JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Matematiikan historia **Harjoitus 8 / 2010**

Esseet. Esseen voi tehdä itse valitsemastaan aiheesta. On kuitenkin hyvä kysyä minulta, onko aihe hyvä. Ikävä olisi, jos kaikki kirjoittaisivat samasta. Aiheeksi käy esimerkiksi jonkin matemaattisen idean tai asian kehityshistoria, jonkin kulttuuripiirin matemattinen taso/luonne, jonkin henkilön matemaattinen työ - jopa yksittäinen oivallus tai muu samantapainen juttu. Pelkkä henkilöhistoria ilman matematiikkaa ei kelpaa. Esseen ideana on ottaa tuntumaa historiantutkimukseen kaivelemalla jostain hiukan alkuperäislähdettä muistuttava dokumentti - Mattilanniemen kirjastossa on muitakin hyllyjä kuin sarja A. Onnekas löytää jutun, joka on internetissä väärin. Eseen ei tarvitse olla pitkä, muutama sivu riittää. Halukkaat voivat pyytää monistamaan esseensä muille halukkaille. Kurssin tulos menee reksiteriin, kun tentti ja essee on hyväksytty. Essee ei vaikuta laatuarvosanaan (paitsi jos se on aivan erinomainen).

Demopisteet kelpaavat kaikkiin kevään 2010 lopputentteihin riippumatta yrityskerrasta.

1. Johda sarjakehitelmä funktiolle $g(x) = (1+x)^{-\frac{3}{2}}$ lähtemällä funktion $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}$ binomisarjasta ja soveltamalla siihen tehtävän 6 tulosta. Pitäisi tulla binomisarjaa.

2. ”Ratkaise” differentiaaliyhtälö $dy = \frac{1}{1+x}dx$ Leibnizin tyyliin eli yritteellä $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ ja ratkaisemalla syntyvät helpot yhtälöt yksi kerrallaan. Minkä funktion potenssisarja(a) löytyi?

3. Todista *de Moivren kaava*

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Eulerin tapaan: induktiolla. Mikä on yhteys kompleksiseen eksponenttifunktioon?

4. a) Lausu i^i viiden desimaalin tarkkuudella (useitakin ratkaisuja?).
b) Lausu i^{i^i} sekä tarkasti että desimaaliapproksimaationa.

5. Boyer Lue kaikki Boyerin tehtävät sarjoista Euler – French revolution – Gauss ja ratkaise ”French revolution”tehtävä 8 (Kolmion ala determinanttina. Huomaa determinantin geometrinen tulkinta.)

6. Suomelan tehtävä 1 sivulta 90 (Sarja 8; Kulman kolmijako, Gauss)

7. Gauss johti nimeään kantavan kellokäyrän eli normaalijakauman lähtemällä vaatimuksesta, että riippumattomien mittaustulosten keskiarvon tulee olla todennäköisin mittaustulos. Osoita, että normaalijakaumalla on tämä ominaisuus, ts. seurava asia: $n-$kokoisen otoksen tiheysfunktion

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i),$$

missä

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),$$

suurin arvo joukossa $\left\{\overline{x} \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \mu\right\}$ saavutetaan kohdassa $x_1 = x_2 = \ldots x_n = \mu$. (Käytä esim. Lagrangen kertoimia.)

8. Vertaa lukua n pienempien alkulukujen lukumäärää lukuun $\frac{n}{\log n}$, kun $n = 100$ ja suuremmillakin n, jos jaksat tai käytössäsi on tarvittavaa tekniikkaa. (Riemann!)

9. a) Askartele paperista funktion $f(z) = \sqrt{z}$ Riemannin pinta. Tehtävä on hiukan mahdoton, mutta älä anna sen häiritä työtäsi vaan selitä ongelma pois.

tai b) Leivo pullataikinasta torus ja vähintään sen 5 ensimmäistä yleistystä ja paista. Tarjoa demoissa kavereillesi tätä pullaa ja selitäja laske mikä on kunkin pinnan genus. Voit koristella pullat esim geodeettisin käyrin tai perysryhmän alkioin.