JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaatiikan historia **Harjoitus 6 / 2008**

1. Todista Menelauksen lause tasossa. (http://agutie.homestead.com/files/menelaus1.htm)

2. Lue Boyerin tehtävät luvuista ”Europe in the Middle Ages”ja ”The Renaissance”ja ratkaise niistä mieleisesi.

3. Määrää (alla kuvatulla) *kahden väärän sijoituksen menetelmällä* sadasosan tarkkuudella yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ juuri, joka on 1:n ja 2.n välillä.(Kirjassa ’Flos’ eli ’Kukka’ Pisan Leonardo eli Fibonacci ilmoittaa juurelle 60-järjestelmässä likiarvon $1^0 22^I 7^{II} 42^{III} 33^{IV} 4^V 40^{IV}$ eli $1 + 22 \cdot 60 + 7 \cdot 60^2 + \ldots$, joka antaa yhdeksän oikeaa desimaalia. Hän ei kerro, miten hän on sen laskenut, mutta hän tunsi kahden väärän sijoituksen menetelmän, jossa lähdetään kahdesta arvauksesta, aliarviosta x_1 ja yliarviosta x_2. Säännöllä, joka vastaa lineaarista interpolaatiota, saadaan niiden väliin sijoittuva arvo x_3, yhtälön $f(x) = 0$ tapauksessa

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

Ottamalla x_3 uudeksi ali- tai yliarvioksi ja toistamalla menettely saadaan juuri vielä kapeampaan haarukkaan jne.)

4. Ratkaise seuraava Pisan Leonardon ’Liber Abacin’ (1202, säilynyt vuoden 1228 laitoksena) ongelma, joka tunnetaan monina muunnelmina ja joka sisältää koronkoron ajatuksen: Puutarhuri astui puutarhaan seitsemän portin läpi ja keräsi korin omenoita. Palatessaan hän antoi ensimmäisen portin vartijalle puolet omenoista ja vielä yhden, toisen portin vartijalle puolet jäljelle jääneistä omenoista ja vielä yhden ja samalla tavalla viidellä muullakin portilla. Hänelle jäi yksi omena itselleen. Kuinka monta omenaa hän poimi puutarhasta?

5. (?) Todista, että Fibonaccin luvuille 1,1,2,3,5,8,13,. . . , jatkaen siten, että kukin on kahden edellisen summa, pätee ”Simsonin identtisyys”

$$f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

(Identtisyys antaa mahdollisuudeen tunnettuun geometriseen jekkuun, jolla muka todistetaan, että 64=65.)

6. Todista polynomien jakolaskulla, että osamäärän $\frac{x}{(1-x-x^2)}$ sarjakehitelmässä x:n nousevien potenssien mukaan ensimmäiset kertoimet ovat Fibonaccin lukuja ja todista, että loputkin ovat. Osoita esimerkiksi osamurtokehitelmää käyttäen, että peräkkäisten kertoimien — siis peräkkäiseten Fibonacci-lukujen — suhde lähestyy kultaisen leikkauksen ”jumalaista suhdetta”$(1+\sqrt{5}) : 2$. (Tämän tuloksen johti ensimmäisenä v. 1753 samainen Robert Simson, joka on antanut nimensä edellisen tehtävän identiteetille. Nimitys ”jumalainen suhde”on Luca Paciolin teoksesta ’De divina proportione’ (1509), johon Leonardo da Vinci laati kuvituksen.)

7. Euroopan vanhimmat yliopistot syntyivät vuoden 1200 kahden puolen, ensimmäiset Pariisiin, Oxfordiin (siellä osana Merton College) ja Bolognaan. Mestarit ja oppilaat muodostivat aika pian 4 tiedekuntaa, teologian, lakitieteen, lääketieteen ja filosofian, johon kuuluivat "kaikki muut", nimittäin arvostetumpi kolmen aineen ryhmä trivium (Aristoteleen logiika, kielioppi, retoriikka) ja neljän aineen ryhmä kvadrivium: (aritmetiikka, geometria, musiikki, tähtitiede). Merton Collegessa Thomas Bradwardine ja William Heytesbury yrittivät menestyksellisesti määritellä nopeuden ja kiihtyvyyden käsitettä, jota Nicole Oresme selvitteli Pariisissa. He tutkivat muutakin kuin tasaista ja tasaisesti kiihtyvää liiketä, mutta päätulos oli keskinopeuskaava: **Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä levosta lähtevä piste ehtii tietyssä ajassa kulkea puolet siitä matkasta, jonka se olisi ehtinyt kulkea, jos sillä koko ajan olisi ollut lopullinen nopeutensa** eli nopeus at.

a) Totea, että tämä on fysiikan kaava $s = \frac{1}{2}at^2$.

b) Osoita keskinopeuskaavan avulla: jos aikaväli jaetaan neljään osaan, niin niillä lausen tilanteessa kuljetut matkat suhtautuvat toisiinsa kuten 1:3.5:7. Muistuuko mieleen mitään muinaista?

8. Todista Oresmen graafisella menetelmällä, että

(1) $\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{3}{64} + \cdots + n \cdot \frac{3}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}$,

(2) $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \cdots + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$

(Tulkitse yhteenlasketttavien ensimmäiset tekijät nopeuksiksi ja toiset tekijät peräkkäisten aikavälien pituuksiksi, jolloin sarjojen summat merkitsevät yksikkövälillä kuljettuja matkoja. Havainnollista matkat pylväsdiagrammein ja yritä muodostaaa pylväistä summan suuruinen *rajoiettu* alue. Jälkimmäisen summan tarkka arvo on $1 + \log 2$.)

Oresmen idea havainnollistaa nopeuksia ja muitakin suureita janoilla saattaa muuten olla Aristoteleen peruja, sillä Aristoteleen mukaan suureita ja niiden suhteita tulee tulkita geometrisesti, ei luvuin.

9. Yllätystehtävä: Jos osaat algebraa, laadi *dihedraalisen 6-alkioisen ryhmän* kertotaulu. (Ryhmän alkiot ovat neutraalialkio e ja kahden kirjaimen m ja f muodostamat sanat, joilla pätevät lisäksi relaatiot $f^2 = e$, $m^3 = e$ ja $fmfm = e$.) Jos et osaa algebraa, koeta ottaa selvää, miten tämä asia voi liittyä *Vanuatun saaren polynesialaisten alkuasukkaiden* kulttuuriin. (Jälkimmäinen vaihtoehto on todennäköisesti hankalampi asia kuin ensimmäiseen vaihtoehtoon tarvittavan algebran äkillinen omaksuminen.)

10. Bonustehtävä *Tartaglian* ja *Ferrarin* kilpailusta: Jaa 8 kahden luvun summaksi $x + y$ siten, että $xy(x - y)$ on mahdollisimman suuri. (Et tietenkään saa käyttää differentiaalilaskentaa, koska sitä ei ole vielä keksitty! En osaa itsekään! LK)

11. (Cardano: Ars Magna 1545) Ratkaise

a) $x^3 + 3x = 10$ Cardanon kaavalla.

b) $x^3 = 6x + 6$. Cardanon kaavalla.