JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaatiikan historia **Harjoitus 3 / 2010**

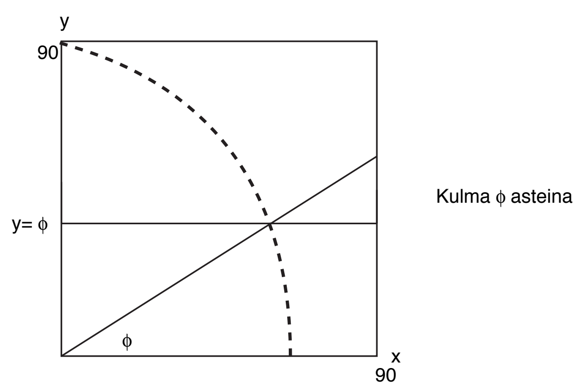
1. *Pythagoraan kolmikko* muodostuu kolmesta luonnollisesta luvusta a, b, c, jotka voivat olla suorakulmaisen kolmion sivut, eli joilla pätee $a^2 + b^2 = c^2$, (jos c on suurin). Osoita, että

a) jos yksi Pythagoraan kolmikon luvuista on pariton, niin toiset ovat pariton ja parillinen.

b) jos suurin on jaollinen neljällä, niin molemmat toisetkin ovat jaolliset neljällä.

2. Todista Eukleideen aksioomista alkaen, että kolmion kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa. (Aika pitkä. Katso jostakin kirjasta tai sivulta http://www.math.jyu.fi/~kahanpaa/ETG/Eukleides.pdf ja esitä vain lyhennelmä todistuksesta.)

3. Sofisti Hippias on keksinyt *trisektrix*- eli *kvadratrix* -nimisen käyrän, jonka yhtälö napakoordinaateisa (kulmat astein) on $(y =)\ r \sin(\varphi) = \varphi$. Käyrän voi ajatella syntyvän siten, että viivoitin nousee tasaisella nopeudella neliön pohjalta neliön kanteen ja samalla toinen viivoitin kiertyy pohjalta vasemman alakulman ympäri tasaisella kulmanopeudella, joka on valittu siten, että 90 astetta saavutetaan samalla hetkellä, jolla vaakasuora viivoitin osuu kattoon. Viivoittimien leikkauskohta piirtää trisektrixin.

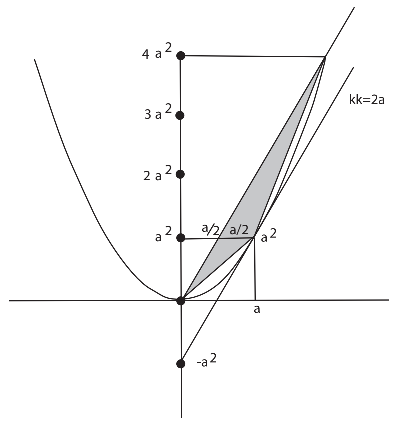


Valmiiksi piirretyn trisektrixin avulla on helppoa jakaa kulma kolmeen yhtä suureen osaan, kun osaa jakaa janan kolmeen yhtä pitkään osaan. Mutta nimen ”kvadratrix” käyrä on saanut siitä, että sen avulla voi myös neliöidä ympyrän! Missä suhteessa kvadratrix eli trisektrix jakaa neliön pohjan? Johda väitteesi nykyaikaisin keinoin. Miten kvadratrixin avulla siis voi ”neliöidä ympyrän”?

4. Hahmottele (tai esitä!) tyhjennys- eli ekshaustiotodistus sille, että samankorkuisten sylinterien tilavuudet suhtautuvat toisiinsa kuten niiden pohjien alat (Eukleides 'Alkeet'. lause XII.11)

KÄÄNNÄ

5. (Tämä liittyy Arkhimedeen laskelmiin). (a) Laske kuvaan piirretyn kolmion pinta-ala.



6. Mieleisesi Boyer'n tehtävä luvusta "Apollonius of Perga."

7. Todista, että taso leikkaa (suoraa ympyrä-) sylinteriä pitkin ellipsiä (tai suoraa tai ei ollenkaan). Voit matkia Apollonioksen mentelmää tai käyttää jotain modernimpaa.

8. Todista Platonin lause, jonka mukaan on olemassa tasan viisi säännöllistä monitahokasta. Neuvo: Voit käyttää seuraavaa lemmaa: "Kussakin kärjessä tahkojen kulmien summa on enintään 360°, esimerkiksi kuutiolla 270°". Vaihtoehtoinen neuvo: Vetoa Eulerin (Milloinkahan hän eli, ja missä?) monitahokaslauseeseen, jonka mukaan monitahokkailla on $\#\{\text{ Tahkot }\} - \#\{\text{ Särmät }\} + \#\{\text{ Kärjet }\} = 2$.

Kommentti: Platonin monitahokkaat olivat lähes mystisen tärkeitä harmonian ja kauneuden symboleja ja liittyvät myös tähtitieteen kehitykseen. Boyerin kirjan kansikuva! Osaatkohan todistaa Eulerin monitahokaslauseen? Voit kokeilla vaikka induktiota tahkojen lukumäärän suhteen.