JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaatiikan historia **Harjoitus 8 / 2008**

Esseet
Esseen ideana on ottaa tuntumaa historiantutkimukseen kaivelemalla jostain hiukan alkuperäislähdettä muistuttava dokumentti - Mattilanniemen kirjastossa on muitakin hyllyjä kuin sarja A. Onnekas löytää jutun, joka on internetissä väärin. Eseen ei tarvitse olla pitkä - pari kolme sivua riittää hyvin.

1. Suomelan tehtävä 8 sivu 30 (Kepler).

2. Suomelan tehtävä 5.1 sivu 55.

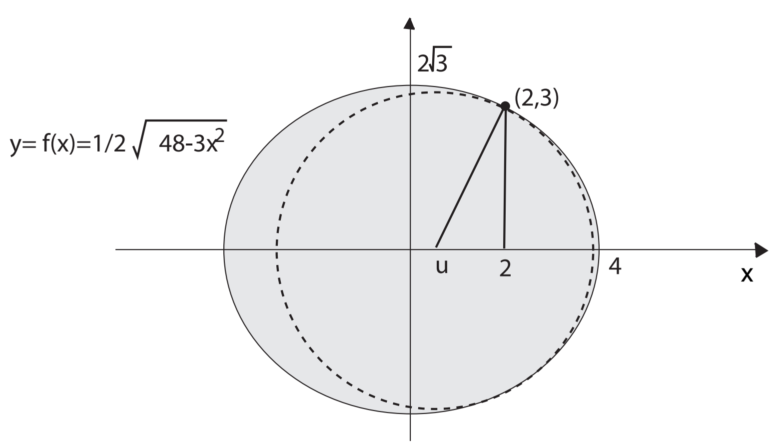
3. Suomelan t. 5.2 sivu 55: Määrää ellipsin $3x^2 + 4y^2 = 48$ tangentti pisteessä $(2, 3)$

a) Robervalin kinemattisella menetelmällä (periaate on, että ellipsillä liikkuva piste etääntyy toisesta polttopisteestä samalla nopeudella kuin lähestyy toista, onhan ellipsi niiden pisteiden ura, joden etäisyyksien summa polttopisteistä on vakio.)

b) Fermat'n menetelmällä (pseudoyhtälö, Suomela sivu 49).

4. (Jatkoa)

c) Descartesin menetelmällä (Suomela s. 50: Etsi sellainen ympyrä, jonka keskipiste on x-akselilla ja joka sivuaa ellipsiä pisteessä $(2, 3)$. Tässä on 2 tuntematonta, ympyrän säde r ja sen keskipisteen x-koordinaatti u. Koska ellipsi



on kokonaan sivuavan ympyrän samalla (ulko-) puolella, niin välillä $[0, 4]$, on $(f(x))^2 + (u - x)^2 \geq r^2$. Toisen asteen yhtälöllä $(f(x))^2 + (u - x)^2 - r^2 = 0$ on siis kohdassa x=2 arvo 0 ja diskriminantti 0. Tässä kaksi yhtälöä kahdelle tuntemattomalle u ja r. Tietenkin $f(2) = 3$.

d) Hudden ja Slusen säännöllä (Suomela s. 50:)

e) Niin kuin parhaiten osaat (monta vaihtoehtoa!)

5. Eukleideen tasourat-kirjasta ovat peräisin ellipsin ja hyperbelin määritelmät parabelin tapaan niiden pisteiden urana, joiden etäisyydet polttopisteestä ja johtosuorasta ovat vakiosuhteessa (Suomela s. 43). Parabelin tapauksessa suhde on 1. Määritä niiden pisteiden ura, joiden etäisyydet pisteistä $(2, 0)$ ja suorasta $x = 8$ ovat suhteessa 1:2. Piirrä!

6. Olkoon $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
Määrää sarjakehitelmä(n alkua) funktiolle
(1) $f + g$ (helppo)
(2) $3f$ (helppo)
(3) fg (vertaa polynomeihin!)
(4) $1/f$ (Etsitty sarja kerrottuna f:n sarjalla antaa pelkän ykkösen!)

7. Laske binomisarjan avulla $(1 + x)^{-3/2}$ tarkkuudella ± 0.01, kun $x = \frac{1}{2}$.

8. Johda sarjakehitelmä funktiolle $g(x) = (1 + x)^{-\frac{3}{2}}$ lähtemällä funktion $f(x) = (1 + x)^{\frac{3}{2}}$ binomisarjasta ja soveltamalla siihen tehtävän 6 tulosta. Pitäisi tulla binomisarja.

9. "Ratkaise"differentiaaliyhtälö $dy = \frac{1}{1+x} dx$ Leibnizin tyyliin eli yritteellä $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ ja ratkaisemalla syntyvät helpot yhtälöt yksi kerrallaan. Minkä funktion potenssisarja löytyi?

10. (Jos jää aikaa) Todista Kopernikuksen (ellipsit!) yleistys Nasir Eddin al Tusin lauseelle: (Boyer sivu 521) Jos 1-säteinen ympyrä Y rullaa liukumatta pitkin 2-säteisen kiinteän ympyrän K kehää sisäpuolella, niin ympyrän Y kehän piste piirtää janan, mutta sen muut pisteet piirtävät ellipsejä.