JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaatiikan historia **Harjoitus 9 / 2008**

Kurssin "virallinen" opetus päättyy näihin harjoituksiin. Tämä tarkoittaa, että tentittävä aineisto sisältää tähänastiset luennot ja harjoitukset sekä kirjaa "Tieteiden Kuningatar osat I-I" ja monistetta Suomela: "Matematiikan historia, .. " vastaavat tiedot. Harjoitustehtävät vastausvihjeineen ovat kurssimapissa huoneessa 382.

Jotka eivät toisin ilmoita suorittavat kurssin tentillä (ja mahdollisilla harjoituspisteillä) ja kirjoittamalla pienen esseen. Harjoituspisteet päivitän korppiin viimeisten harjoitusten jälkeen.

Kurssin tiimoilta järjestetään kuitenkin vielä kolme tilaisuutta, joita suosittelen niille, jotka arvelevat niistä ehkä pitävänsä:

(1) Pidän vielä yhden luennon Maanantaina 17.3.07 tavalliseen aikaan 10-12. Luennolla käsitellään hieman modernimpaa matematiikan historiaa, eikä siellä esitettyjä asioita vaadita tentissä.
(2) Järjestän TIISTAINA 18.3.07 luentoaikaan 10-12. ekskursion Historica-rakennukseen, jossa on esillä 50 vanhaa karttaa selostuksineen.
(3) Näytän elokuvan **Fermat's Last Theorem** ———— (sali MaD 259 varattava!) Yhteisnäytös LuK-seminaarin kanssa ???. Varmistan ajan ja paikan tämän kurssin postilistalla.

1. Todista *de Moivren kaava*

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Eulerin tapaan: induktiolla. Mikä on yhteys kompleksiseen eksponenttifunktioon?

2. a) Lausu i^i viiden desimaalin tarkkuudella (useitakin ratkaisuja?).
b) Lausu i^{i^i} sekä tarkasti että desimaaliapproksimaationa.

3. Boyer Lue kaikki Boyerin tehtävät sarjoista Euler – French revolution – Gauss ja ratkaise "French revolution"tehtävä 8 (Kolmion ala determinanttina. Huomaa determinantin geometrinen tulkinta.)

4. Todista, että luvut 1,2,3,.....,2008 voidaan järjestää mihin tahansa järjestykseen vaihtamalla vaiheittain kerrallaan jonon 2 lukua keskenään, jopa vain aina 2 vierekkäistä. Tarvittavien vaihtojen lukumäärä n riippuu vaihtojärjestyksestä, mutta $(-1)^n$ ei riipu. Mistä tämä johtuu? Miten tämä liittyy lineaarialgebraan?

5. Vertaa lukua n pienempien alkulukujen lukumäärää lukuun $\frac{n}{\log n}$, kun $n = 100$ ja suuremmillakin n, nos jaksat tai käytössäsi on tarvittavaa tekniikkaa. (Riemann! On juuri ilmestynyt mainio kirja: John Derbyshire: Alkulukujen lumoissa.)

6. Suomelan tehtävä 4 sivulta 91 (Sarja 8; Jatkuvuuden säilyminen, Cauchy.)

7. Suomelan tehtävä 6 sivulta 91:
Määrää seuraavien funktioiden Fourier-sarjat

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, \text{ kun } \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4}, \text{ kun } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \text{ tai } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ kun } -\pi \leq x < 0 \\ x, \text{ kun } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(c) $f(x) = x, \text{ kun } -\pi \leq x < \pi i$

8. Määrää suppein **C**:n alikunta, johon kuuluvat
a) kaikki rationaaliluvut
b) kaikki rationaaliluvut ja $\sqrt{2}$
c) kaikki reaaliluvut ja i.
d) kaikki rationaaliluvut, $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$. (??)

9. Jokin seuraavista:

10. Todista Cauchyn (Lagrangen!) lause, jonka mukaan äärellisen kommutatiivisen ryhmän G aliryhmän H alkioiden lukumäärä on koko ryhmän alkioiden lukumäärän tekijä. Vihje: ryhmä jakautuu yhtä suuriin ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssissa $a \sim b \iff a - b \in H$.

11. Yritä todistaa suoraan, että analyyttisten funktioiden summa, tulo ja yhdistetty kuvaus ovat analyyttisiä funktioita (Weierstrassin mielessä; anal. funktio on potenssisarjan summa). Miten asia hoidellaan helpommin!

12. Todista reaalilukujen perusominaisuudet lähtemällä Dedekindin leikkauksista (Tämä tehtävä on hyvin laaja, eikä sitä käsitellä ollenkaan. Pisteitä ahkeruuden mukaan. Täydellisyys on mielenkiintoisin kohta!).

13. Gauss johti nimeään kantavan kellokäyrän eli normaalijakauman lähtemällä vaatimuksesta, että riippumattomien mittaustulosten keskiarvon tulee olla todennäköisin mittaustulos. Osoita, että normaalijakaumalla on tämä ominaisuus, ts. seurava asia: $n-$kokoisen otoksen tiheysfunktion

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i),$$

missä

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),$$

suurin arvo joukossa $\left\{\overline{x} \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mu\right\}$ saavutetaan kohdassa $x_1 = x_2 = \ldots x_n = \mu$. (Käytä esim. Lagrangen kertoimia.)