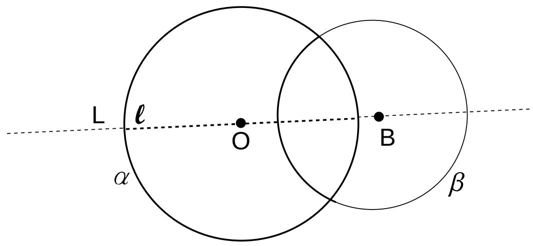
Olkoon C ympyrän γ keskipiste ja c sen säde. Lauseen 4.1.3 nojalla $i(\gamma)$ on ympyrä, jonka keskipiste on $i(C)$ ja säde c. Lauseen 4.1.2 nojalla $CO \cong i(C)i(O)$, joten $\overline{CO} = \overline{i(C)O}$. Siten $P(i(C), \alpha) = \overline{Oi(C)}^2 - 1 = \overline{OC}^2 - 1 = P(C, \alpha) = c^2$, missä viimeinen yhtälö seuraa lauseesta 4.1.11. Käyttäen samaa lausetta toiseen suuntaan nähdään, että $i(\gamma)$ on ortogonaalinen α:n kanssa. Lauseen 4.2.2 nojalla $i(\ell) = i(\mathcal{A} \cap \gamma) = i(\mathcal{A}) \cap i(\gamma) = \mathcal{A} \cap i(\gamma)$, joten $i(\ell)$ on tyyppiä 2 oleva $\mathcal{P}$-suora.

Tapaus b) Oletetaan, että β on ympyrän α kanssa ortogonaalinen ympyrä. Tässäkin on kaksi eri tapausta; joko ℓ on tyyppiä 1 tai tyyppiä 2.

Tapaus b1°) Olkoon ℓ tyyppiä 1. Olkoon B ympyrän β keskipiste ja b sen säde. Olkoon $\ell = \mathcal{A} \cap L$, missä L on O:n kautta kulkeva euklidinen suora. Erotetaan vielä kaksi ala-alatapausta: i) $B \in L$ ja ii) $B \notin L$.

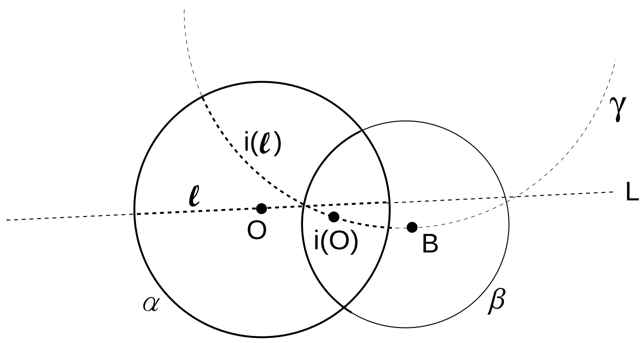
i) Lauseen 4.1.5 nojalla $i(L \setminus \{B\}) = L \setminus \{B\}$, joten $i(\ell) = i(\mathcal{A} \cap (L \setminus \{B\}) = i(\mathcal{A}) \cap i(L \setminus \{B\}) = \mathcal{A} \cap (L \setminus \{B\}) = \mathcal{A} \cap L = \ell$, joka on $\mathcal{P}$-suora.



Kuva 207: β on euklidinen ympyrä, $\ell = \mathcal{A} \cap L$ ja $B \in L$

Tässä käytettiin lausetta 4.1.10, jonka mukaan $\mathcal{A} \cap L = \mathcal{A} \cap (L \setminus \{B\})$ ja lausetta 4.1.12, jonka mukaan $i(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

ii) Olkoon $B \notin L$.

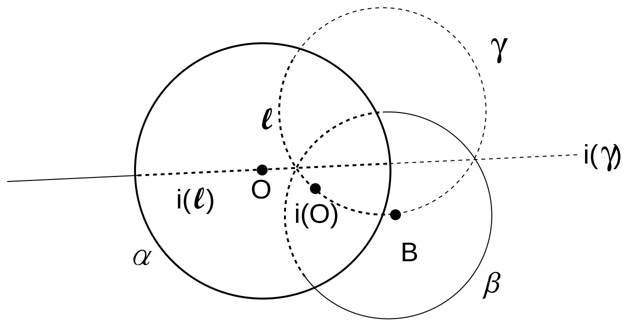


Kuva 208: β on euklidinen ympyrä, $\ell = \mathcal{A} \cap L$ ja $B \notin L$

Lauseen 4.1.6 nojalla $i(L) = \gamma \setminus \{B\}$, missä γ on B:n kautta kulkeva ympyrä. Tällöin $i(\ell) = i(\mathcal{A} \cap L) = i(\mathcal{A}) \cap i(L) = \mathcal{A} \cap \gamma$, joten $i(\ell)$ on $\mathcal{P}$-suora, mikäli γ ja α ovat ortogonaalisia. Olkoon j peilaus α:n suhteen. Koska $B \in \gamma \setminus \alpha$, niin lauseen 3.1.10 nojalla riittää osoittaa, että $j(B) \in \gamma$. Lauseen 4.1.14 mukaan $j(B) = i(O)$. Koska $O \in L$, niin $i(O) \in i(L) \subset \gamma$ ja asia on selvä.

Tapaus b2°) Oletetaan, että ℓ on tyyppiä 2, toisin sanoen $\ell = \mathcal{A} \cap \gamma$, missä γ on α:n kanssa ortogonaalinen ympyrä. Olkoot B ja C ympyröiden β ja γ keskipisteet ja b ja c niiden säteet. Erotetaan tässäkin kaksi alatapausta: i) $B \in \gamma$ ja ii) $B \notin \gamma$.

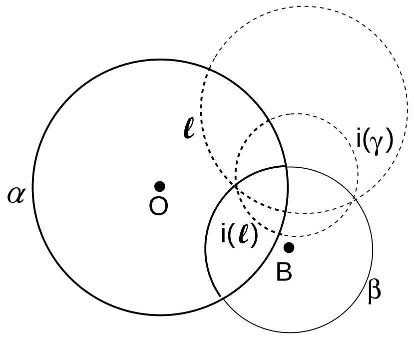
i) Oletetaan, että $B \in \gamma$.



KUVA 209: β ON EUKLIDINEN YMPYRÄ, $\ell = \mathcal{A} \cap \gamma$ JA $B \in \gamma$

Lauseen 4.1.7 nojalla $i(\gamma)$ on suora, josta puuttuu piste B, jolloin $i(\ell) = \mathcal{A} \cap i(\gamma)$ on $\mathcal{P}$-suora, mikäli $i(\gamma)$ kulkee O:n kautta. Olkoon taas j peilaus α:n suhteen, jolloin 4.1.14:n mukaan $j(B) = i(O)$. Koska $B \in \gamma$, niin tällöin $i(O) = j(B) \in j(\gamma)$. Koska α ja γ ovat ortogonaalisia, niin lauseen 4.1.12 nojalla $j(\gamma) = \gamma$ ja siten $i(O) \in \gamma$. Mutta tällöin $O = i(i(O)) \in i(\gamma)$.

ii) Olkoon $B \notin \gamma$. Tällöin lauseen 4.1.15 nojalla $i(\gamma)$ on α:n kanssa ortogonaalinen ympyrä ja $i(\ell) = i(\mathcal{A} \cap \gamma) = i(\mathcal{A}) \cap i(\gamma) = \mathcal{A} \cap i(\gamma)$ on $\mathcal{P}$-suora.



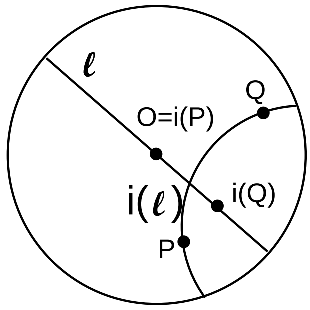
KUVA 210: β ON EUKLIDINEN YMPYRÄ, $\ell = \mathcal{A} \cap \gamma$ JA $B \notin \gamma$

□

Lauseen 4.2.5 avulla voidaan nyt todistaa, että Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H1).

LAUSE 4.2.6. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H1).*

Todistus. Olkoot P ja Q eri $\mathcal{P}$-pisteitä. Osoitetaan, että niiden kautta kulkee tasan yksi $\mathcal{P}$-suora. Lauseen 4.2.3 nojalla on olemassa liike i siten, että $i(P) = O$. Pisteiden $i(Q)(\neq i(P) = O)$ ja O kautta kulkee euklidinen suora L. Tällöin $\ell = \mathcal{A} \cap L$ on $\mathcal{P}$-suora ja pisteet O ja $i(Q)$ ovat $\mathcal{P}$-suoralla ℓ. Lauseen 4.2.5 nojalla $i(\ell)$ on $\mathcal{P}$-suora ja $P = i(i(P)) = i(O)$ ja $Q = i(i(Q)) \in \ell$.

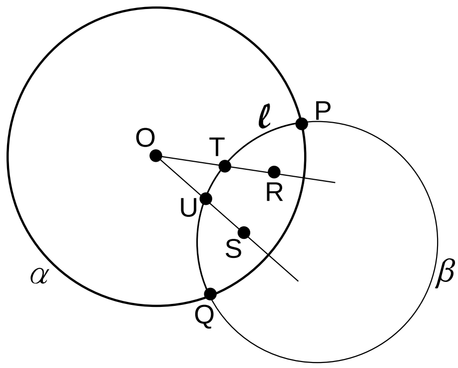


KUVA 211: POINCARÉN MALLI TOTEUTTAA AKSIOOMAN (H1)

Pitää vielä osoittaa $\mathcal{P}$-suoran yksikäsitteisyys. Olkoon m toinen $\mathcal{P}$-suora, joka kulkee P:n ja Q:n kautta. Tällöin lauseen 4.2.5 nojalla $i(m)$ on $\mathcal{P}$-suora, joka kulkee O:n ja $i(Q)$:n kautta. Lauseen 4.2.4 nojalla $i(m)$ on tyyppiä 1, siis muotoa $i(m) = \mathcal{A} \cap M$, missä M on euklidinen suora. Nyt M ja L kulkevat pisteiden O ja $i(Q)$ kautta, joten on $M = L$. Siten $i(m) = \mathcal{A} \cap M = \mathcal{A} \cap L = \ell$ ja edelleen $m = i(i(m)) = i(\ell)$. □

LAUSE 4.2.7. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H2).*
Todistus. Olkoon ℓ $\mathcal{P}$-suora. Osoitetaan, että ℓ:llä on ainakin kaksi pistettä. Jos ℓ on tyyppiä 1, niin $\ell = \mathcal{A} \cap L$, missä L on origon kautta kulkeva euklidinen suora. L leikkaa origokeskistä $\frac{1}{2}$-säteistä ympyrää lauseen 2.6.6 mukaan kahdessa eri pisteessä, jotka ovat $\mathcal{P}$-pisteitä ja myös suoran ℓ pisteitä.

Jos taas ℓ on tyyppiä 2, niin $\ell = \mathcal{A} \cap \beta$, missä β on α:n kanssa ortogonaalinen euklidinen ympyrä. Olkoot P ja Q ortogonaalisten ympyröiden α ja β leikkauspisteet.

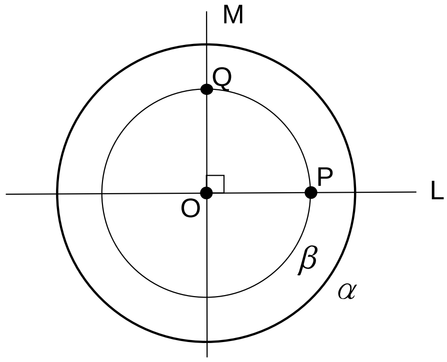


KUVA 212: POINCARÉN MALLI TOTEUTTAA AKSIOOMAN (H2)

Euklidiselta janalta PQ voidaan valita eri pisteet R, S ($\neq P, Q$). Lauseen 2.6.5 nojalla R ja S ovat ympyrän α sisällä. Lauseen 2.6.2 nojalla OR ja OS leikkaavat ympyrää β pisteissä T ja U, joilla $O * T * R$ ja $O * U * S$. Lauseen 2.6.5 nojalla U ja T ovat $\mathcal{P}$-pisteitä, välttämättä eri pisteitä ja U ja T ovat $\mathcal{P}$-suoralla ℓ. □

LAUSE 4.2.8. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H3).*
Todistus. Etsitään Poincarén mallista kolme pistettä, jotka eivät ole samalla $\mathcal{P}$-suoralla. Yhdeksi pisteeksi otetaan keskipiste O. Muut valitaan näin: Olkoon β O-keskinen $\frac{1}{2}$-säteinen ympyrä ja L jokin O:n kautta kulkeva euklidinen suora.

Lauseen 2.6.6 nojalla L leikkaa β:aa pisteessä P ja P on $\mathcal{P}$-piste. Olkoon M pisteen O kautta kulkeva L:n normaali. Se leikkaa myös β:aa; olkoon leikkauspiste Q, joka on $\mathcal{P}$-piste.



Kuva 213: Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H3)

Nyt pisteiden O, P ja Q kautta ei kulje mitään $\mathcal{P}$-suoraa, sillä 4.2.4:n nojalla sen tulisi olla tyyppiä 1, mikä ei ole mahdollista, sillä O, P ja Q eivät ole samalla euklidisella suoralla. □

Huomautus 43. Lauseesta 4.2.6 seuraa välittömästi, että pisteiden A ja B hyperbolinen etäisyys on yksikäsitteisesti määritelty. Lisäksi $d(A,B) = d(B,A)$, sillä

$$d(A,B) = \left|\log \frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}}\right| = \left|-\log \frac{1}{\frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}}}\right| = \left|\log \frac{\overline{BP}\,\overline{AQ}}{\overline{BQ}\,\overline{AP}}\right| = d(B,A).$$

Näin myös hyperboliseen etäisyyteen perustuvat välissäolon ja yhtenevyyden määritelmät ovat järkeviä. Tämän huomion jälkeen voidaan lähteä todistamaan seuraavia aksioomia. (H4) on helppo:

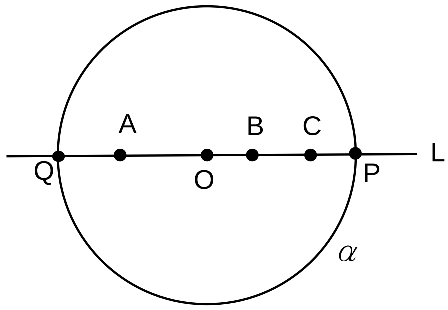
LAUSE 4.2.9. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H4).*

Todistus. Olkoon $A*B*C$. Määritelmän mukaan A, B ja C ovat samalla suoralla ja $d(A,B)+d(B,C) = d(A,C)$. Tällöin myös $d(C,B)+d(B,A) = d(C,A)$ eli $C*B*A$. □

Muut välissäoloaksioomat ovat vähän vaikeampia verifioitavia. Ne todistetaan siirtämällä tarkastelu tyyppiä 1 olevalle suoralle. Tätä varten todistetaan ensin pari aputulosta.

LAUSE 4.2.10. *Jos ℓ on tyyppiä 1 oleva $\mathcal{P}$-suora ja $A, B, C \in \ell$, niin $A*B*C$ Poincarén mallin mielessä, jos ja vain jos $A*B*C$ euklidisessa mielessä.*

Todistus. Käytetään tässä selvyyden vuoksi merkintää $A \circ B \circ C$, kun B on A:n ja C:n välissä Poincarén mallin mielessä, so., kun $d(A,B)+d(B,C) = d(A,C)$. Olkoot P ja Q $\mathcal{P}$-suoran ℓ ”päätepisteet” eli α:n ja L:n leikkauspisteet, missä $\ell = \mathcal{A} \cap L$.



Kuva 214: $A * B * C$ Poincarén mallin mielessä

1°: Oletetaan aluksi $A \circ B \circ C$. Tämä merkitsee, että $d(A,B)+d(B,C) = d(A,C)$ eli

$$(*) \qquad \left|\log \frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}}\right| + \left|\log \frac{\overline{BP}\,\overline{CQ}}{\overline{BQ}\,\overline{CP}}\right| = \left|\log \frac{\overline{AP}\,\overline{CQ}}{\overline{AQ}\,\overline{CP}}\right|.$$

Muuttamalla tarvittaessa merkintöjä ($P \leftrightarrow Q$) voidaan olettaa, että $Q * A * C$, jolloin $A * C * P$ ja siten $\overline{CQ} > \overline{AQ}$ ja $\overline{AP} > \overline{CP}$. Tällöin $\frac{\overline{AP}\,\overline{CQ}}{\overline{AQ}\,\overline{CP}} > 1$ ja siis $\log \frac{\overline{AP}\,\overline{CQ}}{\overline{AQ}\,\overline{CP}} > 0$, joten

$$\left|\log \frac{\overline{AP}\,\overline{CQ}}{\overline{AQ}\,\overline{CP}}\right| = \log \frac{\overline{AP}\,\overline{CQ}}{\overline{AQ}\,\overline{CP}} = \log\left(\frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BP}\,\overline{CQ}}{\overline{BQ}\,\overline{CP}}\right) = \log \frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}} + \log \frac{\overline{BP}\,\overline{CQ}}{\overline{BQ}\,\overline{CP}}.$$

Siksi $(*)$ voi toteutua ainoastaan, mikäli alemmassa kaavassa kaikki yhteenlaskettavat ovat positiivisia eli kun

$$\frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}} > 1 \text{ ja } \frac{\overline{BP}\,\overline{CQ}}{\overline{BQ}\,\overline{CP}} > 1.$$

Olemme todistamassa, että $A * B * C$. Tälle riittää lauseen 2.3.4 nojalla, että $Q * A * B$ ja $Q * B * C$. Koska A ja B ovat ympyrän γ sisäpuolellaja $Q \in \gamma$, niin joko $Q * A * B$ tai $Q * B * A$. Jos olisi $Q * B * A$, niin $B * A * P$ ja $\overline{QB} < \overline{QA}$ ja $\overline{BP} > \overline{AP}$ ja tällöin olisi $\frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}} < 1$, ja näinhän ei ole. On siis oltava $Q * A * B$. Vastaavasti päätellään, että on $Q * B * C$ ja siis todella $A * B * C$.

2°: Oletetaan seuraavaksi, että $A*B*C$. Kuten edellisessä tarkastelussa nähdään nytkin, että (kun $Q * A * C$) kaavan $(*)$ logaritmit ovat positiivisia, joten $(*)$ pätee suoraan logaritmin ominaisuuden $\log(xy) = \log x + \log y$ nojalla ja siten $A \circ B \circ C$. □

Seuraava lause sanoo, että liikkeet ovat Poincarén mallin "isometrisia isomorfismeja", toisin sanoen että ne säilyttävät pisteiden väliset etäisyydet. Tämä on hyvin merkityksellistä, koska välissäolo ja yhtenevyyskäsitteet on määritelty etäisyyden avulla ja nekin siis säilyvät liikkeissä.

LAUSE 4.2.11. *Olkoon i liike ja A, B, C eri $\mathcal{P}$-pisteitä. Tällöin*

$$d(A,B) = d(i(A), i(B)).$$

Lisäksi pätee $A * B * C$, jos ja vain jos $i(A) * i(B) * i(C)$.

Todistus. Olkoon ℓ pisteiden A ja B kautta kulkeva $\mathcal{P}$-suora, $\ell = \mathcal{A} \cap \beta$, missä β on euklidinen suora tai ympyrä. Olkoot P ja Q suoran ℓ ”päätepisteet”, so. $\{P, Q\} = \alpha \cap \beta$, jolloin $i(P)$ ja $i(Q)$ ovat samassa mielessä $i(\ell)$:n päätepisteet. Olkoon i peilaus γ:n suhteen. Jos γ on suora, niin lauseen 4.1.2 nojalla i säilyttää euklidisten janojen pituudet, joten tietenkin

$$\frac{\overline{i(A)i(P)}\;\overline{i(B)i(Q)}}{\overline{i(A)\,i(Q)}\;\overline{i(B)i(P)}} = \frac{\overline{AP}\;\overline{BQ}}{\overline{AQ}\;\overline{BP}}$$

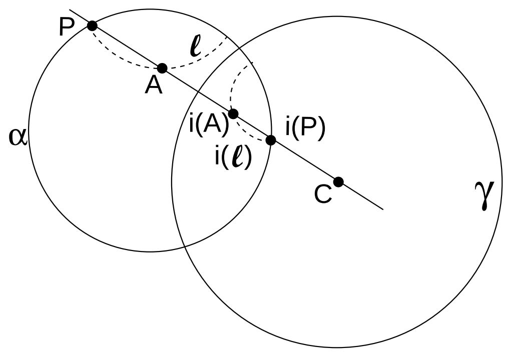
eli $d(i(A), i(B)) = d(A, B)$.

Voidaan siis olettaa, että γ on ympyrää α vastaan ortogonaalinen ympyrä, sen keskipiste C ja säde c. Osoitetaan, että

$$(*) \qquad \overline{i(A)i(P)} = \frac{c^2}{\overline{AC}\;\overline{CP}}\,\overline{AP}.$$

Tässä on kaksi mahdollisuutta: joko a) C, A ja P ovat samalla euklidisella suoralla tai b) ne eivät ole.

Tapaus a) Jos tutkittavat pisteet ovat samalla euklidisella suoralla, niin joko $C * A * P$ tai sitten $C * P * A$, sillä tapaus $A * C * P$ ei tule kysymykseen, koska jana AP on ympyrän α sisällä, mutta C sen ulkopulella.



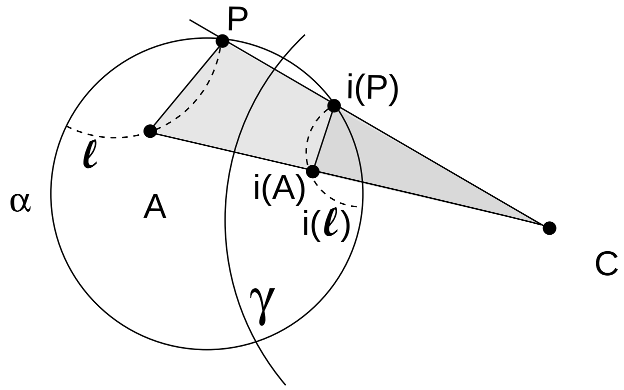
Kuva 215: Tapaus a) $C * A * P$

Tapauksessa $C*A*P$ saadaan $C*i(P)*i(A)$ ja kaava $(*)$ saadaan siis laskemalla

$$\overline{i(A)i(P)} = \overline{Ci(A)} - \overline{Ci(P)} = \frac{c^2}{\overline{CA}} - \frac{c^2}{\overline{CP}} = c^2\left(\frac{\overline{CP} - \overline{CA}}{\overline{CA}\cdot\overline{CP}}\right) = \frac{c^2}{\overline{AC}\;\overline{CP}} \cdot \overline{AP}.$$

Tapauksessa $C * P * A$ toimii vastaava päättely, merkkejä vaihtamalla.

Tapaus b) Kun C, A ja P eivät ole samalla suoralla, niin $\triangle ACP$ on kolmio, samoin $\triangle i(P)Ci(A)$, ja kulmat $\measuredangle ACP$ ja $\measuredangle i(P)C\,i(A)$ ovat yhtenevät.



KUVA 216: TAPAUS b) $\triangle ACP$ ON KOLMIO

Koska $\overline{Ci(A)} = \frac{b^2}{\overline{CA}}$ ja $\overline{Ci(P)} = \frac{b^2}{\overline{CP}}$, niin $\frac{\overline{Ci(A)}}{\overline{Ci(P)}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}}$. Tästä voidaan päätellä kosinilauseen avulla kuten lauseen 4.1.15 todistuksessa, että kolmiot $\triangle ACP$ ja $\triangle i(P)Ci(A)$ ovat samanmuotoiset. Tällöin on 3.1.10:n nojalla $\frac{\overline{i(A)i(P)}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{i(P)C}}{\overline{AC}} = \frac{c^2}{\overline{AC}\,\overline{CP}}$, joten

$$\overline{i(A)i(P)} = \frac{c^2}{\overline{AC}\,\overline{CP}} \cdot \overline{AP},$$

eli kaava $(*)$ pätee myös tapauksessa b).

Analogisesti kaavan $(*)$ kanssa saadaan vastaavanlaiset kaavat

$$\overline{i(A)i(Q)} = \frac{c^2}{\overline{ACCQ}} \cdot \overline{AQ},$$
$$\overline{i(B)i(P)} = \frac{c^2}{\overline{BCCP}} \cdot \overline{BP} \quad \text{ja}$$
$$\overline{i(B)i(Q)} = \frac{c^2}{\overline{BCCQ}} \cdot \overline{BQ}.$$

Varsinainen väite $d(i(A), i(B)) = d(A, B)$ saadaan yhdistämällä nämä:

$$\frac{\overline{i(A)i(P)} \cdot \overline{i(B)i(Q)}}{\overline{i(A)i(Q)} \cdot \overline{i(B)i(P)}} = \frac{\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}\cdot\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BCCQ}}}{\frac{\overline{AQ}}{\overline{ACCQ}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BCCP}}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}}.$$

Lauseen lisäväite seuraa nyt suoraan välissäolon määritelmästä ja lauseesta 4.2.5. □

LAUSE 4.2.12. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H5).*
Todistus. Olkoot A ja B eri $\mathcal{P}$-pisteitä ja ℓ niiden kautta kulkeva $\mathcal{P}$-suora. Pitää osoittaa, että ℓ:ltä löytyy pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$. Lauseen 4.2.3 nojalla on olemassa liike i siten, että $i(A) = O$. Lauseen 4.2.5 mukaan $i(\ell)$ on $\mathcal{P}$-suora ja lauseen 4.2.4 mukaan tyyppiä 1, eli $i(\ell) = \mathcal{A} \cap L$,

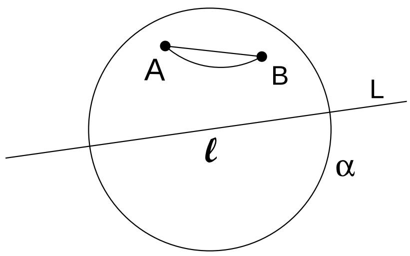
missä L on euklidinen suora. Olkoot $P, Q \in \alpha \cap L$ siten, että $P * O * i(B)$ ja $O * i(B) * Q$ euklidisessa mielessä. Valitaan pisteet R, S ja T siten, että $P * R * O$, $O * S * i(B)$ ja $i(B) * T * Q$. Tällöin R, S ja T ovat $\mathcal{P}$-pisteitä ja ne toteuttavat ehdot $R * O * i(B)$ ja $O * i(B) * T$. Lauseen 4.2.10 nojalla $R * O * i(B)$, $O * S * i(B)$ ja $O * i(B) * T$ myös $\mathcal{P}$-mielessä. Tällöin lauseen 4.2.11 mukaan $i(R) * i(O) * i(i(B))$, $i(O) * i(S) * i(i(B))$ ja $i(O) * i(i(B)) * i(T)$. Koska $i(i(B)) = B$ ja $i(O) = A$, niin $i(R)$, $i(S)$ ja $i(T)$ kelpaavat haetuiksi pisteiksi C, D ja E. $\square$

LAUSE 4.2.13. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H6).*

Todistus. Olkoot A, B ja C eri $\mathcal{P}$-pisteitä $\mathcal{P}$-suoralla ℓ. Kuten lauseen 4.2.12 todistuksessa valitaan liike i s.e. $i(A) = O$, jolloin $i(\ell)$ on tyyppiä 1 oleva $\mathcal{P}$-suora. Tällöin täsmälleen yksi ehdoista $i(A)*i(B)*i(C)$, $i(B)*i(A)*i(C)$ ja $i(A)*i(C)*i(B)$ on voimassa euklidisessa mielessä ja siten lauseen 4.2.10 nojalla myös $\mathcal{P}$-mielessä. Lauseen 4.2.11 nojalla siis $\mathcal{P}$-mielessä täsmälleen yksi ehdoista $A * B * C$, $B * A * C$ ja $A * C * B$ on voimassa. $\square$

Aksiooman (H7) todistamiseksi tarvitaan aputulos.

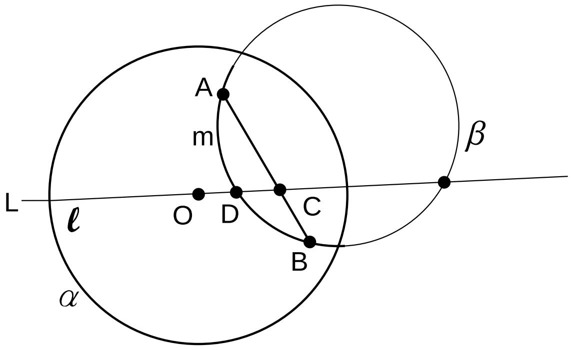
LAUSE 4.2.14. *Olkoon $\ell = \mathcal{A} \cap L$ tyyppiä 1 oleva $\mathcal{P}$-suora. Tällöin $\mathcal{P}$-pisteet $A, B \notin \ell$ ovat samalla puolella suoraa ℓ $\mathcal{P}$-mielessä, jos ja vain jos ne ovat samalla puolella euklidista suoraa L euklidisessa mielessä.*



KUVA 217: SAMALLA PUOLELLA 1. TYYPIN $\mathcal{P}$-SUORAA ℓ

Todistus. 1°: Olkoot A ja B samalla puolella ℓ:ää $\mathcal{P}$-mielessä, ts. oletetaan, että A:n ja B:n välinen hyperbolinen eli $\mathcal{P}$-jana ei leikkaa suoraa ℓ. Pitää osoittaa, että A:n ja B:n välinen euklidinen jana ei leikkaa L:ää. Olkoon m pisteiden A ja B kautta kulkeva $\mathcal{P}$-suora ja AB pisteiden A ja B välinen euklidinen jana.

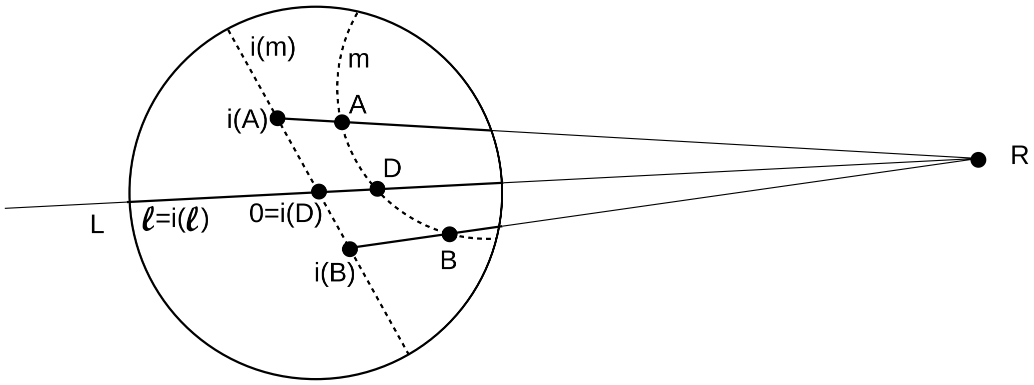
Antiteesi: AB leikkaa L:ää ja siis myös ℓ:ää pisteessä C. Jos m on tyyppiä 1, niin lauseen 4.2.10 nojalla AB on myös A:n ja B:n välinen $\mathcal{P}$-jana, joten joudutaan ristiriitaan oletuksen kanssa. Voidaan siis olettaa, että m on tyyppiä 2: $m = \mathcal{A} \cap \beta$, missä β on α:a vastaan ortogonaalinen ympyrä. On osoitettava, että m ja ℓ leikkaavat toisensa. Teemme sen seuraavasti:



Kuva 218: m ja ℓ leikkaavat

Lauseesta 2.6.5 seuraa, että C on β:n sisäpuolella, joten 2.6.6:n nojalla suora L leikkaa β:aa kahdessa pisteessä P ja Q. Ei voi olla $P \in \alpha$, sillä silloin 4.1.9:n nojalla L olisi β:n tangentti ja leikkauspisteitä olisi siis vain yksi. Siis $P \notin \alpha$. Jos merkitään peilausta α:n suhteen j:llä, niin 4.1.12:n mukaan $j(P) \in \beta$ ja joko P tai $j(P) \in \mathcal{A}$. Siten joko P tai $j(P)$ on ℓ:n ja m:n leikkauspiste, jollainen siis on olemassa.

Merkitään ℓ:n ja m:n leikkauspistettä D:llä. Koska m on tyyppiä 2, niin lauseen 4.2.4 nojalla $D \neq O$. Tällöin lauseen 4.2.3 mukaisesti on olemassa liike i siten, että $i(D) = O$. Tällöin sekä $i(\ell)$ että $i(m)$ kulkevat O:n kautta ja ovat siten 4.2.4:n ja 4.2.5:n mukaisesti tyyppiä 1 olevia suoria. Tämä on 4.1.3:n nojalla mahdollista vain, kun i on ympyräpeilaus ja 4.1.6:n mukaan peilausympyrän keskipiste R sisältyy suoraan L. Koska $i(A) \in \overrightarrow{RA}$, niin $A\,i(A)L$ euklidisessa mielessä ja vastaavasti $Bi(B)L$. Antiteesin nojalla ALB, joten $i(A)Li(B)$ eli $i(A)$:n ja $i(B)$:n välinen euklidinen jana leikkaa suoraa L.



Kuva 2191: Leikkauspiste on O

Toisaalta $i(A), i(B) \in i(m)$, joka on tyyppiä 2, joten $i(A)$:n ja $i(B)$:n välinen $\mathcal{P}$-jana on sama kuin euklidinen (4.2.10), joten tämä $\mathcal{P}$-jana leikkaa L : ää. Ainoa mahdollinen leikkauspiste on O eli $i(D)$. Siten $i(A)*i(D)*i(B)$ on totta $\mathcal{P}$-mielessä. Tällöin 4.2.11:n nojalla $A * D * B$ pätee $\mathcal{P}$-mielessä ja koska $D \in \ell$, niin $A\ell B$ olisi totta $\mathcal{P}$-mielessä, mikä on ristiriita.

2° : Olkoot A ja B euklidisessa mielessä samalla puolella suoraa L.

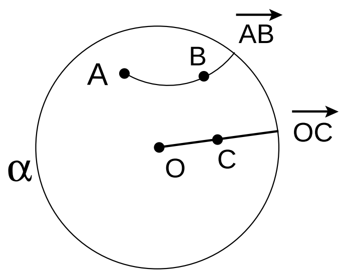
Antiteesi: A:n ja B:n välinen $\mathcal{P}$-jana leikkaa ℓ:ää pisteessä D. Valitaan taas liike i siten, että $i(D) = 0$, jolloin taas$i$ on ympyräpeilaus ja peilausympyrän keskipiste

$R \in L$. Taas $A\,i(A)L$ ja $Bi(B)L$, joten nyt oletuksen nojalla $i(A)i(B)L$. Koska $A{*}D{*}B$ $\mathcal{P}$-mielessä, niin $i(A){*}i(D){*}i(B)$ $\mathcal{P}$-mielessä ja myös euklidisessa mielessä, koska $i(m)$ on taas tyyppiä 1. Koska $i(D) = O \in L$, niin tällöin $i(A)Li(B)$, ja on taas saatu ristiriita. □

LAUSE 4.2.15. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H7).*
Todistus. Valitaan (H7):n oletusten suoralta ℓ jokin piste ja kuvataan se sopivalla liikkeellä i origoon O, jolloin $i(\ell)$ on tyyppiä 1. Väite seuraa nyt suoraan lauseesta 4.2.14, sillä 4.2.11:n nojalla $AB\ell$, jos ja vain jos $i(A)i(B)i(\ell)$. □

Yhtenevyysaksioomia varten todistetaan taas aputulos:

LAUSE 4.2.16. *Olkoon $\overrightarrow{AB}$ $\mathcal{P}$-puolisuora ja $C \neq O$ $\mathcal{P}$-piste. Tällöin on olemassa kuvaus f, joka on yhdistetty kuvaus liikkeistä s.e. $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OC}$, missä $\overrightarrow{OC}$ on $\mathcal{P}$-puolisuora.*



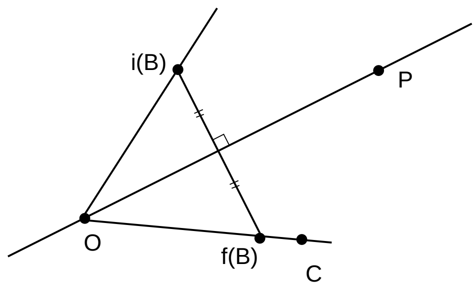
KUVA 220: $\mathcal{P}$-PUOLISUORAN SIIRTO ORIGOSTA ALKAVAKSI

Todistus. Lauseen 2.3.5 nojalla on olemassa liike i siten, että $i(A) = O$. Puomilauseen 2.3.11 mukaan $i(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{i(A)i(B)} = \overleftrightarrow{Oi(B)}$. Nyt sekä $\mathcal{P}$-suora $\overleftrightarrow{OC}$ että $\mathcal{P}$-suora $\overleftrightarrow{Oi(B)}$ ovat tyyppiä 1, joten $\mathcal{P}$-puolisuora $\overrightarrow{OC}$ on joukko $\overrightarrow{OC}^E \cap \mathcal{A}$, missä $\overrightarrow{OC}^E$ on euklidinen puolisuora ja vastaavasti $\overrightarrow{Oi(B)} = \overrightarrow{Oi(B)}^E \cap \mathcal{A}$.

a) Jos nyt $i(B) \in \overrightarrow{OC}$, niin $\overrightarrow{Oi(B)} = \overrightarrow{OC}$ lauseen 2.3.8 nojalla ja asia on selvä; voidaan asettaa $f = i$.

b) Jos $i(B) * O * C$, niin yhdistetään liikkeeseen i peilaus j O:n kautta kulkevan $\overrightarrow{OC}^E$:n normaalin suhteen, jolloin j on liike, ja asettamalla $f = j \circ i$ saadaan $f(B) \in \overrightarrow{OC}$, mistä väite taas seuraa.

c) Muussa tapauksessa $\measuredangle i(B)OC$ on (euklidinen) kulma.

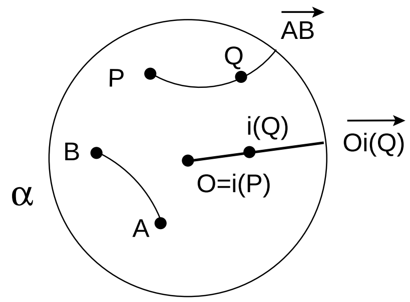


KUVA 221: KULMAN PEILAUS PUOLITTAJAN SUHTEEN VAIHTAA KYLJET

Olkoon $\overrightarrow{OP}$ sen puolittaja ja $L = \overleftrightarrow{OP}$ sekä j peilaus L:n suhteen. Asettamalla $f = j \circ i$ saadaan taas $f(B) \in \overrightarrow{OC}$; tämähän seuraa SKS- säännöstä. Väite seuraa! $\square$

LAUSE 4.2.17. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H8).*

Todistus. Olkoot $A \neq B$ ja olkoon $\overrightarrow{PQ}$ puolisuora. Pitää osoittaa, että on olemassa yksikäsitteinen $R \in \overrightarrow{PQ} \setminus \{P\}$ siten, että $AB \cong PR$. Valitaan liike i siten, että $i(P) = O$. Lauseen 4.2.16 nojalla on olemassa liikkeiden yhdistelmä f siten, että $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{Oi(Q)}$. Määritellään $g = i \circ f$, jolloin $g(\overrightarrow{AB}) = i(\overrightarrow{Oi(Q)}) = i(\overrightarrow{i(P)i(Q)}) = i(i(\overrightarrow{PQ})) = \overrightarrow{PQ}$.



KUVA 222: LAUSEEN 4.2.17 TODISTUS

Lauseen 4.2.11 nojalla g säilyttää hyperboliset etäisyydet, joten $d(A, B) = d(g(A), g(B)) = d(P, g(B))$, joten $g(B) \in \overrightarrow{PQ}$ on haettu piste R, sillä $AB \cong Pg(B)$ määritelmän mukaan.

Toista tällaista pistettä $R \in \overrightarrow{PQ}$ ei voi olla. Jos nimittäin $R \neq g(B)$ olisi sellainen, niin $d(A, B) = d(P, R)$, joten lauseen 4.2.11 nojalla $d(O, i(R)) = d(O, f(B))$.

Toisaalta mielivaltaisen pisteen $S \neq O$ hyperbolinen etäisyys O:sta osataan laskea. Jos nimittäin T ja U ovat tyyppiä 1 olevan $\mathcal{P}$-suoran $\overleftrightarrow{OS}$ ”päätepisteet”, $T * O * S$, $O * S * U$, niin

$$d(O, S) = \left| \log \frac{\overline{OT}\,\overline{SU}}{\overline{OU}\,\overline{ST}} \right| = \left| \log \frac{1 \cdot (1 - \overline{OS})}{1 \cdot (1 + \overline{OS})} \right| = -\log \frac{1 - \overline{OS}}{1 + \overline{OS}}.$$

Soveltamalla tätä lauseketta saa ehto $d(Oi(R)) = d(O, f(B))$ muodon

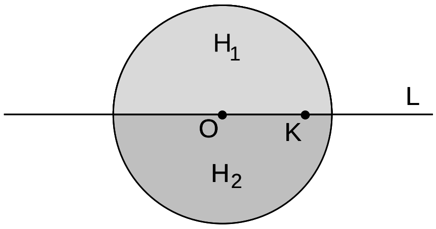
$$-\log \frac{1 - \overline{Oi(R)}}{1 + \overline{Oi(R)}} = -\log \frac{1 - \overline{Of(B)}}{1 + \overline{Of(B)}},$$

josta edelleen $\overline{Oi(R)} = \overline{Of(B)}$. Koska $i(R)$ ja $f(B)$ kuuluvat samalle **euklidiselle** puolisuoralle $\overrightarrow{Oi(Q)}$ täytyy olla $i(R) = f(B)$, koska euklidinen malli toteuttaa Hilbertin aksiooman (H8). Tällöin kuitenkin $R = i(i(R)) = i(f(B)) = g(B)$, mikä antaa ristiriidan. $\square$

%pagebreak

LAUSE 4.2.18. *Poincarén malli toteuttaa aksioomat (H9) ja (H10).*
Todistus. Nämä aksioomat ovat suora seuraus määritelmästä. □

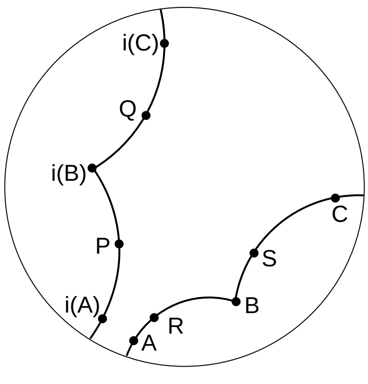
Aksioomia (H11)–(H13) varten kiinnitetään ensin seuraavat merkinnät: Olkoon $K \neq O$ $\mathcal{P}$-piste. $\mathcal{P}$-suora $\overleftrightarrow{OK}$ on tyyppiä 1 ja se jakaa $\mathcal{P}$-pisteet kahteen puolitasoon H_1 ja H_2, jotka ovat lauseen 4.2.14 perusteella joukkoja $\mathcal{A} \cap H_1'$ ja $\mathcal{A} \cap H_2'$, missä H_1' ja H_2' ovat euklidisen suoran L, jolla $\overleftrightarrow{OK} = \mathcal{A} \cap L$, määräämät puolitasot.



KUVA 223: $\mathcal{P}$-PUOLITASOT

LAUSE 4.2.19. *Liike säilyttää $\mathcal{P}$-kulmat, ts. jos i on liike ja $\measuredangle ABC$ on $\mathcal{P}$-kulma, niin $\measuredangle i(A)i(B)i(C) \cong \measuredangle ABC$.*

Todistus. Olkoon $P \in \overrightarrow{i(B)i(A)}$, $Q \in \overrightarrow{i(B)i(C)}$, $R \in \overrightarrow{RA}$, $S \in \overrightarrow{BC}$ siten, että $i(B)P \cong BR$ ja $i(B)Q \cong BS$. Lauseen 4.2.11 nojalla $BR \cong i(B)i(R)$ ja $i(R) \in i(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{i(B)i(A)}$. Nyt myös $P \in \overrightarrow{i(B)i(A)}$ ja $i(B)P \cong i(B)i(R)$. Aksiooman (H8) voimassaolon ilmaisevan lauseen 4.2.17 yksikäsitteisyyspuolen nojalla täytyy olla $P = i(R)$. Vastaavasti on oltava $Q = i(S)$. Tällöin $PQ = i(R)i(S)$. Lauseen 4.2.11 mukaan $i(R)i(S) \cong RS$, joten $PQ \cong RS$ ja väite seuraa määritelmän mukaisesti. □



KUVA 224: LIIKE SÄILYTTÄÄ KULMAT

Määritelmä 4.6. Sanotaan, että $\{P \mid d(A,P) = p\}$, missä A on $\mathcal{P}$-piste ja p positiiviluku, on *$\mathcal{P}$-ympyrä.* A on sen *$\mathcal{P}$-keskipiste* ja p sen *$\mathcal{P}$-säde.*

LAUSE 4.2.20. *Jokainen $\mathcal{P}$-ympyrä on euklidinen ympyrä. $\mathcal{P}$-keskipiste* **ei** *kuitenkaan ole välttämättä sama kuin euklidinen. Tarkemmin:*

(1) *Jos β on $\mathcal{P}$-ympyrä, jonka $\mathcal{P}$-keskipiste on O ja $\mathcal{P}$-säde p, niin β on myös euklidinen ympyrä, jonka euklidinen keskipiste on O ja säde $\frac{e^p-1}{e^p+1}$.*

(2) *Jos taas β:n $\mathcal{P}$-keskipiste on $B \neq O$, niin β on euklidinen ympyrä, jonka keskipiste E on puolisuoralla $\overrightarrow{OB}$ siten, että*

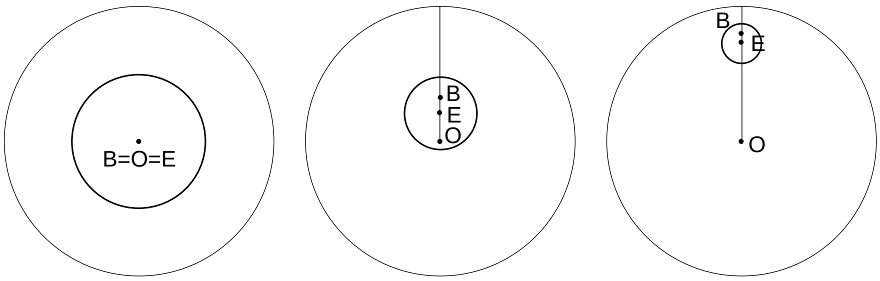
$$\overline{OE} = \frac{\overline{OB}(1-r^2)}{1-\overline{OB}^2 r^2}$$

ja säde

$$b = \frac{r(1-\overline{OB}^2)}{1-\overline{OB}^2 r^2},$$

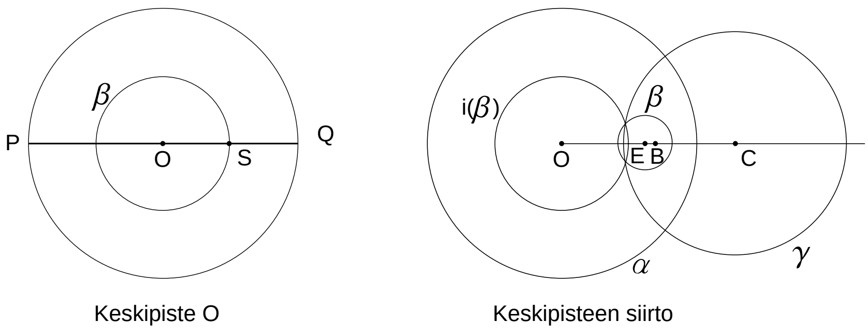
missä $r = \frac{e^p-1}{e^p+1}$.

Huomautus 44. Jollei B ole mallia edustavan ympyrän α keskipiste O, niin $\overline{OE} < \overline{OB}$, joten $O * E * B$. Lisäksi, kun $\overline{OB} \to 1$ eli kun B lähestyy mallia edustavan ympyrän α kehää, niin $\overline{OE} \to 1$ eli E lähestyy myös α:n kehää ja $b \to 0$. Siis jos $\mathcal{P}$-ympyrän β keskipiste on lähellä ympyrän α kehää, niin $\mathcal{P}$-ympyrä on euklidisessa mielessä pieni ympyrä.



Kuva 225: Samasäteisiä $\mathcal{P}$-ympyröitä

Lauseen 4.2.20 todistus Olkoon aluksi β:n keskipiste O. Olkoon $S \neq O$ jokin $\mathcal{P}$-piste ja $P, Q \in \alpha$ $\mathcal{P}$-suoran $\overleftrightarrow{OS}$ päätepisteet siten, että $P * O * S$ ja $O * S * Q$



Kuva 226: Lauseen 4.2.20 todistus

Tällöin $\overline{OP} = \overline{OQ} = 1$ ja $\overline{PS} = \overline{PO} + \overline{OS} = 1 + \overline{OS}$ ja $\overline{SQ} = \overline{OQ} - \overline{OS} = 1 - \overline{OS}$. Siten

$$d(O,S) = \left|\log \frac{\overline{OP}\,\overline{SQ}}{\overline{OQ}\,\overline{SP}}\right| = \left|\log \frac{1-\overline{OS}}{1+\overline{OS}}\right| = \log \frac{1+\overline{OS}}{1-\overline{OS}}.$$

Nyt saadaan $S \in \beta \iff d(O,S) = p \iff \log \frac{1+\overline{OS}}{1-\overline{OS}} = p \iff \frac{1+\overline{OS}}{1-\overline{OS}} = e^p \iff \overline{OS} = \frac{e^p-1}{e^p+1}$, joten $\beta = \{S \mid \overline{OS} = \frac{e^p-1}{e^p+1}\}$, ja tämä on O-keskinen euklidinen ympyrä, jonka säde on $r = \frac{e^p-1}{e^p+1}$.

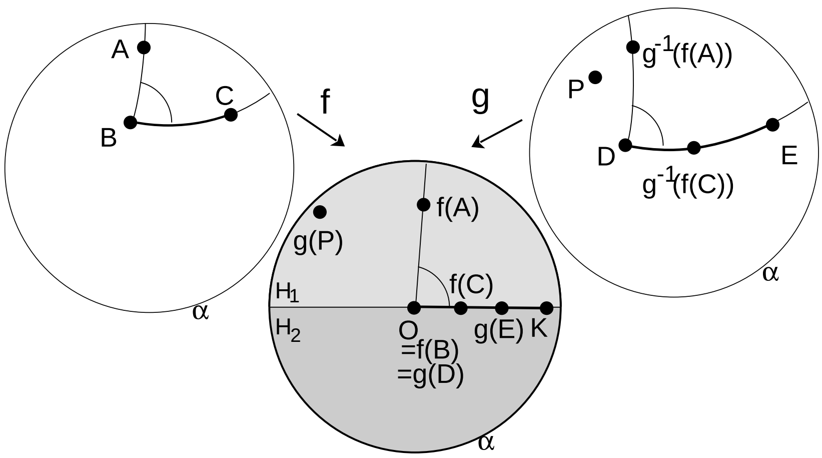
Olkoon seuraavaksi β:n keskipiste $B \neq 0$, $\beta = \{P \mid d(B,P) = p\}$. Lauseen 4.2.3 nojalla voidaan valita liike i siten, että $i(\beta) = O$ ja itse asiassa nimenomaan i:ksi kelpaa ympyräpeilaus γ:n suhteen, missä γ:n keskipiste C on puolisuoralla $\overrightarrow{OB}$. Koska i säilyttää hyperboliset etäisyydet, pätee kaikille $P \in \beta$

$$d(i(P)), O) = d(i(P), i(B)) = d(P, B) = p,$$

ja kääntäen, jos $d(Q,O) = p$, niin $d(i(Q), B) = d(i(Q), i(O)) = d(Q,O) = p$, joten $i(Q) \in \beta$ ja siten $Q = i(i(Q)) \in i(\beta)$. Yllätodetusta seuraa, että $i(\beta)$ on O-keskinen, p-säteinen $\mathcal{P}$-ympyrä. Origokeskisyyden nojalla $i(\beta)$ on O-keskinen r-säteinen euklidinen ympyrä. Koska $r < 1$ ja koska lauseen 4.1.10 nojalla γ:n keskipiste C on α:n ulkopuolella, niin C on $i(\beta)$:n ulkopuolella. Koska $\beta = i(i(\beta))$, niin lauseen 4.1.7 nojalla β on euklidinen ympyrä, jonka euklidiselle keskipisteelle E pätee $E \in \overrightarrow{OB}$. Pituuden $\overline{OE}$ ja säteen määrääminen jätetään harjoitustehtäväksi. Ne saa laskettua lauseen 4.1.7 avulla; $\overline{OC}$ ja γ:n säde löytyvät lauseesta 4.2.3.

LAUSE 4.2.21. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H11).*

Todistus. Olkoon $\measuredangle ABC$ $\mathcal{P}$-kulma, $\overrightarrow{DE}$ $\mathcal{P}$-puolisuora ja P piste siten, että $P \notin \overleftrightarrow{DE}$. On etsittävä $\mathcal{P}$-puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$. Merkitään taas Poincarén malliympyrän α keskipistettä O, valitaan jokin $\mathcal{P}$-piste $K \neq O$ ja merkitään tyypin 1 $\mathcal{P}$-suoran määräämiä $\mathcal{P}$-puolitasoja H_1 ja H_2. Lauseen 4.2.16 nojalla on olemassa liikkeiden yhdistelmä f siten, että $f(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OK}$. Nyt joko $f(A) \in H_1$ tai $f(A) \in H_2$. Jos $f(A) \in H_2$, niin lisätään f:ään peilaus $\overrightarrow{OK}$:n suhteen, jolloin $f(A) \in H_1$. Siis voidaan olettaa, että $f(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OK}$ ja $f(A) \in H_1$. Vastaavasti löydetään liikkeiden yhdistelmä g siten, että $g(\overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{OK}$ ja $g(P) \in H_1$.



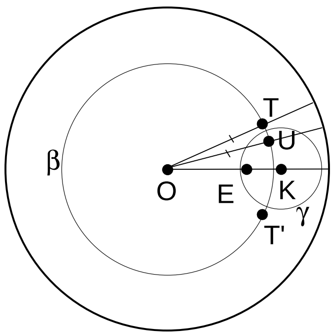
KUVA 227: POINCARÉN MALLI TOTEUTTAA AKSIOOMAN (H11)

Tällöin $(g^{-1}\circ f)(B) = g^{-1}(f(B)) = g^{-1}(O) = D$ ja $(g^{-1}\circ f)(C) \in g^{-1}(\overrightarrow{OK}) = \overrightarrow{DE}$. Lauseen 4.2.19 nojalla $\measuredangle(g^{-1}\circ f)(A)(g^{-1}\circ f)(B)(g^{-1}\circ f)(C) \cong \measuredangle ABC$. Koska $f(C) \in \overrightarrow{OK}$, niin siis $\overrightarrow{D(g^{-1}\circ f)(A)}$ on haettu puolisuora, mikäli $(g^{-1}\circ f)(A)$ ja P ovat samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{DE}$. Näin asia onkin, sillä $f(A)$ ja $g(P)$ ovat puolitasossa H_1, joten $f(A)g(P)\overleftrightarrow{OK}$ ja siten $g^{-1}f(A)g^{-1}(g(P))g^{-1}(\overleftrightarrow{OK})$ eli $(g^{-1}\circ f)(A)P\overleftrightarrow{DE}$. Näin on olemassaolo todistettu.

Yksikäsitteisyys tarkastetaan seuraavasti: Olkoot f ja g kuten edellä ja $\overrightarrow{DR}$ ja $\overrightarrow{DS}$ puolisuoria siten, että $\measuredangle EDR \cong \measuredangle ABC$ ja $\measuredangle EDC \cong \measuredangle ABC$ sekä $RP\overleftrightarrow{DE}$ ja $RS\overleftrightarrow{DE}$. On osoitettava, että $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DS}$. Riittää näyttää, että $\overrightarrow{Og(R)} = \overrightarrow{Og(S)}$. Ainakin $g(R)$ ja $g(S)$ ovat puolitasossa H_1. Lisäksi

$$\begin{aligned}\measuredangle g(R)OK &\cong \measuredangle g(R)g(D)g(E) \cong \measuredangle RDE \cong \measuredangle ABC\\ &\cong \measuredangle SDE \cong \measuredangle g(S)g(D)g(E) = \measuredangle g(S)OK,\end{aligned}$$

joten $\measuredangle g(R)OK \cong \measuredangle g(S)OK$. *(Huom: Tässä kohdassa käytettiin kulmien yhtenevyyden transitiivisuutta, joka todistetaan vasta seuraavana lauseena. Siinä todistuksessa ei kuitenkaan käytetä tätä tulosta, joten kiertopäättelyä ei tule. Voimme jatkaa päättelyä:)*

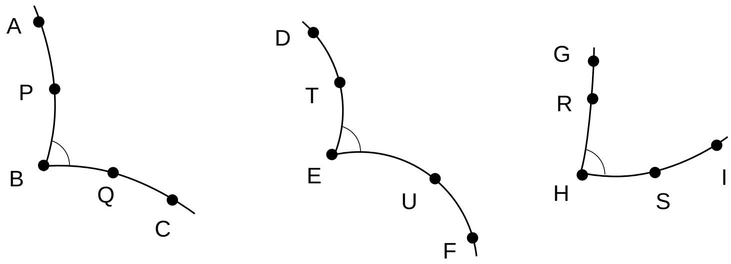


KUVA 228: AKSIOOMAN (H11) YKSIKÄSITTEISYYSPUOLI

Valitaan $T \in \overrightarrow{Og(R)} \setminus \{O\}$ ja $U \in \overrightarrow{Og(S)} \setminus \{O\}$ siten, että $OT \cong OU$, jolloin $U, T \in H_1$ ja, koska $\measuredangle g(R)OK \cong \measuredangle g(S)OK$, niin kolmiot $\triangle g(R)OK$ ja $\triangle g(S)OK$ ovat yhtenevät ja siis erityisesti $UK \cong TK$. Merkitään $p = d(U,K) = d(T,K)$ ja $q = d(U,O) = d(T,O)$, jolloin siis $U, T \in \beta$, missä β on O-keskinen q-säteinen $\mathcal{P}$-ympyrä. ja $U, T \in \gamma$, missä γ on K-keskinen ja p-säteinen $\mathcal{P}$-ympyrä.

Lauseen 4.2.20 nojalla β on O-keskinen euklidinen ympyrä ja γ on E-keskinen euklidinen ympyrä, missä $E \in \overrightarrow{OK} \setminus \{O\}$. Lauseen 2.6.11 mukaan β ja γ leikkaavat korkeintaan kahdessa pisteessä. Nyt T on β:n ja γ:n leikkauspiste ja $T \notin \overleftrightarrow{OE}$. Kuten lauseen 2.6.12 todistuksessa nähdään nytkin, että tällöin β ja γ leikkaavat myös pisteessä T', joka on T:n peilauspiste euklidisen suoran $\overleftrightarrow{OE}$ suhteen. Mutta tällöin $T' \in H_2$, joten $T' \neq U$. Ympyröillä β ja γ on siis leikkauspisteet T ja T' ja U ja tiedämme, että $T' \neq U$. On siis oltava $T = U$. Tällöin $\overrightarrow{Og(R)} = \overrightarrow{Og(S)}$ ja siten $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DS}$ eli yksikäsitteisyyskin on todistettu. $\square$

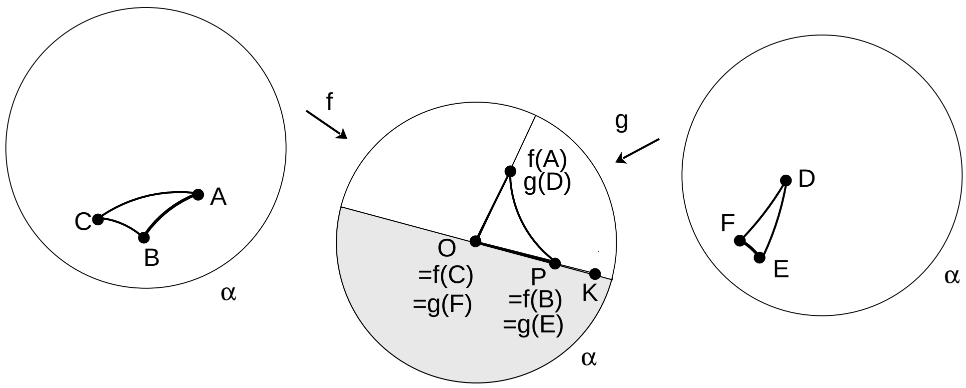
LAUSE 4.2.22. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H12).*
Todistus. Poincarén mallissa kulmien yhtenevyysrelaation refleksiivisyys ja symmetrisyys ovat ilmeisiä, mutta transitiivisuus vaatii pienen perustelun. Olkoot siis $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ ja $\measuredangle DEF \cong \measuredangle GHI$ sekä $P \in \overrightarrow{BA}$, $Q \in \overrightarrow{BC}$, $R \in \overrightarrow{HG}$, $S \in \overrightarrow{HI}$ siten, että $BP \cong HR$ ja $BQ \cong HS$. Pitää osoittaa, että $PQ \cong RS$.



KUVA 229: POINCARÉN MALLI TOTEUTTAA AKSIOOMAN (H12)

Koska (H8) pätee, niin voidaan valita $T \in \overrightarrow{ED}$ siten, että $ET \cong BP$, jolloin aksiooman (H9) nojalla myös $ET \in HR$. Vastaavasti voidaan valita $U \in \overrightarrow{EF}$ siten, että $EU \cong BQ$ ja $EU \cong HS$. Koska nyt $ET \cong BP$ ja $EU \cong BQ$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, niin määritelmän mukaan $PQ \cong TU$. Vastaavasti päätellään, että $RS \cong TU$. Tällöin (H9):n nojalla $PQ \cong RS$. $\square$

LAUSE 4.2.23. *Poincarén malli toteuttaa SKS-aksiooman (H13).*
Todistus. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ $\mathcal{P}$-kolmioita siten, että $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $AB \cong DE$ sekä $BC \cong EF$. On osoitettava, että $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Suoraan kulmien yhtenevyyden nojalla on $AC \cong DF$, joten vastinsivut ovat yhteneviä ja riittää siis todistaa, että vastinkulmat ovat yhteneviä. Oletuksen mukaan $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, joten riittää todistaa, että $\measuredangle C \cong \measuredangle F$ ja $\measuredangle A \cong \measuredangle D$. (Käytettävissä on nyt siis oletus SSS, itse asiassa peräti SSSK.)

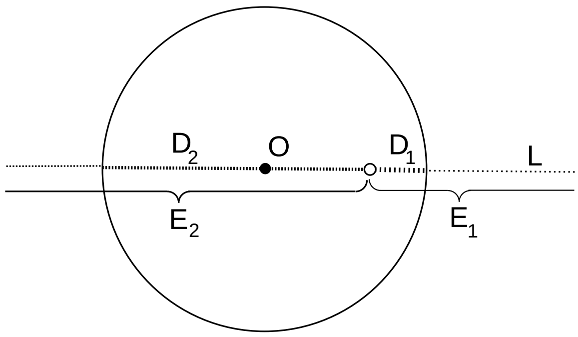


KUVA 230: POINCARÉN MALLI TOTEUTTAA SKS-AKSIOOMAN (H13)

Kuten lauseen 4.2.21 todistuksessa on nytkin olemassa liikkeiden yhdistelmä f siten, että $f(\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{OK}$ ja $f(A) \in H_1$ ja vastaavasti myös liikkeiden yhdistelmä g siten, että $g(\overrightarrow{FE}) = \overrightarrow{OK}$ ja $g(D) \in H_1$. Koska oletusten mukaan lisäksi $Of(B) = f(C)f(B) \cong CB \cong FE \cong g(F)g(E) = Og(E)$, niin $f(B) =$

$g(E)$. Merkitään $P = f(B) = g(E)$. Osoitetaan, että $f(A) = g(D)$: Koska $Of(A) = f(C)f(A) \cong CA \cong FD \cong g(F)g(D) = Og(D)$, niin $f(A)$ ja $g(D)$ ovat ainakin samalla O-keskisellä $\mathcal{P}$-ympyrällä. Koska $Pf(A) = f(B)f(A) \cong BA \cong ED \cong g(E)g(D) = Pg(D)$, niin $f(A)$ ja $f(D)$ ovat myös samalla P-keskisellä $\mathcal{P}$-ympyrällä. Koska lisäksi $f(A)$ ja $f(D)$ ovat puolitasossa H_1, niin aivan samoin kuin lauseen 4.2.21 todistuksessa nähdään nytkin, että tämä on mahdollista vain, kun $f(A) = g(D)$. Koska kulmat säilyvät liikkeissä, on siis $\measuredangle ACB \cong \measuredangle f(A)f(C)f(B) = \measuredangle g(D)OP = \measuredangle g(D)g(F)g(E) \cong \measuredangle DFE$, eli $\measuredangle C = \measuredangle F$. Samalla tavalla saadaan $\measuredangle A = \measuredangle D$. □

LAUSE 4.2.24. *Poincarén malli toteuttaa Dedekindin aksiooman.*
Todistus. Todistus perustuu luonnolliseti siihen, että pohjana oleva euklidinen malli toteuttaa Dedekindin aksiooman. Koska liikkeet säilyttävät välissäolon ja jokainen suora on liikkeellä kuvattavissa tyyppiä 1 olevaksi suoraksi, niin riittää osoittaa, että Dedekindin aksiooma toimii tyypin 1 suoralla ℓ. Olkoon siis $\ell = \mathcal{A} \cap L$, missä L on O:n kautta kulkeva euklidinen suora.



KUVA 231: POINCARÉN MALLI TOTEUTTAA DEDEKINDIN AKSIOOMAN

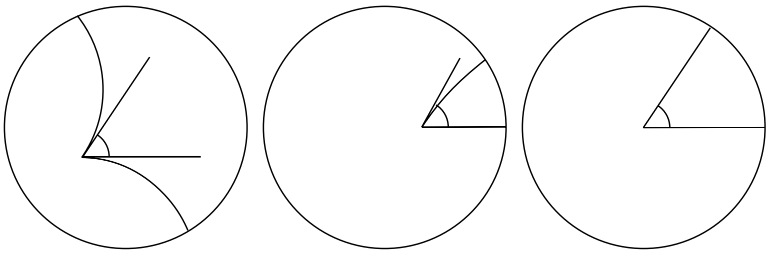
Olkoot D_1, $D_2 \subset \ell$ siten, että Dedekindin ehdot ovat voimassa. Määritellään

$$E_1 = D_1 \cup \{P \in L \mid \exists Q \in D_2,\ R \in D_1 \text{ s.e. } Q * R * P\}$$

ja $E_2 = L \setminus E_1$. Tarkastelemalla eri vaihtoehtoja nähdään helposti, mutta aika työläästi, että E_1 ja E_2 toteuttavat Dedekindin ehdot euklidisessa mielessä suoralla L. Koska euklidinen malli toteuttaa Dedekindin aksiooman, niin on olemassa piste $P \in L$, joka on E_1:n ja E_2:n "välissä" aksiooman mielessä. Tällöin nähdään helposti, että $P \in \ell$ ja P on D_1:n ja D_2:n "välissä" Poincarén mallin mielessä. Näin on todistettu, että Dedekindin aksiooma pätee tässäkin mallissa. □

Nyt on todettu, että Poincarén malli toteuttaa kaikki muut aksioomat, paitsi paralleeliaksiooman. Arkhimedeen aksioomaahan ei tarvitse tässä verifioida, koska se lauseen 2.6.13 mukaan seuraa jo todistamistamme. Koska aksioomat toteutuvat, voidaan malliin konstruoida jana- ja kulmamitta kuten aikaisemmin on esitetty. Minkälaisia nämä ovat? Janamitta riippuu tietenkin valitusta yksikköjanasta. Jos käytetään yksikköjanana janaa OI, missä O on α:n keskipiste ja I valittu niin, että $d(O, I) = 1$, eli $\overline{OI} = \frac{e-1}{e+1}$, niin hyperbolinen etäisyys toteuttaa lauseen 2.5.10 ehdot ja lauseen 2.5.10 mukaisesti tällöin **janamitta on yhtä suuri kuin hyperbolinen etäisyys**.

Kulmamitalle vastaava asia ei ole aivan yhtä selvä. Työtä aiheuttaa mm. se seikka, että lauseen 2.5.10 vastinetta kulmille ei ole todistettu edellä, vaikka se voitaisiin toki tehdä. Tulos on kuitenkin seuraava: Poincarén mallissa **kulmamitta on tangenttien välisen kulman euklidinen mitta**.



Kuva 232: Poincarén kulmamitta

LAUSE 4.2.25. *Poincarén malli ei toteuta paralleeliaksioomaa.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

4.3. Hyperbolista geometriaa.

Yritykset todistaa paralleeliaksiooma jatkuivat 1800-luvun lopulle asti. 1800-luvun alkupuolella kuitenkin kolme matemaatikkoa — toisistaan riippumatta — alkoivat miettiä, mitä tapahtuisi, jos paralleeliaksiooman sijasta oletettaiiin sen looginen negaatio, eli että suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkisi useampia sen suuntaisia suoria. Nämä matemaatikot olivat unkarilainen Janos Bolyai (1802–1860), saksalainen Carl Frierich Gauss (1777–1856) ja venäläinen Nikolai Ivanovits Lobatševski (1792–1856). He kehittivät tämän uuden ns. *hyperbolisen aksiooman* pohjalta geometrian, joka herätti ihmetystä. Gauss huomasi näennäisen paradoksin takaa seuraavaa:

Oletus, että kolmion kulmien summa on alle $180°$*, johtaa merkilliseen geometriaan, aivan erilaiseen kuin omamme [euklidinen], kuitenkin täysin ristiriidattomaan. Olen tyydytyksekseni kehittänyt sitä niin pitkälle, että pystyn ratkaisemaan siinä kaikki ongelmat, poikkeuksena eräs vakio, jota ei voi määrätä a priori. Mitä suuremmaksi tämän vakion valitsee, sitä lähemmäs tulee euklidista geometriaa, ja kun se valitaan äärettömän suureksi, geometriat yhtyvät. Tämän geometrian teoreemat vaikuttavat paradoksaalisilta ja asiaan vihkiytymättömästä absurdedeilta; mutta hätäilemätön perusteellinen ajattelu paljastaa, että ne eivät sisällä yhtään mitään mahdotonta. Esimerkiksi kolmion kolme kulmaa tulevat miten pieniksi vain halutaan, kunhan sivut valitaan tarpeeksi suuriksi, mutta kolmion ala ei koskaan voi ylittää tiettyä raja-arvoa, riippumatta siitä, kuinka pitkiksi sivut valitaan, eikä edes koskaan saavuta tuota rajaa.*

Kaikki yritykseni löytää ristiriita tästä epäeuklidisesta geometriasta ovat epäonnistuneet, ja ainoa asia, jonka suhteen se on havaintojemme vastainen on se, että jos se olisi tosi, niin avaruudessa olisi olemassa itsestään määräytynyt lineaarinen suuruus [luonnollinen mittayksikkö], (jota me emme tunne). Mutta minusta näyttää sitä, että huolimatta metafyysikkojen mitäänsanomattomasta sanahelinästä tiedämme liian vähän avaruuden todellisesta luonteesta voidaksemme pitää täysin *mahdottomana sellaista, mikä näyttää meistä luonnottomalta. Jos tämä epäeuklidinen geometria olisi todellista, ja jos olisi mahdollista verrata mainitsemaani vakiota niihin suuruuksiin, joita kohtaamme mittauksissamme maan päällä ja avaruudessa, niin se voitaisiin määrätä a posteriori. Siksi olen joskus leikilläni toivonut, että euklidinen geometria ei pätisi, koska meillä silloin olisi absoluuttinen standardipituusmitta.*

Bolyai, Gauss ja Lobatševski eivät tietenkään tunteneet Poincarén mallia; itse asiassa he eivät tunteneet minkäänlaista mallia, joka osoittaisi, että hyperbolinen aksiooma ei johda ristiriitaan. Ensimmäisen tällainen mallin on keksinyt Eugenio Beltrami[25] v. 1868 ja ensimmäisenä tällaisen mallin on täysin oikeaksi todistanut Felix Klein[26] v.1871.

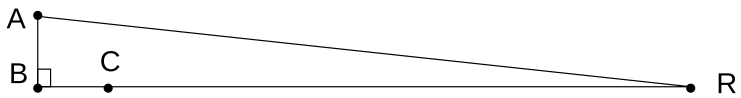
Hyperbolisen geometrian koko struktuuri, kaikki lauseet jne. olivat siis aluksi ”tyhjän päällä” — ristiriidan löytyminen olisi romuttanut kaiken (mutta viimeinkin todistanut paralleeliaksiooman)! Siksi Gauss ei julkaissutkaan konstruktioitaan. Ristiriitaa ei kuitenkaan löytynyt (eikä koskaan löydy!), ja niinpä mekin tässä tutustumme joihinkin hyperbolisen geometrian perusasioihin.

Asetetaan ensin perusta:

(HYP) **Hyperbolinen aksiooma** On olemassa suora ℓ ja piste P suoran ℓ ulkopuolella siten, että P:n kautta kulkee ainakin kaksi eri ℓ:n suuntaista suoraa.

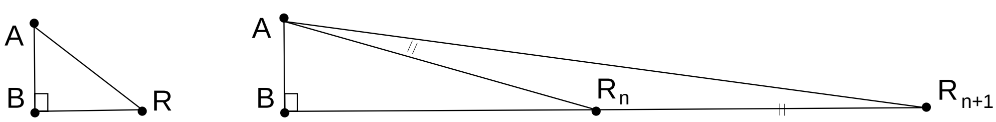
Osoitetaan tämän avulla ensin, että jokaisen kolmion defekti on aidosti positiivinen, eli kulmien summan asteluku aidosti alle 180. Todistetaan ensin kuitenkin Saccherin ja Legendre'in lauseen avulla aputulos, jossa ei tarvita hyperbolista aksioomaa. Aputulos pätee siis myös euklidisessa geometriassa.

LAUSE 4.3.1. *Olkoon $\measuredangle ABC$ suora kulma ja $a > 0$ positiivinen reaaliluku. Tällöin puolisuoralla $\overline{BC}$ on piste R siten, että $(\measuredangle BRA)^\circ < a$.*



Kuva 233: Aputulos

Todistus. Konstruoidaan jono $(R_n)_{N\in\mathbb{N}}$ puolisuoran $\overrightarrow{BC}$ pisteitä seuraavalla tavalla: valitaan ensin $R_1 \in \overrightarrow{BC}$ siten, että $AB \cong BR$ ja siten, kun R_n on valittu jatketaan valitsemalla $R_{n+1} \in \overrightarrow{BC}$ siten, että $B * R_n * R_{n+1}$ ja $R_nR_{n+1} \cong AR_n$, jolloin kolmio $\triangle R_{n+1}R_nA$ on tasakylkinen.



Kuva 234: Aputuloksen todistus

[25]Eugenio Beltrami 1835–1900, Italia
[26]Felix Christian Klein 1849–1925. Saksa

Osoittaan induktiolla, että $(\measuredangle BR_nA)^\circ \leq 2^{-n} \cdot 90$:

Kun $n = 1$, niin lauseen 2.4.1 nojalla $2(\measuredangle A)^\circ \cong (\measuredangle R_1)^\circ$. Koska $(\measuredangle B)^\circ = 90$, niin Saccherin ja Legendren lauseen nojalla $2{\cdot}(\measuredangle R_1)^\circ{+}90 \leq 180$, joten $\measuredangle(R_1)^\circ \leq 2^{-1}{\cdot}90$, eli väite pätee tapauksessa $n = 1$.

Olkoon sitten väite tosi n:lle. Koska $B{*}R_n{*}R_{n+1}$, niin $\measuredangle(BR_nA)^\circ{+}(\measuredangle AR_nR_{n+1})^\circ = 180$, jolloin induktio-oletuksen nojalla

$$(*) \qquad (\measuredangle AR_nR_{n+1})^\circ \geq 180 - 2^{-n} \cdot 90.$$

Lauseen 2.4.1 nojalla $(\measuredangle R_nAR_{n+1})^\circ = (\measuredangle AR_{n+1}R_n)^\circ$, joten Saccherin ja Legendren lauseen mukaan

$$2(\measuredangle AR_{n+1}R_n)^\circ \leq 180 - (\measuredangle AR_nR_{n+1})^\circ,$$

joten $(*)$:n mukaan

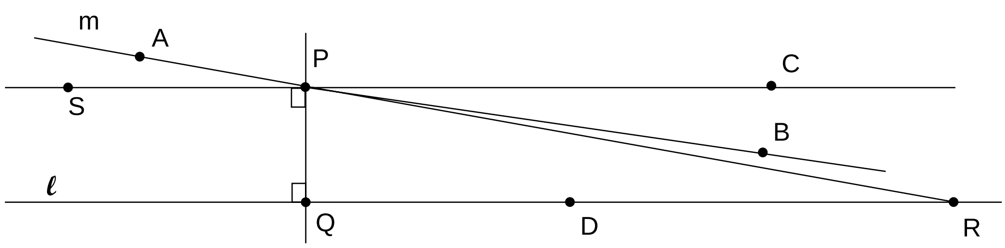
$$(\measuredangle AR_{n+1}R_n)^\circ \leq 90 - \frac{1}{2}\big(180 - 2^{-n} \cdot 90\big) = 2^{-(n+1)} \cdot 90.$$

Koska $\measuredangle AR_{n+1}R_n = \measuredangle AR_{n+1}B$, niin induktioväite $(n+1)$:lle pätee.

Valitaan lopuksi $n_0 \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $2^{-n} \cdot 90 < a$, jolloin $(\measuredangle BR_{n_0}A)^\circ \leq 2^{-n} \cdot 90 < a$ ja voidaan valita $R = R_{n_0}$. $\square$

LAUSE 4.3.2. *Jokaisen kolmion defekti on hyperbolisessa geometriassa aidosti positiivinen.*

Todistus. Lauseen 2.5.26 nojalla riittää löytää yksi tällainen kolmio. Hyperbolisen aksiooman nojalla on olemassa suora ℓ ja piste $P \notin \ell$ siten, että P:n kautta kulkee ainakin kaksi ℓ:n suuntaista suoraa. Olkoon $Q \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$ ja S sellainen piste, että $\overleftrightarrow{PS} \perp \overleftrightarrow{PQ}$, jolloin $\overleftrightarrow{PS} \parallel \ell$.



KUVA 235: AINAKIN YHDEN KOLMION DEFEKTI ON AIDOSTI POSITIIVINEN

Nyt siis P:n kautta kulkee jokin toinen suora $m \parallel \ell$, $m \neq \overleftrightarrow{PS}$. Valitaan $A \in m \setminus \{P\}$. Jos $A\overleftrightarrow{PS}Q$, niin valitaan piste B siten, että $A * P * B$. Jos taaas $AQ\overleftrightarrow{PS}$, niin asetetaan $B = A$. Kummassakin tapauksessa $B \in m \setminus \{P\}$ ja $QB\overleftrightarrow{PS}$.

Vastaavalla tavalla voidaan valita $C \in \overleftrightarrow{PS} \setminus \{P\}$ siten, että $BC\overleftrightarrow{PQ}$ ja $D \in \ell \setminus \{Q\}$ siten, että $DB\overleftrightarrow{PQ}$.

Merkitään $a = (\measuredangle CPB)^\circ$, jolloin $a > 0$. Lauseen 4.3.1 nojalla voidaan valita $R \in \overleftrightarrow{QD}$ siten, että

$$(*) \qquad (\measuredangle PRQ)^\circ < a.$$

Nyt R on kulman $\measuredangle QPB$ sisällä. Tämän voi perustella seuraavasti: $DR\overleftrightarrow{PQ}$ ja $B\overleftrightarrow{DPQ}$, joten $R\overleftrightarrow{BPQ}$ ja riittää osoittaa, että $RQ\overleftrightarrow{PB}$ eli RQm. Näin on, koska $m \parallel \ell$ ja siten m ei voi leikata edes suoraa $\overleftrightarrow{RQ}$ saati sitten janaa RQ.

Koska siis R todella on kulman $\measuredangle QPB$ sisällä, niin $\measuredangle QPR < \measuredangle QPB$ eli

$$(\ast\ast) \qquad (\measuredangle QPR)^\circ < (\measuredangle QPB)^\circ.$$

Toisaalta, koska $BQ\overleftrightarrow{PC}$ ja $BC\overleftrightarrow{PQ}$, niin B on kulman $\measuredangle QPC$ sisällä ja silloin

$$90 = (\measuredangle QPC)^\circ = (\measuredangle QPB)^\circ + (\measuredangle BPC)^\circ = (\measuredangle QPB)^\circ + a.$$

Kolmiossa $\triangle PQR$ saadaan tällöin $(\ast)$:n ja $(\ast\ast)$:n nojalla

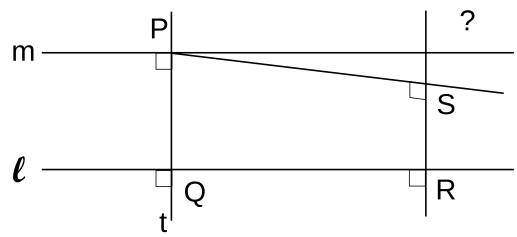
$$\begin{aligned} \operatorname{def}(\triangle PQR) &= 180 - (\measuredangle PQR)^\circ - (\measuredangle QRP)^\circ - (\measuredangle RPQ)^\circ \\ &> 180 - 90 - a - (\measuredangle QPB)^\circ \\ &= 90 - (a + (\measuredangle QPB)^\circ) = 90 - 90 = 0. \end{aligned}$$

□

Hyperbolinen aksiooma takaa, että on olemassa ainakin yksi suora ℓ ja suoran ℓ ulkopuolella piste P, jonka kautta kulkee useampia ℓ:n suuntaista suoria. Itse asiassa näin on asianlaita *jokaiselle* suoralle ja sen ulkopuolella olevalle pisteelle:

LAUSE 4.3.3. *Olkoon ℓ mielivaltainen suora ja P sen ulkopuolinen piste. Tällöin P:n kautta kulkee ainakain kaksi ℓ:n suuntaista suoraa.*

Todistus. Valitaan $Q \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$ ja olkoon m pisteen P kautta kulkeva $\overleftrightarrow{PQ}$:n normaali. Tällöin $m \parallel \ell$.



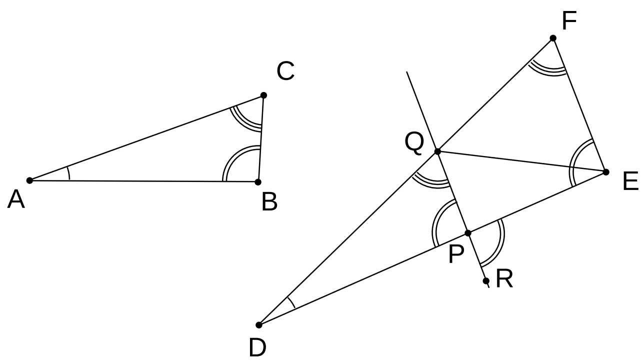
KUVA 236: HYPERBOLINEN AKSIOOMA PÄTEE KAIKKIALLA

Valitaan $R \in \ell \setminus \{Q\}$ ja olkoon t pisteen R kautta kulkeva ℓ:n normaali. Valitaan $S \in t$ siten, että $\overleftrightarrow{PS} \perp t$. Koska $P \notin \ell$, niin $S \neq R$. Koska $\overleftrightarrow{PS}$ ja ℓ ovat t:n normaaleja, ne ovat yhdensuuntaisia. Väitteen todistamiseksi riittää nyt osoittaa, että $\overleftrightarrow{PS} \neq m$, ja tähän taas riittää se, että $S \notin m$. Tehdään antiteesi: $S \in m$. Tällöin $\square QRSP$ on suorakulmio, mikä lauseen 2.5.26 mukaan merkitsee sitä, että jokaisen kolmion defekti on nolla, mikä taas on vastoin lausetta 4.3.2 ja siis mahdotonta. □

Seuraava lause sanoo, että hyperbolisessa geometriassa kolmiot ovat yhtenevät, jos niillä on yhtenevät kulmat. Ei siis ole muita samanmuotoisia kolmioita kuin yhteneväiset.

LAUSE 4.3.4. (KKK-sääntö). *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita, joilla $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Todistus. Antiteesi: Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ eivät olekaan yhteneviä. KSK-säännön nojalla $\overline{AB} \neq \overline{DE}$, $\overline{BC} \neq \overline{EF}$ ja $\overline{CA} \neq \overline{FD}$. Kussakin näisstä on siis joko "$<$" tai "$>$". Vaihtamalla tarvittaessa merkintöjä ($A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ ja $C \leftrightarrow F$) voidaan saada aikaan, että ainakin kahdessa em. epäyhtälöistä esiintyy merkki "$<$". Vaihtamalla vielä merkintöjä voidaan olettaa, että $\overline{AB} < \overline{DE}$ ja $\overline{AC} < \overline{DF}$ ja $\overline{BC} \neq \overline{EF}$. Tällöin voidaan valita P ja Q siten, että $D * P * E$, $D * Q * F$, $\overline{AB} = \overline{DP}$ ja $\overline{AC} = \overline{DQ}$.



Kuva 237: KKK-sääntö

SKS-säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$. Oletuksen nojalla $\measuredangle E \cong \measuredangle DPQ$ ja $\measuredangle F \cong \measuredangle DQP$. Jos valitaan R siten, että $Q * P * R$, niin ristikulmille pätee $\measuredangle EPR \cong \measuredangle QPD$. Koska $F\overleftrightarrow{QE}D$ ja $Q\overleftrightarrow{ED}R$, niin $F\overleftrightarrow{ED}R$ ja $\measuredangle FEP \cong \measuredangle EPR$, jolloin lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$. Tällöin $\square FQPE$ on nelikulmio, jolla on ainakin yksi pari yhdensuuntaisia vastakkaisia sivuja, eli *puolisuunnikas.* Jätämme harjoitustehtäväksi todistaa, että tästä seuraa, että Q on kulman $\measuredangle E$ sisällä ja E on kulman $\measuredangle FQP$ sisällä. Tällöin

$$(\measuredangle FEQ)^\circ + (\measuredangle QEP)^\circ = (\measuredangle E)^\circ \quad \text{ja} \quad (\measuredangle FQE)^\circ + (\measuredangle EQP)^\circ = (\measuredangle FQP)^\circ.$$

Tästä saadaan

$$\operatorname{def}(\triangle FQE) + \operatorname{def}(\triangle EQP) = 360 - (\measuredangle F)^\circ - (\measuredangle E)^\circ - (\measuredangle EPQ)^\circ - (\measuredangle FQP)^\circ.$$

Koska $E * P * D$ ja $F * Q * D$, niin

$$(\measuredangle EPQ)^\circ = 180 - (\measuredangle QPD)^\circ \quad \text{ja } (\measuredangle FQP)^\circ = 180 - (\measuredangle PQD)^\circ.$$

Toisaalta $(\measuredangle QPD)^\circ = (\measuredangle E)^\circ$ ja $(\measuredangle PQD)^\circ = (\measuredangle F)^\circ$, joten saadaan

$$\operatorname{def}(\triangle FQE) + \operatorname{def}(\triangle EQP) = 360 - (\measuredangle F)^\circ - (\measuredangle E)^\circ - (180 - (\measuredangle E)^\circ) - (180 - (\measuredangle F)^\circ) = 0.$$

Tämä on mahdotonta lauseen 4.3.2 nojalla. $\square$

Euklidisessa geometriassa pätee lauseen 3.1.5 nojalla seuraava tulos: Jos $\ell \parallel m$, niin kaikki ℓ:n normaalit ovat myös m:n normaaleja. Erityisesti ℓ:llä ja m:llä on äärettömän monta yhteistä normaalia. Hyperbolisessa geometriassa kaikki on toisin.

LAUSE 4.3.5. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria. Tällöin ℓ:llä ja m:llä on korkeintaan yksi yhteinen normaali.*

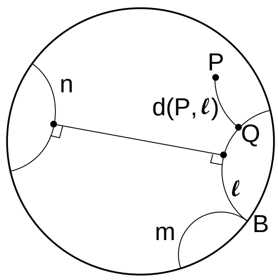
Todistus. Antiteesi: Olkoot n ja t suorien ℓ ja m yhteisiä normaaleja, mutta eri suoria. Tällöin leikkauspisteet muodostavat suorakulmion, mikä on lauseiden 2.5.26 ja 4.3.2 nojalla mahdotonta. □

Yhdensuuntaisilla suorilla on siis yksi tai ei yhtään yhteistä normaalia. Standardikonstruktiolla (kuten esimerkiksi lauseessa 2.4.17) saadaan aikaan yhdensuuntaisia, joilla on yhteinen normaali, mutta voidaan kysyä, onko yhdensuuntaisilla aina yhteistä normaalia. Vastaus on kuin onkin kielteinen: On olemassa yhdensuuntaisia, joilla ei ole yhteistä normaalia lainkaan. Tämä näkyy Poincarén mallissa ja todistetaan myöhemmin lauseenakin Useimmilla — mitä se sitten tarkoittaakin — yhdensuuntaisilla on yhteinen normaali. Jos näin on, sanotaan, että kyseiset suorat ovat *normaalisti yhdensuuntaisia*, muussa tapauksessa eli silloin, kun yhteistä normaalia ei ole, sanotaan, että ne ovat *asymptoottisesti yhdensuuntaisia.* Nimitys "asymptoottinen" selittyy myöhemmin, ks. huom. 45.

Asiaan liitty likeisesti käsite "pisteen etäisyys suorasta": Olkoon ℓ suora ja $P \notin \ell$ piste, sekä m pisten P kautta kulkeva ℓ:n normaali ja Q ℓ:n ja normaalin m leikkauspiste. Sanotaan, että *pisteen P etäisyys suorasta ℓ, $d(P,\ell)$*, on janan PQ pituus,

$$d(P,\ell) = \overline{PQ}.$$

Tältä asiat näyttävät Poincarén mallissa:

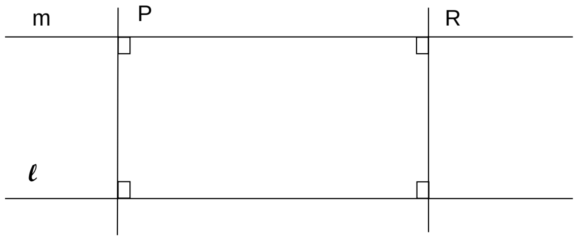


Kuva 238: Yhdensuuntaisia Poincarén mallissa

Kuvassa ℓ ja n ovat normaalisti yhdensuuntaisia, ℓ ja m asymptoottisesti yhdensuuntaisia. Huomaa, että tämä ei ole mitenkään itsestäänselvää!

Jos euklidisessa geometriassa ℓ ja m ovat yhdensuuntaisia ja $P, R \in m$, niin $d(P,\ell) = d(R,\ell)$. Tämä seuraa suoraan siitä, että euklidisessa geometriassa suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtenevät. Euklidisessa geometriassa voidaan täten määritellä *yhdensuuntaisten suorien ℓ ja m etäisyys* asettamalla

$$d(\ell, m) = d(P,\ell), \qquad \text{P mielivaltainen } \in m.$$

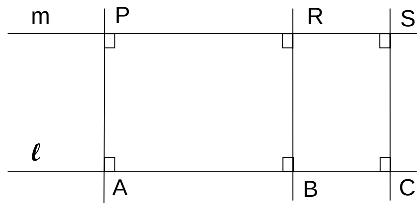


KUVA 239: EUKLIDISET YHDENSUUNTAISET

Hyperbolisessa geometriassa ei näin voi menetellä. Pätee näet seuraava lause.

LAUSE 4.3.6. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria. Tällöin $d(P,\ell) = d(R,\ell)$ korkeintaan kahdella eri pisteellä $P, R \in m$.*

Todistus. Antiteesi: Olkoot P, R, $S \in m$ eri pisteitä, joille pätee $d(P,\ell) = d(R,\ell) = d(S,\ell)$. Voidaan olettaa, että $P * R * S$. Olkoot A, B, $C \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$, $\overleftrightarrow{BR} \perp \ell$ ja $\overleftrightarrow{CS} \perp \ell$, jolloin $A * B * C$.



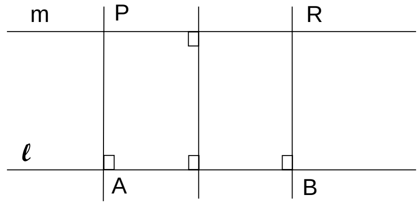
KUVA 240: NORMAALIT HYPERBOLISET YHDENSUUNTAISET

Pienenä harjoitustehtävänä voi osoittaa, että $\measuredangle APR \cong \measuredangle BRP$, $\measuredangle APS \cong \measuredangle CSP$ ja $\measuredangle BRS \cong \measuredangle CSR$. Tällöin, koska $P * Q * R$, kulma $\measuredangle PRB$ on yhtenevä täydennyskulmansa $\measuredangle BRS$ kanssa ja siten $\measuredangle PRB$ on suora. Tällöin myös $\measuredangle APE$ on suora ja siten $\square ABRP$ on suorakulmio, mikä hyperbolisessa geometriassa on mahdotonta. $\square$

Jos siis $a > 0$, niin 4.3.6:n nojalla on olemassa **korkeintaan** kaksi eri pistettä $P, R \in m$, s.e. $d(P,\ell) = d(R,\ell) = a$. Voi sattua, että tällaisia pisteitä on vain yksi tai ei yhtään. Jos niitä on kaksi, niin pätee seuraavaa:

LAUSE 4.3.7. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria ja P ja $R \in m$ eri pisteitä s.e. $d(P,\ell) = d(R,\ell) = a$. Tällöin ℓ ja m ovat* **normaalisti** *yhdensuuntaisia.*

Todistus. Olkoot A, $B \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{PA} \perp \ell$ ja $\overleftrightarrow{RB} \perp \ell$.



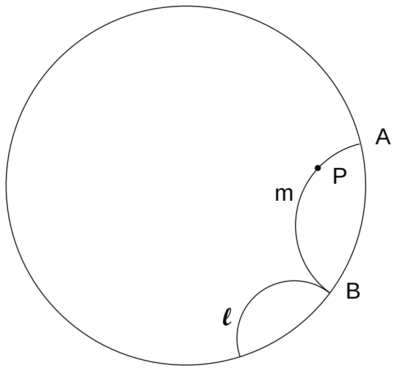
KUVA 241: KAKSI YHTÄ KAUKAISTA PISTETTÄ TUOTTAVAT YHTEISEN NORMAALIN

Pienenä harjoitustehtävänä voi osoittaa, että AB:n keskinormaali on PR:n keskinormaali ja siten ℓ:n ja m:n yhteinen normaali. □

Jos ℓ ja m ovat asymptoottisesti yhdensuuntaisia, niin lauseen 4.3.7. nojalla $P, R \in m$ $d(P,\ell) \neq d(R,\ell) = a$ aina, kun $P, R \in m$ ovat eri pisteitä. Pätee enemmänkin:

LAUSE 4.3.8. *Olkoot ℓ ja m asymptoottisesti yhdensuuntaisia suoria ja P ja $a > 0$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $P \in m$ siten, että $d(P,\ell) = a$.*

Todistus sivuutetaan, koska se on mutkikas, varsinkin olemassaolopuoli. Katsotaan kuitenkin mallia:



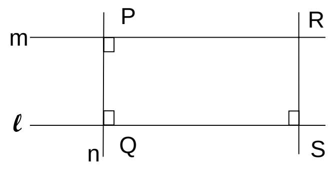
Kuva 242: Asymptoottisesti yhdensuuntaiset

Huomautus 45. Poincarén mallissa tilanne on seuraava: Jos A ja B ovat m:n (euklidiset) päätepisteet, kuten kuvassa, niin $d(P,\ell) \to \infty$, kun $P \to A$ ja $d(P,\ell) \to 0$, kun $P \to B$. Vastaava tilanne syntyy 4.3.8:n nojalla yleensäkin, erityisesti siis $d(P,\ell) \to 0$, kun P "lähestyy suoran toista päätä" euklidisessa mielessä. (Tämän voisi tietysti ilmaista täsmällisemminkin). Tämä selittää nimen "asymptoottisesti yhdensuuntaiset".

Jos ℓ ja m ovat normaalisti yhdensuuntaiset ja $a > 0$, niin "suurille" a löytyy sellainen $P \in m$, itse asiassa kaksikin sellaista, että $d(P,\ell) = a$, mutta "pienille" a ei. Tämä näkyy seuraavasta:

LAUSE 4.3.9. *Olkoot ℓ ja m normaalisti yhdensuuntaisia ja n niiden yhteinen normaali. Olkoon P m:n ja n:n sekä Q suorien ℓ ja n yhteinen piste. Tällöin*

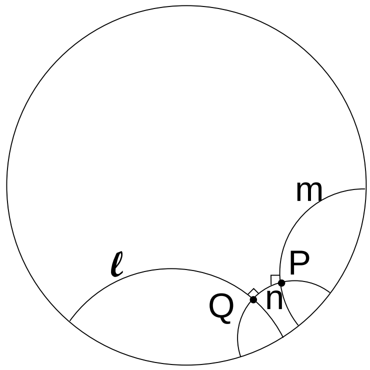
$$\overline{PQ} = \min\{d(R,\ell) \mid R \in m\}.$$



Kuva 243: Lause 4.3.9

Todistus. Suoraan määritelmän mukaan on $\overline{PQ} = d(P, \ell)$, joten riittää osoittaa, että $d(R, \ell) \geq \overline{PQ}$ kaikilla $R \in \ell \setminus \{P\}$. Olkoon $S \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{RS} \perp \ell$, jolloin $\overline{RS} = d(R, \ell)$. Pienenä harjoitustehtävänä voi todeta, että $(\measuredangle R)^\circ \leq 90$, ja koska hyperbolisessa geometriassa ei ole suorakulmioita, niin siis $(\measuredangle R)^\circ < 90$. Harjoitustehtäväksi jää myös osoittaa, että tällöin $\overline{PQ} < \overline{RS}$. $\square$

Poincarén mallissa normaali yhdensuuntaisuus ja lyhimmän etäisyyden kohta näyttävät siis tältä:



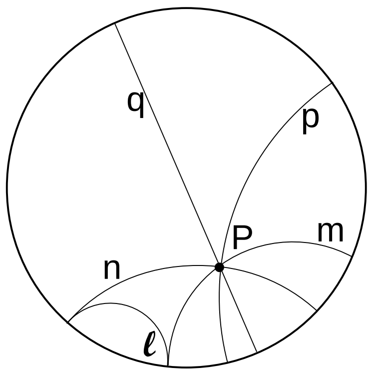
KUVA 244: LYHIN ETÄISYYS

Pisteessä $P \in m$ minimoituu etäisyys $d(P, \ell)$, missä $P \in m$ — jopa aidosti, kuten lauseen 4.3.9 todistuksesta näkyy.

Muotoillaan lopuksi vielä lause, joka kertoo, että asymptoottisia yhdensuuntaisia on todella olemassa hyperbolisessa geometriassa.

LAUSE 4.3.10. *Olkoon ℓ suora ja P piste sen ulkopuolella. Tällöin P:n kautta kulkee täsmälleen kaksi suoraa, jotka ovat ℓ:n kanssa asymptoottisesti yhdensuuntaisia. Kaikki muut P:n kautta kulkevat ℓ:n kanssa yhdensuuntaiset suorat — joita on äärettömän monta — ovat normaalisti yhdensuuntaisia.*

Dedekindin aksioomaan perustuva todistus sivuutetaan tekstin päättyessä tähän, vaikka päättely ei ole kovin hankala. Viimeisessä kuvassamme m ja n ovat ℓ:n kanssa asymptoottisesti yhdensuuntaiset ja p ja q ovat ℓ:n kanssa normaalisti yhdensuuntaiset.



KUVA 245: SUORIA POINCARÉN MALLISSA

4.4. Lopuksi.

Jos oletamme, että reaalilukujen järjestelmä on ristiriidaton eikä joukko-opissa eikä logiikassakaan ole ristiririitaa, niin koordinaattigeometria on olemassa ja on siis malli euklidiselle geometrialle, joka täten on ristiriidaton. Poincarén malli osoittaa tällöin, että myös hyperbolinen geometria on ristiriidaton, niin merkilliseltä kuin se aluksi saattaa vaikuttaakin. On edelleen helppoa konstruoida malli reaaliluvuille lähtemällä hyperbolisen geometrian suorasta. Siten olemme viime kädessä todistaneet, että nämä kaikki kolme järjestelmää ovat joko ristiriidattomia — tai sitten ristiriitaisia. Ristiriitaa ei ainakaan vielä ole löytynyt.

Hilbertin tasogeometrioiden aksioomat

(H1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa yksi ja vain yksi suora, joka kulkee sekä P:n että Q:n kautta.
(H2) Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi pistettä.
(H3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.
(H4) Jos $A * B * C$, niin A, B ja C ovat eri pisteitä, joiden kaikkien kautta kulkee sama suora ja $C * B * A$.
(H5) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$.
(H6) Jos A, B ja C ovat eri pisteitä, jotka kuuluvat samalle suoralle, niin yksi ja vain yksi seuraavista ehdoista on voimassa:

$$A * B * C,\ A * C * B \text{ tai } B * A * C.$$

(H7) Olkoot ℓ suora sekä A, B ja C pisteitä, joiden kautta suora ℓ ei kulje. Tällöin on voimassa:
(i) jos $AB\ell$ ja $BC\ell$, niin $AC\ell$:
(ii) jos $A\ell B$ ja $B\ell C$, niin $AC\ell$.

(H8) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on mielivaltainen puolisuora, niin on olemassa yksi ja vain yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.
(H9) Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio eli:
(i) $AB \cong AB$ (relaatio on refleksiivinen).
(ii) Jos $AB \cong CD$, niin $CD \cong AB$ (relaatio on symmetrinen).
(iii) Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB \cong EF$ (relaatio on transitiivinen).
(H10) Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.
(H11) Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma, $\overrightarrow{DE}$ puolisuora ja P piste, joka ei sisälly suoraan $\overleftrightarrow{DE}$. Silloin on olemassa yksi ja vain yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$.
(H12) Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.
(H13) (SKS) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
(AA) (Arkhimedeen aksiooma.) Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * D * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$.
(DA) (Dedekindin aksiooma.) Olkoon ℓ suora, $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \ell\}$ sen kaikkien pisteiden joukko ja D_1 ja $D_2 \subset L$ siten, että D_1 ja D_2 toteuttavat Dedekindin ehdot. Tällöin on olemassa tasan yksi piste $P \in L$ siten, että kaikille $Q, R \in L$ pätee $Q * P * R$, jos ja vain jos $Q \in D_1$ ja $R \in D_2$ tai $Q \in D_2$ ja $R \in D_1$.

Toinen seuraavista.
(PAR) (Euklidinen aksiooma) Jos ℓ on suora ja P piste, joka ei sisälly suoraan A, niin P:n kautta kulkee korkeintaan yksi ℓ:n kanssa yhdensuuntainen suora.
(HYP) (Hyperbolinen aksiooma) On olemassa suora ℓ ja piste P suoran ℓ ulkopuolella siten, että P:n kautta kulkee ainakin kaksi eri ℓ:n suuntaista suoraa.

HAKEMISTO