen tekijän (nimittäjien pyj tai tulo tms.) eteenotto. Näin voit menetellä.

(8) Egyptiläisten kaava pyramidintyngän tilavuudelle on $\frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$, missä h on korkeus. Onko se oikein? Entä korkeus? Laske modernilla tavalla. Boyerin mukaan ei ole suoria todisteita siitä, että egyptiläiset olisivat tunteneet Pythagoraan lauseen, mutta tarumainen (?) Pythagoras oli nuorena Egyptissä - tosin vasta yli tuhat vuotta Ahmes-kirjurin jälkeen. Koeta (vaikka netistä) ottaa selvää, osasivatko egyptiläiset laskea neliöjuuria!