

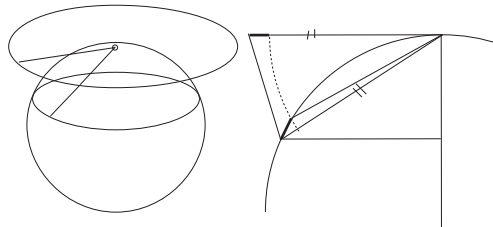


Matemaatiikan historia

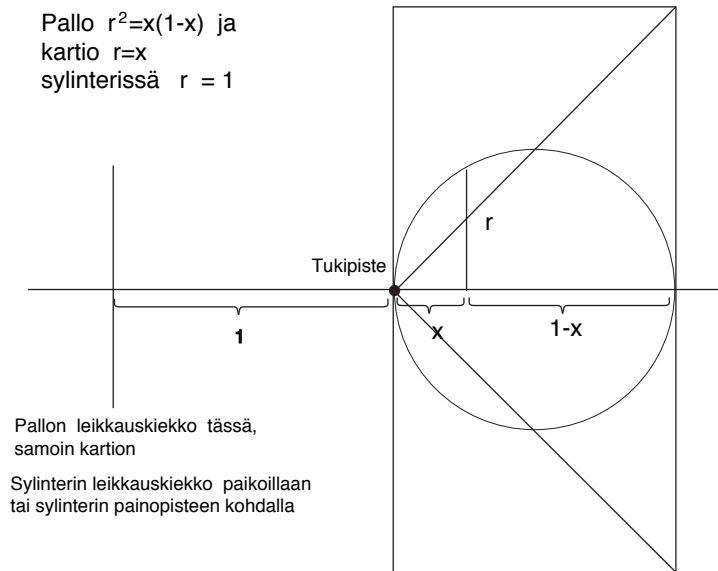
Harjoitus 4 / 2008

RATKAISE SEURAAVISTA 8 kpl

1. Johda Arkhimedeen tulos, jonka mukaan pallon kalotin ala on sama kuin ympyrän, jonka säde on yhtä pitkä kuin kalotin huipusta sen pohjan kehälle ulottuva jana. (Voit tarkistaa tuloksen integroiden. Erikoistapauksena saadaan koko pallon ala!)



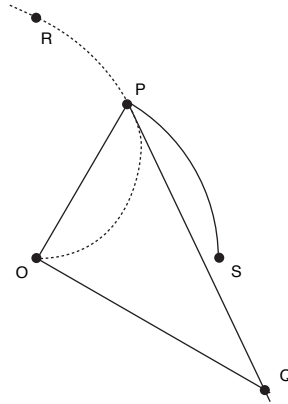
2. Boyerin tehtävä ”Arkhimedes No. 16”: Laske pallosegmentin **tilavuus** joko nykyaikaisella integroinnilla tai Arkhimedeen punnitustekniikalla. (Kirjassa on pieni virhe. Aokuvassa toivottavasti ei.)



3. Miten ympyrä neliöidään Arkhimedeen spiraalin avulla? Koeta käyttää seuraavaa spiraalin tangenttia koskevaa Arkhimedeen tuntemaa tulosta:

(Leikatkaa spiraalin OPR pisteeseen P piirretty tangenti janelle OP pisteeseen O piirretyyn normaalin pisteessä Q . Tällöin pisteen P *subtangenti* eli jana OQ on yhtä pitkä kuin spiralin alkupisteen (ei ”ulkopisteen”, kuten kirjassa lukee) tangentin

(eli napakoordinaatiston akselin) ja suoran OP väliin jäävä O -keskisen OP -säteisen ympyrän kaari.



(jatkoa?) Koeta todistaa em. aputulos modernein keinoin.

4. Laske toruksen tilavuus Pappuksen ja Guldinin säännöllä, joka liittyy pyörähdyskappaleen leikkauspinnan painopisteeseen (johtamatta sitä, ellet itse halua).

5. Selitä miksi ekliptikan (eli maan ratatason) ja päiväntasaajan (tason) välinen kulma (oikeastaan tasojen normaalien välinen kulma) voidaan selvittää mittamalla Jyväskylässä auringon korkeus (= kulma horisontista auringon alareunaan) keskipäivällä juhannuksena ja jouluna. Mitä pitää laskea?

6. Päättele itse, mihin kellonaikaan paikallista aikaa aurinko nousee Helsingissä (60 astetta pohjoista leveyttä) sellaisena päivänä, jona aurinko on keskipäivällä 30 astetta horisontin yläpuolella (Oleta aurinko pisteeksi.)

7. Diofantoksen esimerkki: Etsi kaksi (rationaalista!) neliölukua, joilla on annettu erotus (D:llä 60, entä osaatko yleisesti.).

8. *Kiinalainen jäännösongelma* Mestari Sunin matematiikankirjassa (*Sunzi suanjing* noin vuodelta 300) on seuraava tehtävä, hieman nykyaikaisin sanankääntein ilmaistuna:

Pussissa on karkkeja. Kun niitä jaetaan tasan kolmelle namujen ystävälle, jää pussiin lopulta 2. Jos jateaan 5:lle, jää 3. Jos jaetaan 7:lle, jää 2. Kuinka monta karkkia pussissa on?

Kuinka monta? Esitä moderni ratkaisu.

9. Sunzin ratkaisuohje edelliselle on sanallinen ja moneen kertaan käännetynä seuraavanlainen:

Kun jaetaan komelle ja jäännös on 2, laita (muistiin) 140. Kun jaat viidelle ja jäännös on 3, laita 63. Kun jaat seitsemälle ja jäännös on 2, laita 30. Laske muistiluvut yhteen, niin saat 233. Tästä pois 210 antaa 23.

Sunzi selittää lisää: *Kolmosella jaettaessa laitetaan jokaista jäännöstä kohti muistiin 70, jokaista viitosella jäävää kohti laitetaan 21 ja seitsemällä jaettaessa 15. Jos summa on 106 tai yli, niin poista 105 ja saat tuloksen. Onko oikein? Siinäkö kaikki?*

10. Paljon myöhemmin — Song-dynastian aikana vuonna 1247 - Qin Jiushao julkaisi yleisen menetelmän lineaaristen kongruenssien ratkaisemiseksi. Esimerkki: Veroja kerätään 7 kaupungista, A, B, ... G. Kukin kaupunki joutuu maksamaan N megayania, siis yhtä paljon. Rahat tuodaan A-kaupungista 12 megayanin laatikoissa, B-kaupungista 11 megayanin laatikoissa ...kaupungista G 6 megayanin laatikoissa. Täysien laatikoiden lisäksi A-kaupunki maksaa 10 megayania, D ja G maksavat 4 ja muilta menee tasan. Kuinka paljon veroja kannetaan? Koeta ratkaista. Jos et osaa, koeta selvittää, mikä on vaikeaa.

11. Muinaisen Kiinan yhteiskunta oli keisarikeskeisyydestään huolimatta tavallaan aika demokraattinen ja byrokraattinen: periaatteessa kuka tahansa voi yletä virkahierakiassa kuinka korkealle tahansa suorittamalla virkatutkintoja, jotka pääasiassa edellyttivät klassisen kirjallisuuden tuntemista. Noin vuodesta 200 alkaen tutkintoihin kuului myös mestari Sunin matemaattinen käsikirja *Sunzi suanjing*, jossa esiintyy peruslaskutoimitusten harjoittamisen lisäksi myös kiinalaisen jäänöslauseen klassinen versio, joka oli tehtävänä kierroksella 5.

Kiinalaiset johtuivat lukuteoriaan kalenteria tehdessään. Kiinalaieen kalenteriin kuului mm. 60 päivän jakso ja (melko) luonnollinen kuukausi, jossa tunnetusti on aika tarkkaan 29 ja puoli vuorokautta. Eräänä vuonna (nimeltään Shang yuan) 60 päivän jakson 1päivä, täysikuu ja kevätpäivän tasaus sattuvat samana päivänä. Toistuuko sama tilanne milloinkaan? (Oleta, että vuodessa on $365\frac{1}{4}$ päivää. Käytä yksikkönä neljäsosapäiviä, niin saat kokonaislukuja.)