JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaatiikan historia **Harjoitus 6 / 2010**

1. Määrää alla kuvatulla *kahden väärän sijoituksen menetelmällä* sadasosan tarkkuudella yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ juuri, joka on 1:n ja 2.n välillä.

(Kirjassa 'Flos' eli 'Kukka' Pisan Leonardo eli Fibonacci ilmoittaa juurelle 60-järjestelmässä likiarvon $1^0 22^I 7^{II} 42^{III} 33^{IV} 4^V 40^{IV}$ eli $1 + 22/60 + 7/60^2 + \ldots$, joka antaa yhdeksän oikeaa desimaalia. Hän ei kerro, miten hän on sen laskenut, mutta hän tunsi kahden väärän sijoituksen menetelmän, jossa lähdetään kahdesta arvauksesta, aliarviosta x_1 ja yliarviosta x_2. Säännöllä, joka vastaa lineaarista interpolaatiota, saadaan niiden väliin sijoittuva arvo x_3, yhtälön $f(x) = 0$ tapauksessa

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

Ottamalla x_3 uudeksi ali- tai yliarvioksi ja toistamalla menettely saadaan juuri vielä kapeampaan haarukkaan jne.)

2. *Fibonaccin luvut* $f_0, f_1, f_2 \ldots$ ovat 1,1,2,3,5,8,13,..., jatkaen siten, että kukin on kahden edellisen summa.

a) Todista polynomien jakolaskulla, että osamäärän $\frac{x}{(1-x-x^2)}$ sarjakehitelmässä x:n nousevien potenssien mukaan ensimmäiset kertoimet ovat Fibonaccin lukuja. Ovatko kaikki?

b) Osoita, että peräkkäisten kertoimien — siis peräkkäiseten Fibonacci-lukujen — suhde lähestyy kultaisen leikkauksen "jumalaista suhdetta" $(1 + \sqrt{5}) : 2$. Tämän tuloksen johti ensimmäisenä v. 1753 Robert Simson. Nimitys "jumalainen suhde" on Luca Paciolin teoksesta 'De divina proportione' (1509), johon Leonardo da Vinci laati kuvituksen.)

3. Euroopan vanhimmat yliopistot syntyivät vuoden 1200 kahden puolen, ensimmäiset Pariisiin, Oxfordiin (siellä osana Merton College) ja Bolognaan. Mestarit ja oppilaat muodostivat aika pian 4 tiedekuntaa, teologian, lakitieteen, lääketieteen ja filosofian, johon kuuluivat "kaikki muut", nimittäin arvostetumpi kolmen aineen ryhmä trivium (Aristoteleen logiika, kielioppi, retoriikka) ja neljän aineen ryhmä kvadrivium: (aritmetiikka, geometria, musiikki, tähtitiede). Merton Collegessa Thomas Bradwardine ja William Heytesbury yrittivät menestyksellisesti määritellä nopeuden ja kiihtyvyyden käsitettä, jota Nicole Oresme selvitteli Pariisissa. He tutkivat muutakin kuin tasaista ja tasaisesti kiihtyvää liiketä, mutta päätulos oli keskinopeuskaava: **Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä levosta lähtevä piste ehtii tietyssä ajassa kulkea puolet siitä matkasta, jonka se olisi ehtinyt kulkea, jos sillä koko ajan olisi ollut lopullinen nopeutensa** eli nopeus at.

a) Totea, että tämä on fysiikan kaava $s = \frac{1}{2}at^2$.

b) Osoita keskinopeuskaavan avulla: jos aikaväli jaetaan neljään osaan, niin niillä lausen tilanteesa kuljetut matkat suhtautuvat toisiinsa kuten 1:3.5:7. Muistuuko mieleen mitään muinaista?

4. Yllätystehtävä: Jos osaat algebraa, laadi *dihedraalisen 6-alkioisen ryhmän* D_6 eli tasasivuisen kolmion symmetrsiaryhmän kertotaulu. (Ryhmän alkiot ovat neutraalialkio e ja kahden kirjaimen m ja f muodostamat sanat, joilla pätevät lisäksi relaatiot $f^2 = e$, $m^3 = e$ ja $fmfm = e$. Kolmiotulkinnassa f edustaa kolmion peilausta valitun symmetria-akselinsa suhteen ja r edustaa kiertoa 120 asteen verran positiiviseksi svalittuun suuntaan; muut ovat näiden yhdistelmät). Jos et osaa algebraa, koeta ottaa selvää, miten tämä asia voi liittyä *Vanuatun saaren polynesialaisten alkuasukkaiden* kulttuuriin.

5. a) Ratkaise $x^3 + 3x = 10$ Cardanon kaavalla (Cardano: Ars Magna 1545).
b) Ratkaise $x^3 = 6x + 6$. Cardanon kaavalla.

6. Todista, että yhtälöllä $x^3+cx = d$ on aina positiivinen juuri, mutta ei koskaan negatiivista juurta (kun $c, d > 0$). (Cardano: Ars Magna 1545)

7. Miten kolmannen asteen yhtälön $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kertoimet liittyvät yhtälön juuriin? (Tunnet kai vastaavan tuloksen toisen asteen yhtälölle?) Tämän yhteyden todisti selvästi vasta Girard 1600-luvulla, mutta renessanssin matemaatikot tunsivat ainakin vakiotermin merkityksen.

8. Piirrä tavallista asteikollista viivoitinta apuna käyttäen likimääräisesti Mercatorin kulmatarkan sylinteriprojektiokartan asteruudukko 15 asteen välein käyttämättä laskemalla saatua tarkkaa tulosta. Aloita päiväntasaajalta ja etene pohjoiseen kaista kerrallaan. Riittää tarkastella pohjoista pallonpuoliskoa ja leveyksiä väliltä $0° - 75°$. Tarvittavat kumien $15°, 30°, 45°, 60°$ ja $75°$ kosinien likiarvot saat taulukosta, laskimesta tai yksinkertaisesti piirtämällä sopivan kuvion ja mittaamalla siitä. (Jos haluat, saat laskea lopuksi Mercatorin kartan leveyspiiriviivojen korkeudet nykykeinoin ja tarkastaa tuloksen vertaamalla piirtämääsi kuvioon — tai oikeaan karttaan)

9. Joko: Piirrä perspektiivikuva shakkilaudasta (nappuloineen, jos kiinnostaa).
Tai: Etsi renessanssiajan maisema- tai arkkitehtuurikuva ja tunnista siitä äärettömyys- eli katoava piste, horisontti ja muita perspektiiviopin piirteitä.

10. Bonustehtävä. *Tartaglian* ja *Ferrarin* kilpailusta: Jaa 8 kahden luvun summaksi $x + y$ siten, että $xy(x - y)$ on mahdollisimman suuri. (Et tietenkään saa käyttää differentiaalilaskentaa, koska sitä ei ole vielä keksitty! Minä en vieläkään osaa tätä itse! LK)