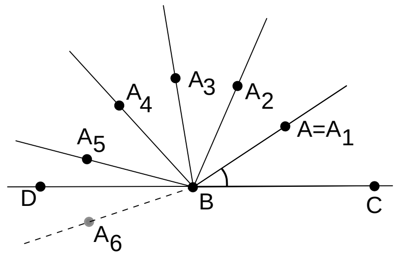
Kulmamitan konstruktio.

Seuraavaksi konstruoidaan kulmamitta. Konstruktio muistuttaa paljolti janamitan konstruktiota. Tässä ideana on käyttää ”yksikkökulmana” suoraa kulmaa — sovitaan, että sen astemitta on 90°. Puolittamalla toistuvasti suora kulma saadaan yhä pienempiä ja pienempiä apukulmia, joilla voidaan sitten approksimoida annettua kulmaa ja saada raja-arvona tällekin mitta. Konstruktiota varten tarvitaan kulman monikerran ja puolittajan käsitteet.

Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma. Konstruoidaan pisteet $A_1, A_2, A_3, \ldots$ seuraavasti: Valitaan ensin $A_1 = A$. Sitten valitaan D siten, että $D * B * C$ ja tämän jälkeen, olettaen että A_{n-1} on jo valittu, valitaan kulman $\measuredangle DBA_{n-1}$ sisältä piste A_n s.e. $\measuredangle A_nBA_{n-1} \cong \measuredangle ABC$. Sovitaan sitten, että *kulman* $\measuredangle ABC$ *n:s monikerta* on kulma $\measuredangle A_nBC$, ja merkitään sitä $n \cdot (\measuredangle ABC)$ tai lyhemmin $n\measuredangle ABC$. Tässä on heti sanottava, että pisteen A_n valinta ei välttämättä onnistu (Syy näkyy kuvasta, jossa A_6:n valinta ei enää onnistu.) ja monikerran määrittely loppuu siihen.

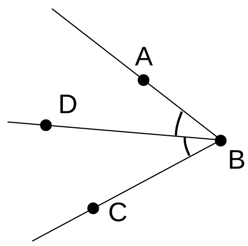


Kuva 78: Kulman monikerta

Jos A_n:n valinta onnistuu, niin syntyvä kulma $\measuredangle A_nBC$ on (H11):n yksikäsitteisyyspuolen nojalla yksikäsitteinen, ja määrittely on järkevää, kunhan se siis vain onnistuu.

Määritellään sitten kulman puolittaja.

Määritelmä 2.19. Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma. Puolisuora $\overrightarrow{BD}$ on *kulman* $\measuredangle ABC$ *puolittaja*, jos $\overrightarrow{BD}$ on $\overrightarrow{BA}$:n ja $\overrightarrow{BC}$:n välissä ja $\measuredangle ABD \cong \measuredangle DBC$.



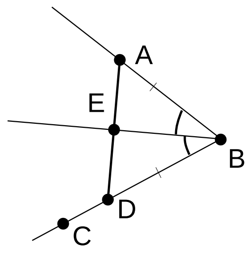
Kuva 79: Kulman puolittaja

LAUSE 2.5.11. *Olkoon* $\overrightarrow{BD}$ *kulman* $\measuredangle ABC$ *puolittaja. Tällöin monikerta* $2 \cdot (\measuredangle DBC)$ *on määritelty ja* $2 \cdot (\measuredangle DBC) \cong \measuredangle ABC$.

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

LAUSE 2.5.12. *Jokaisella kulmalla on yksikäsitteinen puolittaja.*

Todistus. Olkoon $\measuredangle ABC$ mielivaltainen kulma. Osoitetaan sen puolittajan olemassaolo konstruoimalla sellainen. Valitaan piste $D \in \overrightarrow{BC}$ s.e. $BA \cong BD$.



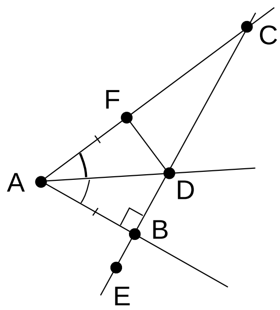
Kuva 80: Kulman puolitus

Lauseen 2.5.1 nojalla janalla AD on keskipiste, olkoon se E. Tällöin $A * E * D$, joten lauseen 2.3.9 nojalla $\overrightarrow{BE}$ on puolisuorien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BD}$ välissä. Janan keskipisteen määritelmän mukaan $AE \cong ED$, joten SSS-säännön nojalla saadaan $\triangle ABE \cong \triangle DBE$. Erityisesti $\measuredangle ABE \cong \measuredangle DBE = \measuredangle EBC$, joten $\overrightarrow{BE}$ on $\measuredangle ABC$:n puolittaja.

Yksikäsitteisyyden osoittamiseksi oletetaan, että myös $\overrightarrow{BF}$ on kulman $\measuredangle ABC$ puolittaja ja näytetään, että $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE}$. Puomilauseen 2.3.11 mukaan $\overrightarrow{BF}$ leikkaa janaa AD jossakin pisteessä G. SKS-säännön nojalla $\triangle ABG \cong \triangle DBG$, joten $AG \cong DG$. Tällöin G on janan AD keskipiste ja lauseen 2.5.1 yksikäsitteisyypuolen nojalla on oltava $G = E$. Koska $G \in \overrightarrow{BF}$, niin silloin $E \in \overrightarrow{BF}$, joten $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BF}$.
□

Ennen kulmamitan konstruktiota tarvitaan vielä yksi aputulos.

LAUSE 2.5.13. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa $\measuredangle B$ on suora. Olkoon $\overrightarrow{AD}$ kulman $\measuredangle A$ puolittaja siten, että $B * D * C$. Tällöin $BD < DC$.*
Todistus. Valitaan piste E siten, että $C * B * E$.

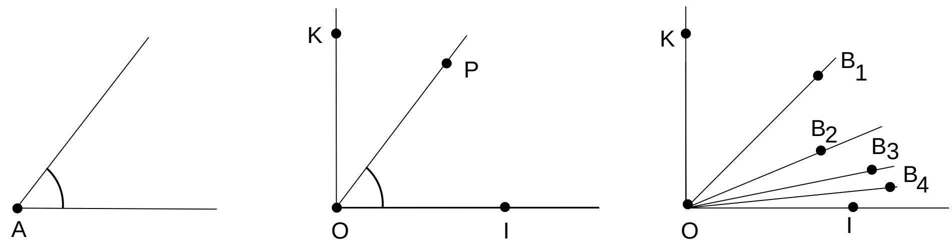


Kuva 81: Kulman puolittaja jakaa sivun näin

Ulkokulmaepäyhtälö 2.4.19 sovellettuna kolmioon $\triangle ABC$ antaa $\measuredangle C < \measuredangle ABE$. Tässä $\measuredangle ABE$ on suoran kulman $\measuredangle ABC$ täydennyskulma ja siis $\measuredangle ABE \cong \measuredangle ABC$. Siten $\measuredangle C < \measuredangle ABC$. Lause 2.4.22 sovellettuna kolmioon $\triangle ABC$ antaa tällöin $AB < AC$. Tämän perusteella voidaan valita F siten, että $A * F * C$ ja $AF \cong AB$. Koska $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\measuredangle FAB$ puolittaja, on $\measuredangle FAD \cong \measuredangle DAB$. Tällöin SKS-sääntö antaa $\triangle FAD \cong \triangle BAD$. Erityisesti $\measuredangle AFD \cong \measuredangle ABD$ ja $BD \cong FD$ $(*)$. Koska oletuksen mukaan $\measuredangle ABD$ on suora, niin lauseen 2.4.7 nojalla myös $\measuredangle AFD$ on suora ja siis myös sen täydennyskulma $\measuredangle CFD$ on suora ja lauseen 2.4.14 nojalla $\measuredangle CFD \cong$

$\measuredangle ABC$. Koska, kuten yllä todettiin, $\measuredangle C < \measuredangle ABC$, niin saadaan $\measuredangle C < \measuredangle CFD$. Sovelletaan nyt uudelleen lausetta 2.4.22, tällä kertaa kolmioon $\triangle FCD$ ja saadaan $FD < DC$. Tällöin on $(*)$:n nojalla $BD < CD$. □

Varsinainen kulmamitan konstruktio: Valitaan ensin jokin kiinteä suora kulma $\measuredangle KOI$, jossa lisäksi $KO \cong OI$. Tällainen on olemassa lauseen 2.4.16 nojalla. Olkoon sitten $\measuredangle A$ mielivaltainen kulma. Valitaan P siten, että $KP\overleftrightarrow{OI}$ ja $\measuredangle A \cong \measuredangle POI$. Lauseen 2.5.12 nojalla $\measuredangle KOI$:lla on puolittaja, olkoon se $\overrightarrow{OB_1}$. Edelleen $\measuredangle B_1OI$:lla on puolittaja, olkoon se $\overrightarrow{OB_2}$ jne.



Kuva 82: Kulma ja kulman mittauspalaset

Induktiolla voi todistaa, että $2^n \cdot (\measuredangle B_nOI) = \measuredangle KOI$. Tämän jätämme harjoitustehtäväksi; vertaa vastaavaan konstruktioon janamitan osalta. Edelleen induktiolla voidaan todeta, että monikertaa $2^{n+1} \cdot (\measuredangle B_nOI)$ ei voi enää määritellä (vaan tulos olisi "oikokulma"), mutta kaikki alemmat monikerrat saadaan määritellyksi, siis $k \cdot (\measuredangle B_nOI)$ on määritelty, jos ja vain jos $k = 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$. Määritellään nyt kaikille $n \in \mathbb{N}$

$$k_n = \begin{cases} 0, & \text{jos } \measuredangle B_nOI \not< \measuredangle POI \\ \max\{k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n+1} - 1\} \mid k \cdot (\measuredangle B_nOI) < \measuredangle POI\} & \text{muuten.} \end{cases}$$

Asetetaan edellen $m_n = k_n/2^n \in \mathbb{R}$. (Vertaa vastaaviin määrittelyihin janamitan konstruktiossa, tässä siis luku k_n kertoo kuinka monta kertaa $\measuredangle B_nOI$ mahtuu kulman POI sisälle.) Osoitetaan, että näin määritelty reaalilukujono $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee. Tunnetusti tätä varten riittää osoittaa, että se on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Suoraan määritelmästä näkyykin, että $k_n \leq 2^{n+1} - 1$ kaikilla n, joten

$$m_n = \frac{k_n}{2^n} \leq \frac{2^{n+1} - 1}{2} < 2 \quad \forall n$$

ja siis (m_n) on ylhäältä rajoitettu ja riittää tarkastaa sen kasvavuus.

Lauseen 2.5.11 mukaan $2(\measuredangle B_{n+1}OI) = \measuredangle B_nOI$, ja induktiolla nähdään, että

$$2k(\measuredangle B_{n+1}OI) = k(\measuredangle B_nOI) \quad \forall\, k = 1, \ldots, 2^{n+1} - 1.$$

Luvun k_n määritelmän mukaan tällöin $k_{n+1} \geq 2k_n$ ja edelleen

$$m_{n+1} = \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} \geq \frac{2k_n}{2^{n+1}} = \frac{k_n}{2^n} = m_n,$$

joten (m_n) on kasvava.

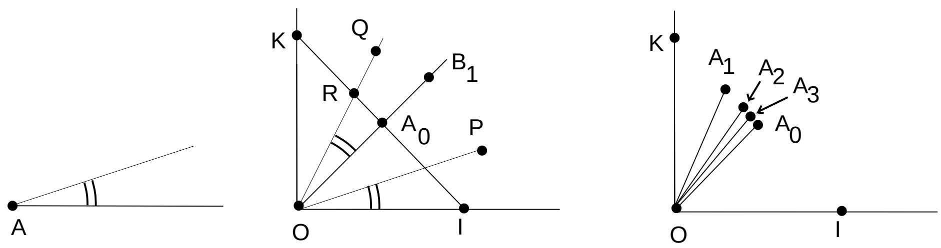
Näin ollen (m_n) suppenee kohti jotakin reaalilukua $\lim_n m_n \in \mathbb{R}$. Sanomme, että luku

$$(\measuredangle A)^\circ = 90 \cdot \lim_n m_n$$

on *kulman* $\measuredangle A$ *astemitta*. Tämä määritelmä on järkevä samoista syistä kuin janamitan määritelmäkin.

LAUSE 2.5.14. *Olkoon* $\measuredangle A$ *mielivaltainen kulma. Tällöin* $(\measuredangle A)^\circ > 0$.
Todistus. Todistuksen juoni on sama kuin janamitan tapauksessa. Pientä lisähankaluutta tulee kuitenkin siitä, että Arhkhimedeen aksiooma ei puhu kulmista vaan janoista ja kulmat joudutaan ennen sen käyttöä korvaamaan janoilla.

Nimetään aluksi apupisteet ja -luvut kuten edellä kulmamitan konstruktiossa. Koska (m_n) on kasvava jono ja $(m_n) \geq 0$, niin riittää osoittaa, että jokin luvuista m_n eroaa nollasta, mihin riittää se, että jokin k_n on nollasta eroava, mikä taas pätee, kunhan $\measuredangle B_nOI < \measuredangle POI$ jollekin n. Jos $\measuredangle B_1OI < \measuredangle POI$, niin asia on selvä. Jos $\measuredangle B_1OI \cong \measuredangle POI$, niin $\measuredangle B_2OI < \measuredangle POI$ ja asia on taas selvä. Voidaan siis olettaa, että $\measuredangle POI < \measuredangle B_1OI$. Koska $\overrightarrow{OB_1}$ on $\measuredangle KOI$:n puolittaja, niin $\measuredangle KOB_1 \cong \measuredangle B_1OI$ ja tällöin $\measuredangle POI < \measuredangle KOB_1$. Siten kulman $\measuredangle KOB_1$ sisällä on puolisuora $\overrightarrow{OQ}$ s. e. $\measuredangle QOB_1 \cong \measuredangle POI$.



KUVA 83: KULMAMITAN POSITIIVISUUS

Puomilauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{OB_1}$ leikkaa janaa KI. Olkoon leikkauspiste A_0. Vastaavasti $\overrightarrow{OQ}$ leikkaa janaa KA_0; olkoon leikkauspiste R Olkoon edelleen

kulman $\measuredangle KOA_0$ puolittajan ja KA_0:n leikkauspiste A_1
kulman $\measuredangle A_1OA_0$ puolittajan ja A_1A_0:n leikkauspiste A_2
kulman $\measuredangle A_2OA_0$ puolittajan ja A_2A_0:n leikkauspiste A_3
... ja yleisesti
kulman $\measuredangle A_{n-1}OA_0$ puolittajan ja $A_{n-1}A_0$:n leikkauspiste A_n.

Selvästi $A_{n-1} * A_n * A_0$ kaikilla n. Nyt $\measuredangle KOA_0 \cong \measuredangle B_1OI$, sillä $\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OB_1}$ on kulman $\measuredangle KOI$ puolittaja, joten näiden "puolitetut kulmat" $\measuredangle A_10A_0$ ja $\measuredangle B_2OI$ ovat myös yhtenevät. Tämän perustelu on sopiva harjoitustehtävä. Edelleen näidenkin "puolikkaat" ovat yhtenevät keskenään jne. Induktiolla saadaan:

$$(*) \qquad \measuredangle A_nOA_0 \cong \measuredangle B_{n+1}OI \quad \forall\, n$$

Koska alunperin lähdettiin siitä, että $OK \cong OI$, niin SKS-säännön avulla saadaan $\triangle KOA_0 \cong \triangle IOA_0$. Erityisesti $\measuredangle KA_0O \cong \measuredangle IA_0O$. Koska $K * A_0 * I$, niin nämä ovat toistensa täydennyskulmia ja siten $\measuredangle KA_0O$ on suora. Sovelletaan nyt lausetta

2.5.13 kolmioon $\triangle OA_0K$ ja saadaan $A_0A_1 < A_1K$. Vastaavasti kolmiosta $\triangle OA_0A_1$ saadaan $A_0A_2 < A_2A_1$ jne. Yleisesti

$$A_0A_n < A_nA_{n-1} \quad \forall\, n = 2, 3, \ldots$$

Tällöin lauseen 2.5.9 nojalla $\overline{A_0A_1} < \overline{A_1K}$ ja $\overline{A_0A_n} < \overline{A_nA_{n-1}}$ $\forall\, n = 2, 3, \ldots$ Toisaalta lauseen 2.5.4 nojalla $\overline{A_0A_1} + \overline{A_1K} = \overline{A_0K}$ ja $\overline{A_0A_n} + \overline{A_nA_{n-1}} = \overline{A_0A_{n-1}}$ $\forall\, n = 2, 3, \ldots$ Tästä saadaan induktiolla tulos

$$2^nA_0A_n < A_0K \quad \forall\, n = 2, 3, \ldots$$

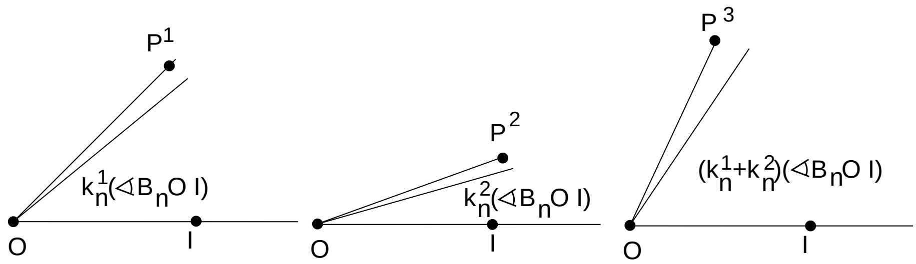
Palataan tarkastelemaan pistettä R. Arkhimedeen aksiooman nojalla on olemassa luku $m \in \mathbb{N}$, jolla $A_0K < mA_0R$. Valitaan n niin suureksi, että $2^n > m$, jolloin saadaan

$$2^nA_0A_n < A_0K < mA_0R < 2^nA_0R,$$

joten $2^nA_0A_n < 2^nA_0R$. On sopiva harjoitustehtävä osoittaa, että tästä seuraa $A_0A_n < A_0R$. Koska sekä A_n että R ovat puolisuoralla $\overrightarrow{A_0K}$, niin tämä merkitsee, että $A_0 * A_n * R$. Tämä taas lauseen 2.3.9 mukaan aiheuttaa sen, että $\measuredangle A_nOA_0 < \measuredangle ROA_0$. Aikaisemmin kohdassa $(*)$ todettiin, että $\measuredangle A_nOA_0 \cong \measuredangle B_{n+1}OI$ kaikilla n, ja toisaalta R:n valinnan nojalla pätee $\measuredangle ROA \cong \measuredangle POI$. Näistä päätellään $\measuredangle B_{n+1}OI < \measuredangle POI$, mikä on juuri sitä, mitä todistuksen alussa haluttiinkin.
□

LAUSE 2.5.15 (Kulmamitan additiivisuus). *Olkoon $\measuredangle ABC$ mielivaltainen kulma ja $\overrightarrow{BD}$ kylkien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ välissä. Tällöin $(\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ = (\measuredangle ABC)^\circ$.*

Todistus. Olkoot pisteet P^1, P^2 ja P^3 sekä luvut k_n^1, k_n^2 ja k_n^3 kulmamitan konstuktiossa käytettyjä vastaten kulmia $\measuredangle ABD$, $\measuredangle DBC$ ja $\measuredangle ABC$, tässä järjestyksessä.



Kuva 84: Kulmamitan additiivisuus

Lukujen k_n määritelmän mukaan

$$k_n^1(\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^1OI$$

ja

$$k_n^2(\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^2OI.$$

Täten

$$(k_n^1 + k_n^2)(\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^3OI.$$

Tämän tarkka perustelu jää harjoitustehtäväksi. Se menee samaan tapaan kuin lauseen 2.5.4 todistuksen vastaava kohta. (Huomaa, että tämä on tämän todistuksen lähes ainoa paikka, jossa tarvitaan oletusta "$\overrightarrow{BD}$ on $\overrightarrow{BA}$:n ja $\overrightarrow{BC}$:n välissä".) Tällöin, edelleen k_n:n määritelmän mukaan

$$k_n^3 \geq k_n^1 + k_n^2.$$

Toisaalta taas $k_n^1 + 1$:lle pätee

$$(k_n^1 + 1)(\measuredangle B_n OI) \not< \measuredangle P^1 OI$$

ja vastaavasti

$$(k_n^2 + 1)(\measuredangle B_n OI) \not< \measuredangle P^2 OI,$$

joten voidaan päätellä, että

$$\big((k_n^1 + 1) + (k_n^2 + 1)\big)(\measuredangle B_n OI) \not< \measuredangle P^3 OI.$$

Tämä jää harjoitustehtäväksi. Tästä seuraa lukujen k_n määritelmän mukaan $k_n^3 < (k_n^1 + 1) + (k_n^2 + 1)$, eli, koska kyse on kokonaisluvuista, $k_n^3 \leq k_n^1 + k_n^2 + 1$. Nyt siis $k_n^1 + k_n^2 \leq k_n^3 \leq k_n^1 + k_n^2 + 1$, joten

$$\frac{k_n^1}{2^n} + \frac{k_n^2}{2^n} \leq \frac{k_n^3}{2^n} \leq \frac{k_n^1}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Antamalla $n \to \infty$ saadaan $(\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ \leq (\measuredangle ABC)^\circ \leq (\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ$ ja väite seuraa. □

LAUSE 2.5.16. *Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kulmia. Tällöin $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, jos ja vain jos $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ$.*

Todistus. 1° Jos $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, niin mittakonstruktiossa käytettävät pisteet P ja siten myös luvut k_n ja m_n ovat samoja kummallekin kulmalle ja niin raja-arvokin on sama.

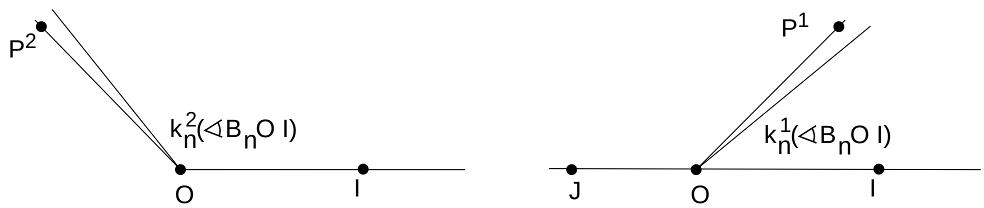
2° Olkoon $(\measuredangle ABC)^\circ \neq (\measuredangle DEF)^\circ$. Tehdään vastaoletus: $\measuredangle ABC \not\cong \measuredangle DEF$. Tällöin lauseen 2.4.12 nojalla joko $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$ tai $\measuredangle DEF < \measuredangle ABC$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voi olettaa, että $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$. Tällöin $\overrightarrow{ED}$:n ja $\overrightarrow{EF}$:n välissä on puolisuora $\overrightarrow{EG}$ siten, että $\measuredangle GEF \cong \measuredangle ABC$. Nyt kohdan 1° nojalla $(\measuredangle GEF)^\circ = (\measuredangle ABC)^\circ$ ja lauseen 2.5.15 nojalla $(\measuredangle DEF)^\circ = (\measuredangle DEG)^\circ + (\measuredangle GEF)^\circ$, joten saadaan

$$(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ = (\measuredangle DEG)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ,$$

josta edelleen $(\measuredangle DEG)^\circ = 0$, mikä on vastoin lausetta 2.5.14. □

LAUSE 2.5.17. *Olkoot $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ toistensa täydennyskulmia. Tällöin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = 180$.*

Todistus. Olkoot pisteet P^1 ja P^2 sekä luvut k_n^1 ja k_n^2 kulmamitan konstruktiossa käytettyjä, vastaten kulmia $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ tässä järjestyksessä. Olkoon lisäksi piste J siten, että $J * O * I$. Tällöin kulma $\measuredangle JOP^1$ on kulman $\measuredangle P^1 OI$ täydennyskulma. Koska $\measuredangle P^1 OI \cong \measuredangle A$ niin lauseen 2.4.5 nojalla $\measuredangle JOP^1 \cong \measuredangle B$ ja siten $\measuredangle JOP^1 \cong \measuredangle P^2 OI$.



KUVA 85: TÄYDENNYSKULMIEN MITAT

Yleisesti on niin, että jos $\measuredangle ROI < \measuredangle P^1OI$, niin täydennyskulmille pätee $\measuredangle JOP^1 < \measuredangle JOR$, mikä seuraa suoraan lauseesta 2.3.10 iii). Toisaalta kulman $k \cdot (\measuredangle B_nOI)$, $k = 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$ täydennyskulma on yhtenevä kulman $(2^{n+1} - k) \cdot (\measuredangle B_nOI)$ kanssa, minkä voi tarkastaa induktiolla n:n suhteen. (Tee se!) Siis, jos pätee $k \cdot (\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^1OI$, niin täydennyskulmille saadaan

$$\measuredangle JOP^1 < \big(2^{n+1} - k(\measuredangle B_nOI)\big)$$

ja siten

$$\measuredangle P^2OI < \big(2^{n+1} - k(\measuredangle B_nOI)\big).$$

Lukujen k_n määritelmän nojalla $k_n^1(\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^1OI$, joten $\measuredangle P^2OI < (2^{n+1} - k_n^1)(\measuredangle B_nOI)$, mistä seuraa, että

$$k_n^2 \leq 2^{n+1} - k_n^1 - 1.$$

Toisaalta $k_n^2 \geq 2^{n+1} - k_n^1 - 2$, minkä perustelemme seuraavasti: Jos $2^{n+1} - k_n^1 - 2 \leq 0$, niin asia on selvä. Olkoon siis $2^{n+1} - k_n^1 - 2 > 0$. Lukujen k_n määritelmän nojalla riittää osoittaa, että $(2^{n+1} - k_n^1 - 2)(\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^2OI$. Ylläolevia täydennyskulmia koskeva tarkastelu toistamalla nähdään, että näin on, mikäli

$$\measuredangle P^1OI < \big(2^{n+1} - (2^{n+1} - k_n^1 - 2)\big) \cdot (\measuredangle B_nOI)$$

eli

$$\measuredangle P^1OI < (k_n^1 + 2) \cdot (\measuredangle B_nOI).$$

Tämä puolestaan pätee, sillä määritelmän mukaan $\measuredangle P^1OI < (k^1 + 1)(\measuredangle B_nOI)$ tai $\measuredangle P^1OI \cong (k^1 + 1)(\measuredangle B_nOI)$. Koska $(k_n^1 + 1)(\measuredangle B_nOI) < (k_n^1 + 2)(\measuredangle B_nOI)$, niin kummassakin tapauksessa $\measuredangle P^1OI < (k_n^1 + 2)(\measuredangle B_nOI)$. Kaiken kaikkiaan on siis nähty, että

$$2^{n+1} - k_n^1 - 2 \leq k_n^2 \leq 2^{n+1} - k_n^1 - 1,$$

jolloin $2^{n+1} - 2 \leq k_n^1 + k_n^2 \leq 2^{n+1} - 1$ ja edelleen

$$2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{k_n^1}{2^n} + \frac{k_n^2}{2^n} \leq 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Annetaan $n \to \infty$ ja kerrotaan astemitan määritelmässä olevalla skaalauskertoimella 90, jolloin saadaan lopulta

$$180 \leq (\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ \leq 180,$$

josta väite seuraa. □

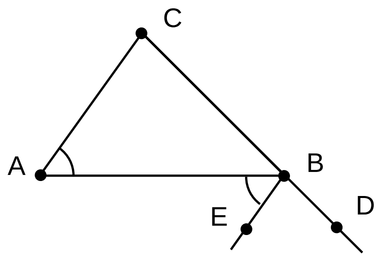
LAUSE 2.5.18. *Olkoon $\measuredangle A$ kulma. Tällöin $(\measuredangle A)^\circ < 180$.*
Todistus. Seuraa suoraan lauseista 2.5.17 ja 2.5.14. □

LAUSE 2.5.19. *Olkoon $\measuredangle A$ kulma. Tällöin $\measuredangle A$ on suora, jos ja vain jos $(\measuredangle A)^\circ = 90$.*
Todistus. 1°) Olkoon $\measuredangle A$ suora kulma ja $\measuredangle B$ sen täydennyskulma. Tällöin $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ ja lauseen 2.5.16 nojalla $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle B)^\circ$. Toisaalta lauseen 2.5.17 mukaan $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = 180$, joten $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle A)^\circ = 180$ eli $(\measuredangle A)^\circ = 90$.
2°) Olkoon $(\measuredangle A)^\circ = 90$. ja $\measuredangle B$ jokin suora kulma. Kohdan 1° nojalla $(\measuredangle B)^\circ = 90$, joten $(\measuredangle B)^\circ = (\measuredangle A)^\circ$ ja lauseen 2.5.16 mukaan tällöin $\measuredangle B \cong \measuredangle A$ ja väite seuraa lauseesta 2.4.7. □

LAUSE 2.5.20. *Olkoot $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ kulmia. Tällöin $\measuredangle A < \measuredangle B$, jos ja vain jos $(\measuredangle A)^\circ < (\measuredangle B)^\circ$.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Koulukurssista mahdollisesti tuttu tieto on, että "kolmion kulmien astemittojen summa on 180". Osataanko tällaista todistaa nyt? Ei osata, sillä on olemassa malleja, jotka toteuttavat tähänastiset aksioomat, mutta joissa kolmion kulmien astelukujen summa on pienempi kuin 180. Jotakin tämänsuuntaista osaamme kuitenkin jo todistaa tähänastisista aksioomista:

LAUSE 2.5.21. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ < 180$.*
Todistus. Valitaan piste D siten, että $D * B * D$.



Kuva 86: Kahden kulman summa

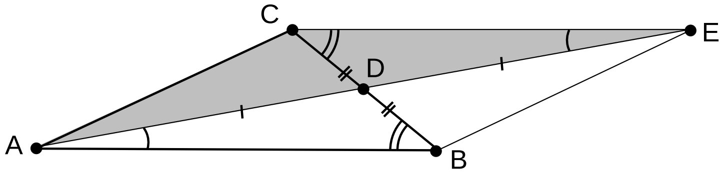
Ulkokulmaepäyhtälön 2.4.19 nojalla $\measuredangle A < \measuredangle ABD$. Tällöin puolisuorien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BD}$ välissä on $\overrightarrow{BE}$ siten, että $\measuredangle ABE \cong \measuredangle A$. Nyt lauseen 2.3.10 iii) nojalla $\overrightarrow{BA}$ on $\overrightarrow{BC}$:n ja $\overrightarrow{BE}$:n välissä, joten voidaan soveltaa lausetta 2.5.15 jonka mukaan $(\measuredangle CBA)^\circ + (\measuredangle ABE)^\circ = (\measuredangle CBE)^\circ$. Lauseen 2.5.16 nojalla $(\measuredangle ABE)^\circ = (\measuredangle A)^\circ$ ja siten lauseen 2.5.18 nojalla saadaan $(\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle A)^\circ < 180$. □

Lausetta 2.5.21 voidaan parantaa; seuraava tulos on nimeltään Saccherin[16] ja Legendre'in lause.

[16] Giovanni Girolamo Saccheri 1667–1733. Italia

LAUSE 2.5.22 (Saccheri ja Legendre). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin* $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ \leq 180$.

Todistus. Vaihtamalla tarvittaessa merkintöjä voidaan olettaa, että $(\measuredangle A)^\circ \leq (\measuredangle B)^\circ$ ja $(\measuredangle A)^\circ \leq (\measuredangle C)^\circ$. Merkitään $\alpha = (\measuredangle A)^\circ$. Lauseen 2.5.1 nojalla janalla BC on keskipiste, olkoon se D. Valitaan lisäksi piste E siten. että $A * D * E$ ja $AD \cong DE$.



KUVA 87: SACCHERIN JA LEGENDRE'IN LAUSE

Lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle ADB \cong \measuredangle EDC$, jolloin SKS-säännön nojalla $\triangle ADB \cong \triangle EDC$. Erityisesti $\measuredangle B \cong \measuredangle DCE$ ja $\measuredangle BAD \cong \measuredangle CED$. Koska $B * D * C$ ja $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$, niin $\overrightarrow{AE}$ on kulman $\measuredangle BAC$ sisällä, jolloin lauseen 2.5.15 nojalla

$$(*) \qquad (\measuredangle BAD)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ.$$

Koska $A * D * E$ ja $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$, niin $\overrightarrow{CB}$ on kulman $\measuredangle ACE$ sisällä, ja lauseesta 2.5.15 saadaan

$$(**) \qquad (\measuredangle ACB)^\circ + (\measuredangle BCE)^\circ = (\measuredangle ACE)^\circ.$$

Yhdistämällä nämä tiedot saadaan

$$\begin{aligned}
&(\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle C)^\circ \\
=&(\measuredangle ABC)^\circ + (\measuredangle BAC)^\circ + (\measuredangle ACB)^\circ \\
=&(\measuredangle DCE)^\circ + \big((\measuredangle BAD)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ\big) + \big((\measuredangle ACE)^\circ - (\measuredangle BCE)^\circ\big) \\
=&(\measuredangle BCE)^\circ + (\measuredangle CED)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ + (\measuredangle ACE)^\circ - (\measuredangle BCE)^\circ \\
=&(\measuredangle CEA)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ + (\measuredangle ACE)^\circ.
\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa sitä, että kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle AEC$ kulmien astemittojen summat ovat samat. Lisäksi, koska $(\measuredangle AEC)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ = (\measuredangle BAE)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ = \alpha$, niin joko $(\measuredangle AEC)^\circ \leq \frac{1}{2}\alpha$ tai $(\measuredangle EAC)^\circ \leq \frac{1}{2}\alpha$. On siis löydetty uusi kolmio $\triangle AEC$, jonka kulmien astemittojen summa on sama kuin alkuperäisessä, mutta pienimmän kulman astemitta on korkeintaan $\frac{1}{2}\alpha$.

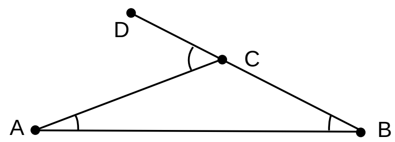
Tehdään nyt sama temppu uudelle kolmiolle $\triangle AEC$, jolloin saadaan taas uusi kolmio, jonka kulmien astemittojen summa on edelleen sama, mutta pienimmän kulman astemitta on korkeintaan $\frac{1}{4}\alpha$. Toistamalla menettely n kertaa saadaan aikaan kolmio Δ_n, jonka kulmien astelukujen summa on sama kuin alkuperäisen kolmion $\triangle ABC$, mutta pienimmän kulman astemitta on korkeintaan $1/2^n$. Palataan nyt varsinaiseen väitteeseen $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ \leq 180$. Tehdään vastaoletus: $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ > 180$. Merkitään $\delta = (\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ - 180$, jolloin $\delta > 0$. Valitaan luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{2^n}\alpha < \delta$ ja olkoon Δ_n yllä-konstruoitu kolmio, olkoot $\measuredangle A'$, $\measuredangle B'$ ja $\measuredangle C'$ sen kulmat ja $\measuredangle A'$ niistä pienin, jolloin

$(\measuredangle A') \leq (1/2^n)\,\alpha < \delta$. Lauseen 2.5.21 nojalla $(\measuredangle B')^\circ + (\measuredangle C')^\circ < 180$ ja toisaalta Δ_n:n konstruktion nojalla $(\measuredangle A')^\circ + (\measuredangle B')^\circ + (\measuredangle C')^\circ = (\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ$. Tällöin saadaan

$$\delta = (\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ - 180 = (\measuredangle A')^\circ + (\measuredangle B')^\circ + (\measuredangle C')^\circ - 180 < \delta + 180 - 180 = \delta,$$

eli $\delta < \delta$, mikä on mahdotonta. □

Jos $\triangle ABC$ on kolmio ja $B * C * D$, niin ulkokulmaepäyhtälön 2.4.19 mukaan $\measuredangle B < \measuredangle ACD$ ja $\measuredangle A < \measuredangle ACD$, jolloin lauseen 2.5.20 perusteella $(\measuredangle B)^\circ < (\measuredangle ACD)^\circ$ ja $(\measuredangle A)^\circ < (\measuredangle ACD)^\circ$. Saccherin ja Legendre'in lauseen avulla tätä tulosta voidaan parantaa.



KUVA 88: ULKOKULMA

LAUSE 2.5.23. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $B * C * D$. Tällöin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ \leq (\measuredangle ACD)^\circ$.*

Todistus. Todistus sopii harjoitustehtäväksi. □

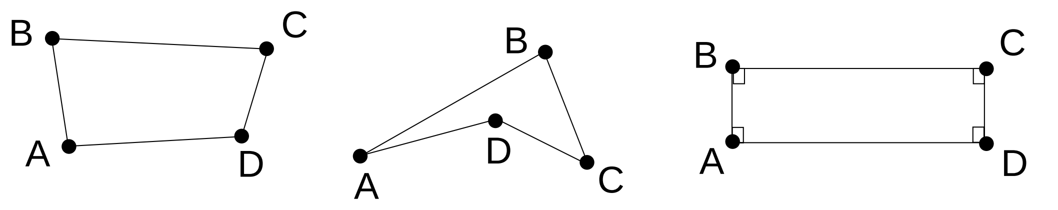
Määritelmä 2.20. Olkoot $\triangle ABC$ kolmio. Sanotaan, että kolmion $\triangle ABC$ *defekti*, eli *kulmapoikkeama* $\operatorname{def}(\triangle ABC)$ on luku

$$\operatorname{def}(\triangle ABC) = 180 - \big((\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ\big) \in \mathbb{R}.$$

Jos aiemmin mainittu koulukurssin tieto kolmion kulmien summasta pitäisi paikkansa, niin jokaisen kolmion defekti olisi nolla, eikä määritelmässä olisi mitään järkeä. Näin ei siis kuitenkaan ole, vaan on olemassa malleja, joissa voi olla $\operatorname{def}(\triangle ABC) > 0$ jollekin kolmiolle. Huomaa, että Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla defekti ei voi olla negatiivinen. Koordinaattitason pisteiden ja suorien muodostamassa mallissa, joka toteuttaa kaikki tähänastiset aksioomat, pätee $\operatorname{def}(\triangle ABC) = 0$ jokaiselle kolmiolle. Toisaalta myöhemmin konstruoimme ns. Poincarén mallin, jossa $\operatorname{def}(\triangle ABC) > 0$ jokaiselle kolmiolle. Sellaisia malleja, joissa olisi $\operatorname{def}(\triangle ABC) = 0$ jollekin kolmiolle ja $\operatorname{def}(\triangle DEF) > 0$ jollekin toiselle kolmiolle, ei ole olemassa. Tämä tullaan kohta todistamaan. Asia liittyy läheisesti suorakulmioon, joka ensin määritellään.

Määritelmä 2.21. Olkoot A, B, C ja D eri pisteitä siten, että mitkään kolme niistä eivät ole samalla suoralla ja niin, että janat AB ja CD eivät leikkaa toisiaan eivätkä myöskään BC ja AD leikkaa toisiaan.

(1) Näiden janojen muodostama joukko on *nelikulmio* $\square ABCD$.
(2) Pisteet A, B, C ja D ovat nelikulmion *kärjet*.
(3) Janat AB, BC, DC ja DA ovat sen *sivut*.
(4) $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$ ja DAB ovat sen *kulmat*.
(5) Nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria kulmia, on *suorakulmio*.



Kuva 89: Nelikulmioita

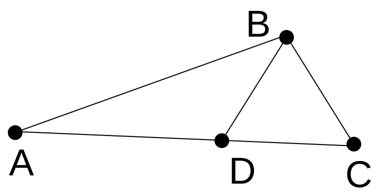
Joukko $\{A, B, C, D\}$ ei ole nelikulmio, vaan vasta järjestetty pistenelikkö (A, B, C, D) määrää nelikulmion, jos sekään. Seuraavassa kuvassa ei $\square ABCD$ eikä myöskään $\square EFGH$ ole nelikulmio, mutta $\square EGFH$ on.

Kuva 90: Eivät nelikulmioita

Huomautus 25. Suorakulmaisia kolmioita on helppo konstruoida, tämähän seuraa lauseesta 2.4.8. Voisi luulla, että suorakulmion konstruointi olisi yhtä yksinkertaista. Näin ei kuitenkaan ole. Kokeile! Kolme kulmaa saa aina suoraksi, mutta se neljäs....

Tässä tuleekin vastaan aika yllättävä ongelma: onko suorakulmioita olemassa ollenkaan? Tavallisessa koordinaattigeometriassa näitä toki on, mutta yo. kysymys pitää ymmärtää niin, että onko jokaisessa tähänastiset aksioomat toteuttavassa mallissa suorakulmioita. Tätä asiaa tutkitaan jatkossa. Todistetaan ensin pieni mutta kiintoisa aputulos:

LAUSE 2.5.24 (Defektin additiivisuus). *Olkoon* $\triangle ABC$ *kolmio ja* $A * D * C$. *Tällöin* $\operatorname{def}(\triangle ABC) = \operatorname{def}(\triangle ADB) + \operatorname{def}(\triangle BDC)$.



Kuva 91: Defektin additiivisuus

Todistus. Koska $A * D * C$, niin $\overrightarrow{BD}$ on $\overrightarrow{BA}$:n ja $\overrightarrow{BC}$:n välissä, joten lauseen 2.5.15 mukaan $(\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ = (\measuredangle ABC)^\circ$. Toisaalta $\measuredangle ADB$ on kulman $\measuredangle BDC$

täydennyskulma, joten lauseen 2.5.17 nojalla $(\measuredangle ADB)^\circ + (\measuredangle BDC)^\circ = 180$. Tällöin

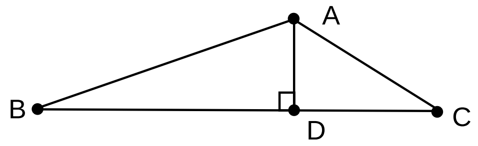
$$
\begin{aligned}
&\operatorname{def}(\triangle ADB) + \operatorname{def}(\triangle BDC)\\
=&180 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle ADB)^\circ - (\measuredangle ABD)^\circ + 180 - (\measuredangle C)^\circ - (\measuredangle BDC)^\circ - (\measuredangle DBC\\
=&360 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle C)^\circ - \big((\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ\big) - \big((\measuredangle ADB)^\circ + (\measuredangle BDC)^\circ\big)\\
=&180 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle C)^\circ - (\measuredangle B)^\circ = \operatorname{def}(\triangle ABC).
\end{aligned}
$$

□

Suorakulmioiden olemassaolo ja kolmioiden defekti liittyvät läheisesti toisiinsa:

LAUSE 2.5.25. *Jos on olemassa kolmio, jonka defekti on nolla, niin on olemassa suorakulmio.*

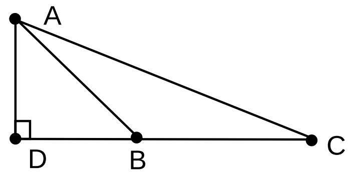
Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jolle $\operatorname{def}(\triangle ABC) = 0$. Saccherin ja Legendre'in lauseen 2.5.14 nojalla jokaisessa kolmiossa on ainakin kaksi kulmaa, joiden astemitta on alle 90. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan nyt olettaa, että $(\measuredangle B)^\circ < 90$ ja $(\measuredangle C)^\circ < 90$. Lauseen 2.4.8 nojalla A:n kautta kulkee suoran $\overleftrightarrow{BC}$ normaali, olkoon D sen ja $\overleftrightarrow{BC}$:n leikkauspiste.



Kuva 92: Apupiirros

Osoitetaan aluksi, että $B * D * C$: Jos näin ei olisi, niin toteutuisi jokin vaihtoehdoista

a) $D * B * C$
b) $D = B$
c) $D = C$
d) $D * C * B$



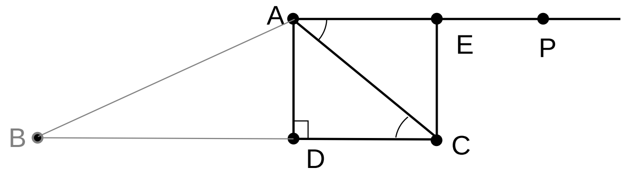
Kuva 93: Tapaus a)

Tapauksessa a) on lauseen 2.5.23 mukaan $(\measuredangle D)^\circ + (\measuredangle DAB)^\circ \leq (\measuredangle ABC)^\circ$. Tässä $\measuredangle D$ on suora, joten lauseen 2.5.19 nojalla $(\measuredangle D)^\circ = 90$ ja lauseen 2.5.14 mukaan $(\measuredangle DAB)^\circ > 0$, ja siis $90 < (\measuredangle ABC)^\circ$, mikä on vastoin oletusta $(\measuredangle B)^\circ < 90$.

Tapauksessa b) kulma $\measuredangle ABC$ on suora ja siten $(\measuredangle ABC)^\circ = 90$, mikä on taas vastoin oletusta. Tapaus c) on samanlainen kuin b) ja d) samanlainen kuin a).

On siis nähty, että $B * D * C$. Tällöin lauseen 2.5.24 nojalla $\operatorname{def}(\triangle ABC) =$

$\mathrm{def}(\triangle ABD) + \mathrm{def}(\triangle ADC)$. Koska oletuksen mukaan $\mathrm{def}(\triangle ABC) = 0$ ja Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla jokaisen kolmion defekti on ei-negatiivinen, niin tämä on mahdollista ainoastaan, mikäli $\mathrm{def}(\triangle ABD) = 0 = \mathrm{def}(\triangle ADC)$. On siis löydetty nimenomaan suorakulmainen kolmio, jolla on defekti 0 eli kulmien astelukujen summa 180.



Kuva 94: Suorakulmion konstruktio

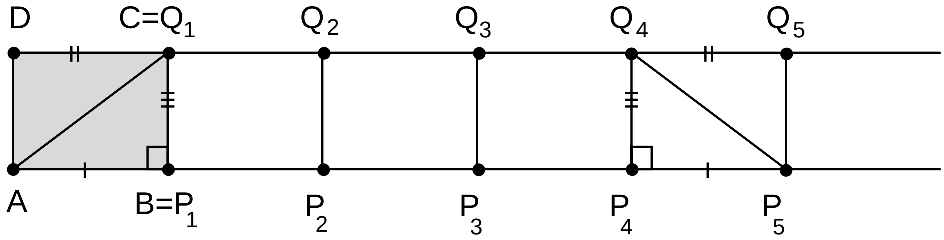
Valitaan nyt piste P siten, että $D\overleftrightarrow{AC}P$ ja $\measuredangle DCA \cong \measuredangle CAP$ ja edelleen valitaan $E \in \overrightarrow{AP}$ siten, että $AE \cong DC$. Tällöin SKS-säännön nojalla $\triangle DCA \cong \triangle EAC$. Erityisesti $\measuredangle ADC \cong \measuredangle CEA$. Koska $\overleftrightarrow{AD}$ on suoran $\overleftrightarrow{BC}$ normaali, niin kulma $\measuredangle ADC$ on suora. Lauseen 2.4.7 nojalla tällöin myös kulma $\measuredangle CEA$ on suora. Osoitetaan, että myös $\measuredangle EAD$ on suora: Lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ eli suorat eivät leikkaa toisiaan, joten $DC\overleftrightarrow{AE}$. Koska $\triangle DCA \cong \triangle EAC$, niin $\measuredangle DAC \cong \measuredangle ECA$, jolloin lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$, josta seuraa, että $EC\overleftrightarrow{AD}$. Tällöin määritelmän mukaan C on kulman $\measuredangle EAD$ sisällä eli $\overrightarrow{AC}$ on $\overrightarrow{AE}$:n ja $\overrightarrow{AD}$:n välissä. Lauseen 2.5.15 nojalla $(\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle CAE)^\circ = (\measuredangle EAD)^\circ$. Koska $\measuredangle CAE \cong \measuredangle ACD$, niin lauseen 2.5.16 mukaan $(\measuredangle CAE)^\circ = (\measuredangle ACD)^\circ$ ja saadaan $(\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ = (\measuredangle EAD)^\circ$. Nyt käytetään hyväksi sitä tietoa, että $\mathrm{def}(\triangle ACD) = 0$. Tällöin näet $(\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ = 180 - (\measuredangle D)^\circ$ ja koska $\measuredangle D$ on suora, $180 - (\measuredangle D)^\circ = 180 - 90 = 90$. Siten saadaan $(\measuredangle EAD)^\circ = (\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ = 90$, joten lauseen 2.5.19 nojalla $\measuredangle EAD$ on suora.

Vastaavasti nähdään, että myös $\measuredangle DCE$ on suora, sillä ensinnäkin $AE\overleftrightarrow{DC}$ ja $AD\overleftrightarrow{EC}$, joten $\overrightarrow{CA}$ on $\overrightarrow{CD}$:n ja $\overrightarrow{CE}$:n välissä ja saadaan $(\measuredangle DCA)^\circ + (\measuredangle ACE)^\circ = (\measuredangle DCE)^\circ$. Käyttäen hyväksi tietoja $(\measuredangle ACE)^\circ = (\measuredangle DAC)^\circ$ ja $\mathrm{def}(\triangle ADC) = 0$ sekä $(\measuredangle D)^\circ = 90$ saadaan kuten edellä $(\measuredangle DCE)^\circ = 90$ ja siten $\measuredangle DCE$ on suora.

Koska, kuten todettiin, $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AE}$ ja $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{EC}$, niin mitkään kolme pisteistä A, D, C ja E eivät voi kuulua samalle suoralle, eivätkä janat AD, DC, CE ja EA voi leikata toisiaan muualla kuin päätepisteissä, joten $\square ADCE$ on nelikulmio. Koska sen kaikki kulmat ovat suoria, se on suorakulmio. $\square$

LAUSE 2.5.26. *Jos on olemassa suorakulmio, niin jokaisen kolmion defekti on nolla.*

Todistus. Olkoon $\square ABCD$ suorakulmio ja $\triangle EFG$ mielivaltainen kolmio. Tässä on kaksi mahdollisuutta; joko a) $\triangle EFG$ on suorakulmainen tai b) $\triangle EFG$ ei ole suorakulmainen. Osoittautuu, että tapaus b) palautuu suorakulmaisen kolmion tapaukseen a) ja että lause on a)-tapauksessa helppo todistaa, kunhan suorakulmio on niin suuri, että kolmio voidaan kopioida sen nurkkaan kuvion 97 mukaisesti. Todistus alkaa siksi niin, että suurennamme suorakulmiotamme $\square ABCD$. Valitaan kaikille $n \in \mathbb{N}$ pisteet $P_n \in \overrightarrow{AB}$ ja $Q_n \in \overrightarrow{DC}$ siten, että $AP_n \cong n \cdot AB$ ja $DQ_n \cong n \cdot DQ$.



Kuva 95: Suorakulmion ensimmäinen laajennus

Todistamme aluksi induktiolla n:n suhteen, että jokainen $\square AP_nQ_nD$ on suorakulmio, jossa $P_nQ_n \cong BC$. Tapaus $n = 1$ on tietysti kunnossa. Oletetaan, että väite on tosi arvolla n ja osoitetaan se todeksi myös arvolla $n + 1$. Pitää näyttää, että

(1) $\square AP_{n+1}Q_{n+1}D$ on nelikulmio.
(2) Nelikulmion $\square AP_{n+1}Q_{n+1}D$ kulmat ovat suoria.
(3) $P_{n+1}Q_{n+1} \cong BC$.

(1) Oletuksen nojalla $\overleftrightarrow{DC}$ ja $\overleftrightarrow{AB}$ ovat suoran $\overleftrightarrow{AD}$ normaaleja, ja siten lauseen 2.4.17 mukaan yhdensuuntaisia. Koska D ja Q_{n+1} ovat suoralla $\overleftrightarrow{DC}$ ja A ja P_{n+1} suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, niin mitkään kolme niistä eivät voi olla samalla suoralla. $\overleftrightarrow{AB}$:n ja $\overleftrightarrow{DC}$:n yhdensuuntaisuudesta seuraa lisäksi se, että janat AP_{n+1} ja DQ_{n+1} eivät voi leikata toisiaan. Pitää vielä osoittaa, että myöskään janat AD ja $P_{n+1}Q_{n+1}$ eivät leikkaa toisiaan. Tämä seuraa siitä, että oletuksen nojalla $\overleftrightarrow{BC}$ ja $\overleftrightarrow{AD}$ ovat $\overleftrightarrow{AB}$:n normaaleja, joten lauseen 2.4.17 mukaan $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, jolloin $BC\overleftrightarrow{AD}$ ja koska $P_{n+1}B\overleftrightarrow{AD}$ ja $Q_{n+1}C\overleftrightarrow{AD}$, niin $P_{n+1}Q_{n+1}\overleftrightarrow{AD}$. Näin jana $P_{n+1}Q_{n+1}$ ei voi leikata edes suoraa $\overleftrightarrow{AD}$ eikä erityisesti janaa AD.

(2) Valintojen nojalla $P_nP_{n+1} \cong AB$ ja $Q_nQ_{n+1} \cong DC$. Lisäksi induktio-oletuksen nojalla $P_nQ_n \cong BC$ ja kulma $\measuredangle AP_nQ_n$ on suora, jolloin myös sen täydennyskulma $\measuredangle P_{n+1}P_nQ_n$ on suora. Tällöin siis SKS-säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle P_{n+1}P_nQ_n$. Erityisesti $AC \cong P_{n+1}Q_n$ ja $\measuredangle ACB \cong \measuredangle P_{n+1}Q_nP_n$. Induktio-oletuksen nojalla myös $\measuredangle DQ_nP_n$ on suora ja siten myös sen täydennyskulma $\measuredangle Q_{n+1}Q_nP_n$ on suora. Nyt $\overrightarrow{Q_nP_{n+1}}$ on puolisuorien $\overrightarrow{Q_nP_n}$ ja $\overrightarrow{Q_nQ_{n+1}}$ välissä (Koska $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, eli $\overleftrightarrow{P_nP_{n+1}} \parallel \overleftrightarrow{Q_nQ_{n+1}}$, niin $P_nP_{n+1}\overleftrightarrow{Q_nQ_{n+1}}$. Koska $\overleftrightarrow{Q_nP_n} \parallel \overleftrightarrow{DA}$ niin $DA\overleftrightarrow{Q_nP_n}$ ja siis $Q_{n+1}P_{n+1}\overleftrightarrow{Q_nP_n}$. Kulmamitan additiivisuuslause 2.5.15 antaa siis $(\measuredangle P_nQ_nP_{n+1})^\circ + (\measuredangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1})^\circ = (\measuredangle P_nQ_nQ_{n+1})^\circ$. Koska, kuten todettiin, $\measuredangle P_nQ_nQ_{n+1}$ on suora, saadaan lauseen 2.5.19 nojalla

$$(*) \qquad (\measuredangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1})^\circ = 90 - \left(\measuredangle P_nQ_nP_{n+1}\right)^\circ.$$

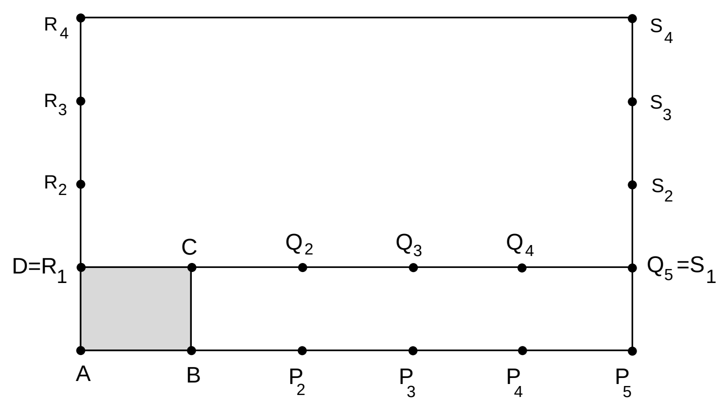
Vastaavasti $\overrightarrow{CA}$ on $\overrightarrow{CD}$:n ja $\overrightarrow{CB}$:n välissä (Totea!) ja $\measuredangle DCB$ on oletuksen nojalla suora, joten 2.5.15 antaa $(\measuredangle DCA)^\circ + (\measuredangle ACB)^\circ = (\measuredangle DCB)^\circ$, josta edelleen 2.5.19:n nojalla

$$(**) \qquad (\measuredangle DCA)^\circ = 90 - (\measuredangle ACB)^\circ.$$

Koska, kuten yllä todettiin, $\measuredangle ACB \cong \measuredangle P_nQ_nP_{n+1}$, niin 2.5.16:n nojalla $(\measuredangle ACB)^\circ = (\measuredangle P_nQ_nP_{n+1})^\circ$. Tällöin $(*)$ ja $(**)$ antavat $(\measuredangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1})^\circ = (\measuredangle DCA)^\circ$. Lauseen 2.5.16 nojalla tämä merkitsee sitä, että $\measuredangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1} \cong \measuredangle DCA$. Koska, kuten todettiin, $P_{n+1}Q_n \cong AC$ ja $Q_nQ_{n+1} \cong DC$, niin SKS-sääntö antaa nyt $\triangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1} \cong \triangle DCA$. Erityisesti $P_{n+1}Q_{n+1} \cong DA$ ja $\measuredangle P_{n+1}Q_{n+1}Q_n \cong \measuredangle DAC$. Koska oletuksen mukaan $\measuredangle DAC$ on suora, niin lauseen 2.4.7 nojalla myös $\measuredangle P_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ on suora. Vaihtamalla merkintöjä ($A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$ ja $P \leftrightarrow Q$) nähdään samalla tavalla, että myös $\measuredangle Q_{n+1}P_{n+1}P_n$ on suora. Siten kulmat $P_{n+1}Q_{n+1}D = \measuredangle P_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ ja $\measuredangle Q_{n+1}P_{n+1}A = \measuredangle Q_{n+1}P_{n+1}P_n$ ovat suoria. Nelikulmion $\square AP_{n+1}Q_{n+1}D$ kahden muun kulman suoruus todettiinkin jo aikaisemmin.

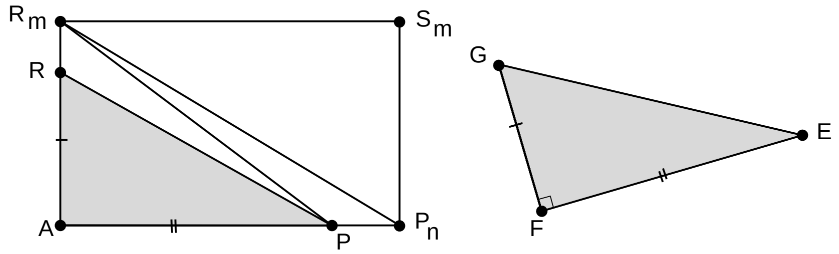
(3) Kolmanneksi pitää osoittaa, että $P_{n+1}Q_{n+1} \cong BC$. Olemme jo osoittaneet, että $P_{n+1}Q_{n+1} \cong AD$, joten riittää osoittaa, että $AD \cong BC$. Tämä seuraa puolestaan oletuksesta ja siitä, että suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhtenevät. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä.

On siis induktiolla osoitettu, että jokainen $\square AP_nQ_nD$ on suorakulmio, jossa $P_nQ_n \cong BC$. Palataan tapauksen (1) alkuun. Arkhimedeen aksiooman nojalla on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $FE < n \cdot AB$ ja $m \in \mathbb{N}$ siten, että $FG < m \cdot AD$. Valitaan P_n ja Q_n kuten edellä, jolloin $\square AP_nQ_nD$ on suorakulmio. Valitaan edelleen $R_m \in \overrightarrow{AD}$ ja $S_m \in \overrightarrow{P_nQ_n}$ siten, että $AR_m \cong m \cdot AD$ ja $P_nS_m \cong P_nQ_n$. Toistamalla tekemämme induktioperustelu eri merkinnöin nähdään, että $\square AP_nS_mR_m$ on suorakulmio, jolle lisäksi pätee $FE < AP_n$ ja $FG < P_nS_m$.



Kuva 96: Suorakulmion toinen laajennus

Merkintöjä tarvittaessa muuttamalla voidaan järjestää, että tutkittavassa suorakulmaisessa kolmiossa $\triangle EFG$ nimenomaan kulma $\measuredangle F$ on suora. Nyt on olemassa $P \in AP_n$ siten, että $AP \cong FE$ ja $R \in AR_n$ siten, että $AR \cong FG$.



Kuva 97: Suorakulmaisen kolmion defekti

Nyt apukolmion $\triangle AP_nR_m$ defekti on 0 seuraavasta syystä: Koska suorakulmiossa vastakkaiset sivut ovat yhtenevät, minkä perustelu on sopiva harjoitustehtävä, niin $AR_m \cong P_nS_m$ ja $AP_n \cong R_mS_m$. SKS-säännön nojalla on siis $\triangle R_mAP_n \cong \triangle P_nS_mR_m$. Erityisesti $\measuredangle AR_mP_n \cong \measuredangle S_mP_nR_m$, joten $(\measuredangle AR_mP_n)^\circ = (\measuredangle S_mP_nR_m)^\circ$. Toisaalta, koska $\overleftrightarrow{AR_m} \parallel \overleftrightarrow{P_nS_m}$, ja $\overleftrightarrow{AP_n} \parallel \overleftrightarrow{R_mS_m}$, niin $\overrightarrow{P_nR_m}$ on puolisuorien $\overrightarrow{P_nA}$ ja $\overrightarrow{P_nS_m}$ välissä. Tällöin $(\measuredangle AP_nR_m)^\circ + (\measuredangle S_mP_nR_m)^\circ = (\measuredangle AP_nS_m)^\circ = 90$ eli todellakin

$$\begin{aligned}
\operatorname{def}(\triangle AP_nR_m) &= 180 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle AR_mP_n)^\circ - (\measuredangle AP_nR_m)^\circ \\
&= 180 - 90 - (\measuredangle S_mP_nR_m)^\circ - (90 - (\measuredangle S_mP_nR_m)^\circ) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tutkittavan kolmion $\triangle EFG$ defektin häviäminen saadaan nyt laskemalla vaiheittain eri apukolmioista: Koska $A * P * P_n$, niin lauseen 2.5.24 nojalla

$$\operatorname{def}(\triangle APR_n) + \operatorname{def}(\triangle PR_mP_n) = \operatorname{def}(\triangle AP_nR_m) = 0.$$

Mutta jokaisen kolmion defekti on ei-negatiivinen, joten tämä on mahdollista ainoastaan, mikäli molemmat yhteenlaskettavat ovat nollia, siis erityisesti $\operatorname{def}(\triangle APR_n) = 0$. Koska $A * R * R_m$, niin vastaavasti myös

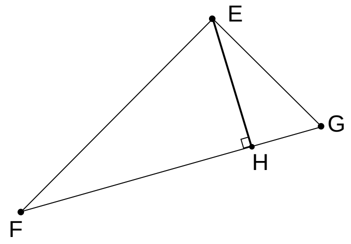
$$\operatorname{def}(\triangle APR) + \operatorname{def}(\triangle PRR_m) = \operatorname{def}(\triangle APR_m) = 0.$$

Tämä on taas mahdollista vain, kun $\operatorname{def}(\triangle APR) = 0$. Pisteiden P ja R valinnan nojalla $AP \cong FE$ ja $AR \cong FG$. Koska $\measuredangle F$ on suora, niin SKS-säännön nojalla $\triangle PAR \cong \triangle EFG$. Erityisesti $(\measuredangle P)^\circ = (\measuredangle E)^\circ$, $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle F)^\circ$ ja $(\measuredangle R)^\circ = (\measuredangle G)^\circ$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\operatorname{def}(\triangle EFG) &= 180 - (\measuredangle E)^\circ - (\measuredangle F)^\circ - (\measuredangle G)^\circ \\
&= 180 - (\measuredangle P)^\circ - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle R)^\circ \\
&= \operatorname{def}(\triangle PAR) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Näin suorakulmaisen kolmion defekti on todettu nollaksi.

Yleinen tapaus b) palautuu suorakulmaiseen seuraavalla tavalla. Jos kolmiossa $\triangle EFG$ ei ole suoraa kulmaa, niin siinä on ainakin kaksi sellaista kulmaa, joiden astemitta on alle 90. Tämä nähtiin lauseen 2.5.25 todistuksen yhteydessä. Voimme siis olettaa, että $\measuredangle F$ ja $\measuredangle G$ ovat tällaisia. Lauseen 2.5.25 todistuksesta näkyy myös, että jos H on pisteen E kautta kulkeva $\overleftrightarrow{FG}$:n normaalin ja suoran $\overleftrightarrow{FG}$ leikkauspiste, niin $F * H * G$.



Kuva 98: Tapaus (b) palautuu tapaukseen a)

Tässä kolmiot $\triangle FHE$ ja $\triangle GHE$ ovat nyt suorakulmaisia, joten a) -kohdan nojalla $\operatorname{def}(\triangle FHE) = 0 = \operatorname{def}(\triangle GHE)$. Defektin additiivisuuslausetta 2.5.24 soveltaen saadaan tällöin

$$\operatorname{def}(\triangle EFG) = \operatorname{def}(\triangle FHE) + \operatorname{def}(\triangle GHE) = 0 + 0 = 0.$$

□

Huomautus 26. Jos siis on olemassa kolmio, jonka defekti on 0, niin lauseen 2.5.25 nojalla on olemassa suorakulmio, jolloin lauseen 2.5.26 mukaan jokaisen kolmion defekti on 0. Huomaa, että tämä kaikki ei sano mitään siitä, onko nolladefektisiä kolmioita olemassa vai ei. Tähänastisista aksioomista ei voidakaan johtaa tällaisen kolmion olemassaoloa sen enempää kuin olemattomuuttakaan. Kirjataan ylläsanottu vielä lauseeksi:

LAUSE 2.5.27. *Jos on olemassa kolmio, jonka defekti on aidosti positiivinen, niin jokaisen kolmion defekti on aidosti positiivinen.*

2.6. Dedekindin aksiooma.

Määritelmä 2.22. Olkoon O piste ja $r \in \mathbb{R}$; $r > 0$. Sanotaan, että joukko $\{P \mid \overline{OP} = r\}$ on *O-keskipisteinen, $r-$säteinen ympyrä.*

LAUSE 2.6.1. *Ympyrällä ja suoralla on korkeintaan kaksi yhteistä pistettä.*
Todistus. Olkoon α O-keskinen r-säteinen ympyrä ja ℓ suora. Antiteesi: α:lla ja ℓ:llä on ainakin kolme yhteistä pistettä. Merkitään niitä P_1, P_2 ja P_3, jolloin erityisesti $P_1, P_2, P_3 \neq O$. Tarkastelemme kahta eri vaihtoehtoa: piste O joko a) sisältyy suoraan ℓ tai sitten b) ei sisälly.

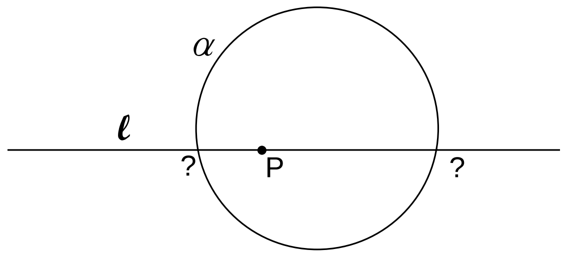
a) Ei voi olla niin, että $P_1 * P_2 * O$, sillä silloin olisi $r = \overline{OP_2} < \overline{OP_1} = r$. Vastaavasti ei myöskään voi olla $P_2 * P_1 * O$. On siis $P_1 * O * P_2$. Koska P_3 on suoran ℓ piste, niin on tällöin joko $P_3 \in \overrightarrow{OP_1}$ tai $P_3 \in \overrightarrow{OP_2}$ (lause 2.3.5). Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $P_3 \in \overrightarrow{OP_1}$. Tällöin joko $O * P_3 * P_1$ tai $O * P_1 * P_3$, jolloin $r = \overline{OP_3} < \overline{OP_1} = r$ tai $r = \overline{OP_3} < \overline{OP_1} = r$, mahdottomia kumpikin. Tapaus a) ei siis tule kysymykseen.

Tapaus b): Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $P_1 * P_2 * P_3$. Koska tutkimme tapausta, jossa O ei ole suoralla ℓ, niin $\triangle OP_1P_2$ ja $\triangle OP_2P_3$ ovat kolmioita ja siis $\measuredangle OP_2P_1$ ja $\measuredangle OP_2P_3$ ovat toistensa täydennyskulmia. Lauseen

2.5.17 nojalla $(\measuredangle OP_2P_1)^\circ + (\measuredangle OP_2P_3)^\circ = 180$, joten ainakin toisen kulman astemitta on vähintään 90. Merkintöjä tarvittaessa muuttamalla voi olettaa, että $(\measuredangle OP_2P_1)^\circ \geq 90$. Koska lauseen 2.5.14 mukaan $(\measuredangle P_2OP_1)^\circ > 0$, niin Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla $(\measuredangle OP_1P_2)^\circ < 90$. Tällöin $(\measuredangle OP_1P_2)^\circ < (\measuredangle OP_2P_1)^\circ$ ja lauseen 2.5.20 nojalla $\measuredangle OP_1P_2 < \measuredangle OP_2P_1$. Soveltamalla lausetta 2.4.22 kolmioon $\triangle OP_1P_2$ saadaan nyt $OP_2 < OP_1$, josta edelleen $\overline{OP_2} < \overline{OP_1}$ (lause 2.5.9.). Tämä on mahdotonta, koska $P_1, P_2 \in \alpha$ ja siten $\overline{OP_1} = \overline{OP_2} = r$. $\square$

Määritelmä 2.23. Olkoon α O-keskipisteinen, $r-$ säteinen ympyrä ja P piste. Jos $P = O$ tai $OP < r$, niin sanotaan, että P on α:n *sisäpuolella*, ja jos $OP > r$, niin sanotaan, että P on α:n *ulkopuolella*.

On luonnollista ajatella, että allaolevan kuvan tilanteessa suoralla ja ympyrällä on täsmälleen kaksi yhteistä pistettä. ts. jos suoralla ℓ on piste P, joka on ympyrän α sisäpuolella, niin ℓ leikkaa α:aa täsmälleen kahdessa pisteessä.



Kuva 99: Suora ja ympyrä

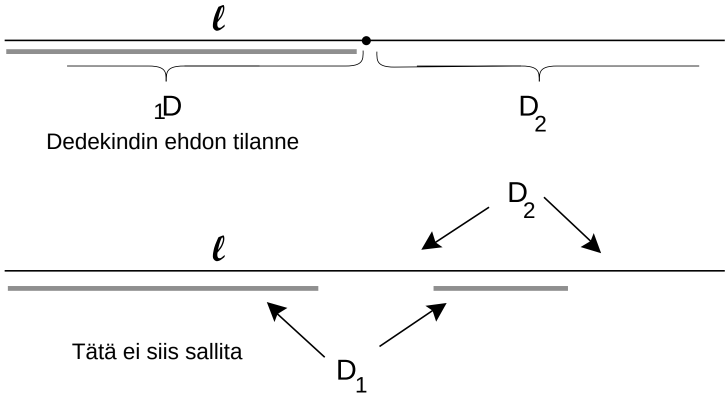
Yllättäen tämä ei seuraa tähän asti esitetyistä aksioomista. Jotta leikkauspisteet löytyisivät, otetaan peliin ns. *Dedekindin aksiooma.*[17] Sitä varten asetetaan ensin määritelmä:

Määritelmä 2.24. Olkoon ℓ suora, $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \ell\}$ sen kaikkien pisteiden joukko ja D_1 ja $D_2 \subset L$. Sanomme, että D_1 ja D_2 toteuttavat *Dedekindin ehdot*, mikäli

(1) $D_1 \neq \emptyset$ ja $D_2 \neq \emptyset$
(2) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
(3) $D_1 \cup D_2 = L$
(4) Jos $P, Q \in D_1$, niin ei ole olemassa pistettä $R \in D_2$, jolla olisi $P * R * Q$
(5) Jos $P, Q \in D_2$, niin ei ole olemassa pistettä $R \in D_1$, jolla olisi $P * R * Q$

Havainnollisesti ehdot (4) ja (5) tarkoittavat, että joukot D_1 ja D_2 sijaitsevat suoralla ℓ "peräkkäin".

[17] Julius Wihelm Richard Dedekind 1831–1916. Saksa.



Kuva 100: Dedekindin ehdot

Esimerkki 9. Reaaliakselilla, joka on koordinaattitason $\mathbb{R}^2$ suora, joukot D_1 ja $D_2 \subset \mathbb{R}$ toteuttavat Dedekindin ehdot, jos ja vain jos jollekin $a \in \mathbb{R}$ pätee jokin seuraavista neljästä vaihtoehdosta:

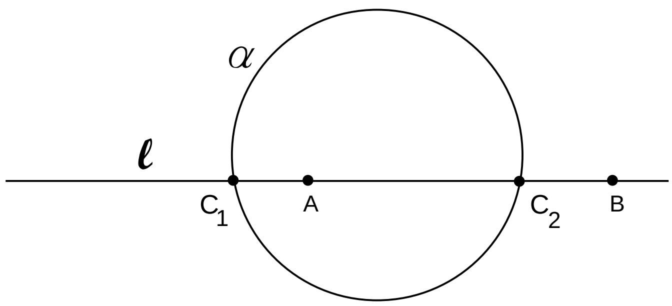
(1) $D_1 =]-\infty, a]$ ja $D_2 =]a, \infty[$
(2) $D_1 =]-\infty, a[$ ja $D_2 = [a, \infty[$
(3) $D_1 = [a, \infty[$ ja $D_2 =]-\infty, a[$
(4) $D_1 =]a, \infty[$ ja $D_2 =]-\infty, a]$.

Perustelu sopii harjoitustehtäväksi.

(DA) Dedekindin aksiooma. Olkoon ℓ suora, $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \ell\}$ sen kaikkien pisteiden joukko ja D_1 ja $D_2 \subset L$ siten, että D_1 ja D_2 toteuttavat Dedekindin ehdot. Tällöin on olemassa tasan yksi piste $P \in L$ siten, että kaikille $Q, R \in L \setminus \{P\}$ pätee $Q * P * R$, jos ja vain jos $Q \in D_1$ ja $R \in D_2$ tai $Q \in D_2$ ja $R \in D_1$.

Havainnollisesti Dedekindin aksiooma sanoo, että suorassa ei ole "reikiä". Aksiooma vastaa tunnettua reaalilukujen täydellisyysaksioomaa. Reaalilukujen täydellisyyteen vetoamalla voi todistaa, että koordinaattigeometria toteuttaa myös Dedekindin aksiooman.

LAUSE 2.6.2. *Olkoon α O-keskinen r-säteinen ympyrä ja ℓ suora. Olkoot lisäksi A ja B suoran ℓ pisteitä siten, että A on α:n sisä- ja B ulkopuolella. Tällöin ympyrällä α ja suoralla ℓ on tasan kaksi yhteistä pistettä C_1 ja C_2, joille lisäksi pätee $C_1 * A * B$ ja $A * C_2 * B$.*

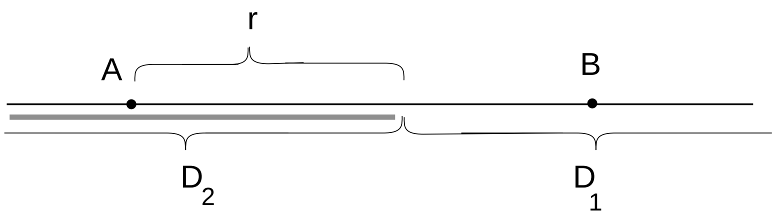


Kuva 101: Ympyrä leikkaa suoraa

Todistusta varten muotoillaan ensin lause, joka osoittaa, että "kaikenmittaisia janoja on olemassa"; tätä tärkeää perustietoa ei voi todistaa ilman Dedekindin aksioomaa.

LAUSE 2.6.3. *Olkoot A ja B eri pisteitä ja $r > 0$ positiiviluku. Tällöin on olemassa piste $C \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $\overline{AC} = r$.*

Todistus. Merkitään suoran $\overleftrightarrow{AB}$ pisteiden joukkoa $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \overleftrightarrow{AB}\}$ ja määritellään $D_1 = \{P \in \overrightarrow{AB} \mid \overline{AP} > r\}$ ja $D_2 = L \setminus D_1$. Osoitetaan, että Dedekindin ehdot toteutuvat.



KUVA 102: JANA, JONKA PITUUS ON r

(1) $D_2 \neq \emptyset$, sillä $A \in D_2$. Myös D_1 on epätyhjä, sillä olkoon OI janamitan konstruoinnissa käytetty yksikköjana. Valitaan $n \in N$ siten, että $n > r$. Arkhimedeen aksiooman nojalla on olemassa $P \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $AP \cong n \cdot OI$, jolloin 2.5.7:n ja 2.5.3:n nojalla $\overline{AP} = n$ ja siis $\overline{AP} > r$ ja $P \in D_1$.

(2) on selvä joukon D_2 määritelmän nojalla.

(3) samoin.

(4) Olkoot $P, Q \in D_1$ ja $P * R * Q$. Pitää osoittaa, että $R \in D_1$. Koska $P, Q \in \overrightarrow{AB}$ niin joko $A * P * Q$ tai $A * Q * P$. Tarvittaessa merkintöjä muuttamalla voidaan olettaa, että $A * P * Q$. Koska $P * R * Q$, niin tällöin lauseen 2.3 nojalla $A * P * R$. Nyt $R \in \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$ ja $\overline{AR} > \overline{AP} > r$, joten $R \in D_1$.

(5) Olkoon $P, Q \in D_2$ ja $P * R * Q$. Pitää osoittaa, että $R \in D_2$. Tehdään vastaoletus: $R \in D_1$. Tässä on nyt viisi vaihtoehtoa:

a) $P = A$
b) $Q = A$
c) $P * A * Q$
d) $A * P * Q$
e) $A * Q * P$

a) Jos $P = A$, niin $A * R * Q$. Koska $R \in D_1$, niin $R \in \overrightarrow{AB}$ ja siten myös $Q \in \overrightarrow{AR}$. Lisäksi $\overline{AQ} > \overline{AR}$ ja koska $R \in D_1$, niin $\overline{AR} > r$ ja siten myös $\overline{AQ} > r$, joten $Q \in D_1$, mikä on mahdotonta.

b) Vaihtamalla merkintöjä ($P \leftrightarrow Q$) tapaus b) palautuu tapaukseen a).

c) Jos $P * A * Q$, niin lauseen 2.3.5 nojalla joko $P \in \overrightarrow{AB}$ tai $Q \in \overrightarrow{AB}$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla ($P \leftrightarrow Q$) voidaan olettaa, että $Q \in \overrightarrow{AB}$, jolloin $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB}$. Koska $R \in D_1$ ja $A \notin D_1$, niin $R \neq A$, jolloin lauseen 2.3.7 nojalla joko $P*R*A$ tai $A*R*Q$. Jos $P*R*A$, niin $R \in \overrightarrow{AP}$ ja toisaalta koska $R \in D_1$, niin $R \in \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ}$ eli $R \in \overrightarrow{AP} \cap \overrightarrow{AQ} = \{A\}$ (lause 2.3.8), ja siis $R = A \notin D_1$ vastoin oletusta. Jos taas $A * R * Q$, niin ristiriita löytyy kuten tapauksessa a).

d) Jos $A*P*Q$, niin lauseen 2.3.4 nojalla $A*R*Q$ ja joudutaan ristiriitaan kuten kohdassa a).

e) Vaihtamalla merkinnät ($P \leftrightarrow Q$) palaudutaan tapaukseen d).

Joukot D_1 ja D_2 toteuttavat siis Dedekindin ehdot, joten Dedekindin aksiooman nojalla on olemassa piste P, joka erottaa joukot D_1 ja D_2 eri puolilleen aksiooman mielessä. Osoitetaan, että tämä piste on etsimämme, toisin sanoen $P \in \overrightarrow{AB}$ ja $\overline{AP} = r$. Väite $P \in \overrightarrow{AB}$ on ilmeinen, sillä muuten valittaisiin piste Q siten, että $Q * P * A$, jolloin olisi $Q \notin \overrightarrow{AB}$ ja siis $Q \in D_2$. Koska myös $A \in D_2$, niin P ei — vastoin määritelmäänsä — erottaisi joukkoja D_1 ja D_2 eri puolilleen. Todistettavaksi jää siis, että $\overline{AP} = r$. Jos näin ei olisi, niin olisi voimassa jokin seuraavista ehdoista:

i) $P = A$.
ii) $\overline{AP} < r$.
iii) $\overline{AP} > r$.

i) Jos $P = A$, niin valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $1/2^n < r$ ja P_n kuten janamitan konstruktiossa, jolloin $2^n \cdot OP_n = OI$. Tällöin lauseen 2.5.7 nojalla $2^n \cdot \overline{OP_n} = \overline{OI}$, joten lauseen 2.5.3 nojalla saadaan $\overline{OP_n} = 1/2^n$. Valitaan nyt piste $Q \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $AQ \cong OP_n$, jolloin $\overline{AQ} = \overline{OP_n} = 1/2^n < r$ ja siten $Q \in D_2$. Valitaan toisaalta R siten, että $R*A*Q$, jolloin $R \notin \overrightarrow{AB}$ ja siten myös $R \in D_2$. Koska $P = A$, niin $R*P*Q$, mikä on mahdotonta Dedekindin aksiooman väitteen nojalla.

ii) Jos $\overline{AP} < r$, niin valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $1/2^n < r - \overline{AP}$ ja P_n kuten kohdassa i). Valitaan nyt Q siten, että $A * P * Q$ ja $PQ \cong OP_n$, jolloin $\overline{PQ} = \frac{1}{2^n}$. Tällöin lauseen 2.5.4 nojalla

$$\overline{AR} = \overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AP} + \frac{1}{2^n} < \overline{AP} + r - \overline{AP} = r,$$

joten $Q \in D_2$. Koska myös $A \in D_2$ ja $A * P * Q$, niin joudutaan taas ristiriitaan P:n ominaisuuden kanssa.

iii) Jos $\overline{AP} > r$, niin $P \in D_1$, sillä yllä jo todettiin, että $P \in \overrightarrow{AB}$. Valitaan Q tällä kertaa niin, että $A*P*Q$, jolloin $Q \in \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$ ja $\overline{AQ} > \overline{AP} > r$ ja siis $Q \in D_1$. Valitaan edelleen $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{2^n} < \overline{AP} - r$ ja P_n kuten kohdassa i). Valitaan vielä $R \in \overrightarrow{PA}$ siten, että $PR \cong OP_n$, jolloin

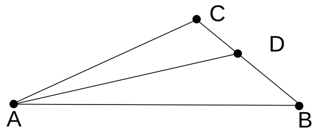
$$\overline{PR} = \overline{OP_n} = \overline{AP} - \frac{1}{2^n} > \overline{AP} - (\overline{AP} - r) = r,$$

joten $R \in D_1$. Koska $A * R * P$ ja $A * P * Q$, niin lauseen 2.3.4 nojalla $R * P * Q$. Tämä on Dedekindin aksiooman vastaista, koska $R, Q \in D_1$. Näin on halutun pisteen C olemassaolo päätelty.

Pisteen C yksikäsitteisyys seuraa siitä, että jos $D \in \overrightarrow{AB}$ olisi toinen piste, jolla $\overline{AD} = r$, niin olisi $AD \cong AC$ ja $A = D$ suoraan aksiooman (H8) nojalla. □

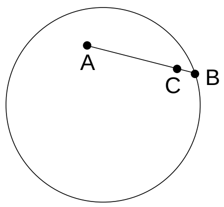
Lauseen 2.6.2 todistus vaatii edellisen lisäksi vielä seuraavat kaksi pientä aputulosta, joiden todistukset jäävät harjoitustehtäviksi:

LAUSE 2.6.4. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $B*D*C$. Tällöin $\overline{AD} < \max\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.*



KUVA 103: LAUSE 2.6.4

LAUSE 2.6.5. *Olkoon α ympyrä ja $A, B \in \alpha \cup \{P \mid P$ on α:n sisäpuolella$\}$ s.e. $A * C * B$. Tällöin C on α:n sisäpuolella.*

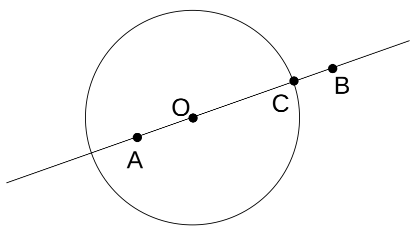


KUVA 104: LAUSE 2.6.5

Lauseen 2.6.2 todistus. Olkoon α O-keskinen, r-säteinen ympyrä, ℓ suora ja A, B pisteitä siten, että A on α:n sisä- ja B sen ulkopuolella. Tehtävänä on löytää α:n ja ℓ:n kaksi yhteistä pistettä C_1 ja C_2 siten, että $C_1 * A * B$ ja $A * C_2 * B$. (Lauseen 2.6.1 mukaan enempiä ei ole olemassa.)

Osoitetaan ensin pisteen C_2 olemassaolo. On kaksi tapausta sen mukaan, kulkeeko suora ℓ pisteen O kautta vai ei.

a) Jos ℓ kulkee pisteen O kautta, niin $O \neq B$ eli $\overrightarrow{OB}$ on puolisuora.



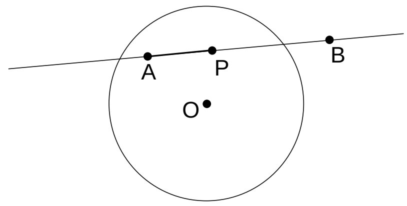
KUVA 105: TAPAUS a)

Lauseen 2.6.3 nojalla voidaan valita $C \in \overrightarrow{OB}$ siten, että $\overline{OC} = r$, jolloin $C \in \alpha$ ja riittää osoittaa, että $A * C * B$. Koska $C \in \overrightarrow{OB}$ ja $\overline{OC} = r < \overline{OB}$, niin välttämättä $O * C * B$. Jos $A = O$, niin väite seuraa suoraan tästä. Voidaan siis olettaa, että $A \neq 0$. Välttämättä pätee myös $B \neq O$ ja $B \neq A$, joten joko $O * A * B$, $A * O * B$ tai $A * B * O$. Lauseen 2.6.5 nojalla viimeinen vaihtoehto ei tule kyseeseen. Jos olisi $A * O * B$, niin ehdon $O * C * B$ ja lauseen 2.3.4 nojalla olisi $A * C * B$ ja asia sillä selvä. Kolmannessa tapauksessa $O * A * B$ on ehdon $\overline{OA} < \overline{OC} < \overline{OB}$ nojalla oltava $A * C * B$, sillä muut vaihtoehdot eivät tule kyseeseen. (Mieti, miksi eivät. Tutki erikseen vaihtoehtoja $A * B * C$ ja $B * A * C$.)

b) Oletetaan, että ℓ ei kulje keskipisteen O kautta. Määritellään joukko $M \subset \mathbb{R}$ seuraavalla tavalla.

$$M = \{\overline{AP} \in \mathbb{R} \mid P \in \overrightarrow{AB}, \overline{OP} < r\}$$

Todistuksen ideana on löytää etsitty leikkauspiste C_2 etenemällä pisteestä A pistettä B kohti matkan $m = \sup M$ verran. Koska $\overline{OA} \in M$, niin $M \neq \emptyset$. Lisäksi M on ylhäältä rajoitettu, ylärajana $2r$, mikä seuraa kolmioepäyhtälöstä seuraavalla tavalla:



Kuva 106: Joukko M muodostuu janojen AP pituuksista

Olkoon $x \in M$. Jos $x = 0$, niin $x \leq 2r$. Jos $x > 0$, niin $x = \overline{AP}$ jollekin $P \in \overrightarrow{AB}$, jolla $\overline{OP} < r$. Koska ℓ ei kulje pisteen O kautta, niin $\triangle OAP$ on kolmio ja kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{AP} < \overline{OA} + \overline{OP}$. Koska A on ympyrän α sisällä, on $\overline{OA} < r$ ja koska $\overline{OP} < r$, niin $x = \overline{AP} < r + r = 2r$. Nähtyämme näin, että M on ylhäältä rajoitettu epätyhjä joukko reaalilukuja, tiedämme reaalilukujen täydellisyyden nojalla, että on olemassa joukon M supremum, olkoon se $m = \sup M$. Osoitetaan, että $m > 0$, eli että joukossa M on muitakin alkioita kuin 0. Koska A on ympyrän α sisällä, pätee $\overline{OA} < r$. Valitaan $a = r - \overline{OA} > 0$. Näin on todistettu, että $m > 0$. Lauseen 2.6.3 nojalla on olemassa piste $P \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $\overline{AP} = a$. Soveltamalla kolmioepäyhtälöä kolmioon OAP saadaan $\overline{OP} < \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OA} + r - \overline{OA} = r$. Näin $a = \overline{AP} \in M$. Lauseen 2.6.3 nojalla voidaan valita piste $C_2 \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $\overline{AC_2} = m$. Osoitetaan, että $C_2 \in \alpha$. Jos näin ei olisi, olisi joko $\overline{OC} < r$ tai $\overline{OC} > r$. Ensin mainitussa tapauksessa valitaan lauseen 2.6.3 nojalla piste P siten, että $A * C_2 * P$ ja $\overline{C_2P} = r - \overline{OC_2}$. Tällöin kolmioepäyhtälön mukaan $\overline{OP} < \overline{OC_2} + \overline{C_2P} = \overline{OC_2} + r - \overline{OC_2} = r$, joten $\overline{AP} \in M$. Koska $A * C_2 * P$, niin $\overline{AP} > \overline{AC_2} = m = \sup M$, mikä on mahdotonta. Vastaavasti, jos olisi $\overline{OC_2} > r$, niin supremumin ominaisuuksien nojalla olisi olemassa $x \in M$, jolla $x > m - (\overline{OC} - r)$. Joukon M määritelmän mukaan löytyy tällöin piste $P \in \overrightarrow{AB}$, jolla $\overline{OP} < r$ ja $\overline{AP} = x$. Koska $x \leq m$ ja ei voi olla $P = C_2$ (sillä $\overline{OP} < r < \overline{OC_2}$), niin $A * P * C_2$. Kolmioepäyhtälö sovellettuna kolmioon $\triangle OPC_2$ antaa nyt

$$\overline{OP} > \overline{OC_2} - \overline{PC_2} > \overline{OC_2} - (\overline{AC_2} - \overline{AP}) = \overline{OC} - m + x > \overline{OC} - m + m - (\overline{OC_2} - r) = r$$

eli $\overline{OP} > r$, mikä on mahdotonta. Piste C_2 on siis ympyrällä α.

Pitää vielä osoittaa, että $A * C_2 * B$. Ainakin nämä ovat kolme eri pistettä, sillä A on α:n sisäpuolella, B sen ulkopuolella ja $C_2 \in \alpha$. Koska $C_2, B \in \overrightarrow{AB}$, pätee joko $A * C_2 * B$ tai $A * B * C_2$. Lauseen 2.6.5 nojalla jälkimmäinen vaihtoehto ei tule kyseeseen, joten pätee $A * C_2 * B$ ja etsitynlaisen pisteen C_2 olemassaolo on varmistettu.

Pisteen C_1 olemassaolo seuraa nyt helposti. Lauseen 2.6.3 nojalla voidaan valita piste P siten, että $P * A * B$ ja $\overline{AP} = 2r$. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{OP} > \overline{AP} - \overline{OA} = 2r - \overline{OA} > 2r - r = r$, joten P on α:n ulkopuolella. Pisteen C_2 olemassaolon takia löytyy tällöin piste $C_1 \in \alpha$, jolla $P * C_1 * A$. Koska $P * A * B$, niin $C_1 * A * B$ lauseen 2.3.4 mukaisesti. □

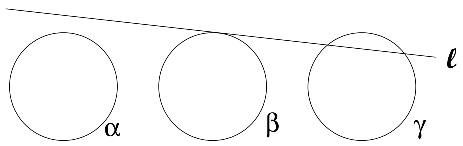
Lauseessa 2.6.2 ei itse asiassa tarvitse olettaa ulkopuolisen pisteen B olemassaoloa:

LAUSE 2.6.6. *Olkoon α O-keskinen r-säteinen ympyrä, ℓ suora ja A suoran ℓ piste, joka on ympyrän α sisäpuolella. Tällöin suoralla ℓ ja ympyrällä α on tasan kaksi yhteistä pistettä C_1 ja C_2, ja niille pätee $C_1 * A * C_2$. Lisäksi suoran ℓ pisteille pätee: P on α:n sisäpuolella, jos ja vain jos $C_1 * P * C_2$.*

Todistus. Täsmälleen samoin kuin lauseen 2.6.2 todistuksen kohdassa b) löytyy ℓ:n piste P, joka on α:n ulkopuolella, jolloin 2.6.2 toimii ja antaa täsmälleen kaksi leikkauspistettä C_1 ja C_2 siten, että $A * C_2 * P$ ja $C_1 * A * P$. Tällöin myös $C_1 * A * C_2$ (lause 2.3.4). Jos P on ℓ:n piste siten, että $C_1 * P * C_2$, niin P on α:n sisäpuolella lauseen 2.6.5 nojalla. Jos taas oletetaan, että P on α:n sisäpuolella, niin joko a) $P * C_1 * C_2$, b) $C_1 * P * C_2$ tai c) $C_1 * C_2 * P$. Tapauksessa a) on piste C_1 ympyrän α sisäpuolella lauseen 2.6.5 nojalla, mikä on mahdotonta. Tapauksessa c) on vastaavasti C_2 α:n sisäpuolella, mahdotonta sekin. Tapaus b) on siis ainoa mahdollinen. □

Lauseiden 2.6.1 ja 2.6.6 nojalla suoralla ja ympyrällä on siis 0,1 tai 2 yhteistä pistettä. Tämä huomio antaa aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 2.25. Suora ℓ on ympyrän α *tangentti,* jos α:lla ja ℓ:llä on täsmälleen yksi yhteinen piste.



KUVA 107: SUORA ℓ ON YMPYRÄN β TANGENTTI

LAUSE 2.6.7. *Olkoon suora ℓ ympyrän α tangentti ja P näiden yhteinen piste. Tällöin kaikki ℓ:n pisteet, pistettä P lukuunottamatta, ovat α:n ulkopuolella.*

Todistus. Jos jokin toinen suoran ℓ piste Q olisi joko ympyrällä α tai sen sisäpuolella, niin voitaisiin valita R siten, että $P * R * Q$, jolloin lauseen 2.6.5 nojalla R olisi α:n sisäpuolella. Tällöin lauseen 2.6.6 mukaan olisi ℓ:llä ja α:lla kaksi leikkauspistettä vastoin oletusta. □

LAUSE 2.6.8. *Olkoon α O-keskinen r-säteinen ympyrä ja ℓ suora, joka kulkee pisteen $P \in \alpha$ kautta. Tällöin ℓ on α:n tangentti, jos ja vain jos ℓ on suoran $\overleftrightarrow{OP}$ normaali.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

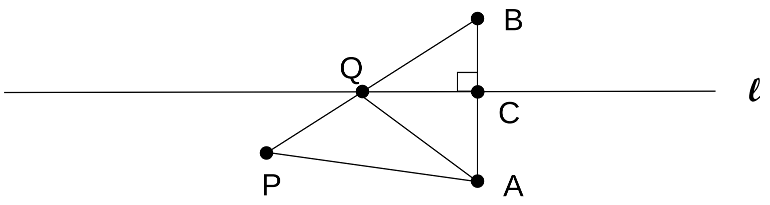
Huomautus 27. Lauseiden 2.6.8 ja 2.4.16 nojalla voidaan todeta, että ympyrän mielivaltaisen pisteen kautta kulkee aina täsmälleen yksi sen tangentti.

Määritelmä 2.26. Olkoon AB jana ja C sen keskipiste. Pisteen C kautta kulkevaa suoran $\overleftrightarrow{AB}$ normaalia sanotaan janan AB *keskinormaaliksi*.

Huomautus 28. Lauseiden 2.5.1 ja 2.4.16 avulla nähdään heti, että jokaisella janalla on yksikäsitteinen keskinormaali.

LAUSE 2.6.9. *Olkoon AB jana ja ℓ sen keskinormaali ja $P \neq A, B$ mielivaltainen piste. Tällöin $\overline{AB} = \overline{BP}$, jos ja vain jos ℓ kulkee pisteen P kautta.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

LAUSE 2.6.10. *Olkoon AB jana ja ℓ sen keskinormaali sekä $P \neq A, B$ mielivaltainen piste. Tällöin $\overline{AP} < \overline{BP}$, jos ja vain jos $AP\ell$.*



KUVA 108: LAUSE 2.6.10

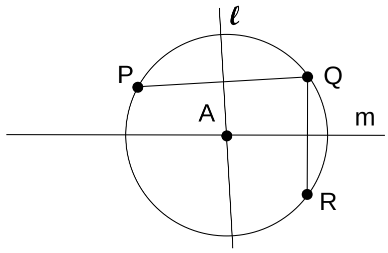
Todistus. Oletetaan aluksi $AP\ell$. Olkoon C janan AB keskipiste. Jos P kuuluu suoralle $\overleftrightarrow{AB}$, niin ei voi ainakaan olla $P*C*A$, joten on joko $C*A*P$ tai $C*P*A$. Koska C on janan AB keskipiste, on $A*C*B$, joten ensin mainitussa tapauksessa saadaan lauseen 2.3.4.ii) nojalla $B*A*P$, jolloin $AP < BP$ ja siten $\overline{AP} < \overline{BP}$. Jälkimmäisessä tapauksessa saadaan heti $AP < AC$ ja siitä $\overline{AP} < \overline{AC}$. Toisaalta $B*C*A$, joten lauseen 2.3.4.i) nojalla saadaan $B*C*P$, ja siis $BC < BP$, josta $\overline{BC} < \overline{BP}$. Koska C on janan AB keskipiste, on $\overline{BC} = \overline{AC}$. Yhdistämällä tiedot saadaan $\overline{AP} < \overline{AC} = \overline{BC} < \overline{BP}$.

Voidaan siis olettaa, että P ei kuulu suoralle $\overleftrightarrow{AB}$. Koska oletettiin $AP\ell$, ja koska $A\ell B$, niin $P\ell B$. Tällöin PB leikkaa suoraa ℓ pisteessä Q, $P*Q*B$. Koska P ei kuulu suoralle $\overleftrightarrow{AB}$ niin A ei kuulu suoralle $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PB}$, jolloin $\triangle PQA$ on kolmio ja kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{AP} < \overline{PQ} + \overline{QA}$. Toisaalta, koska $P*Q*B$, niin lauseen 2.5.4 mukaan $\overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{PB}$. Lauseen 2.6.9 nojalla taas on $\overline{QB} = \overline{QA}$, joten kaiken kaikkiaan $\overline{AP} < \overline{PQ} + \overline{QA} + \overline{QB} = \overline{PB}$. Olemme todistaneet, että jos $AP\ell$, niin $\overline{AP} < \overline{BP}$. Tätä soveltamalla saadaan $\overline{AP} > \overline{BP}$, jos $BP\ell$. Ehdot ovat siis yhtäpitäviä. □

Lause 2.6.1 kertoi, että suora ja ympyrä leikkaavat toisiaan korkeintaan kahdessa eri pisteessä. Sama pätee kahdelle ympyrälle:

LAUSE 2.6.11. *Kaksi eri ympyrää leikkaavat toisiaan korkeintaan kahdessa pisteessä.*

Todistus. Olkoot α ja β eri ympyröitä, keskipistein A ja B ja sätein a ja b. Jos $A = B$, niin $a \neq b$ ja ympyrät eivät leikkaa toisiaan ollenkaan, jolloin väite pätee. Voidaan siis olettaa, että $A \neq B$. Tehdään antiteesi, että α ja β leikkaavat toisensa ainakin kolmessa eri pistessä P, Q ja R. Olkoon ℓ janan PQ keskinormaali ja vastaavasti m janan QR keskinormaali. Koska $\overline{PA} = a = \overline{QA}$, niin lauseen 2.6.9 nojalla ℓ kulkee pisteen A kautta.

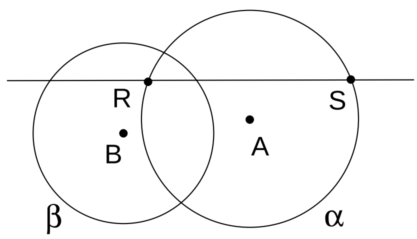


Kuva 109: Ympyrä määräytyy kolmesta pisteestään

Toisaalta $\overline{PB} = b = \overline{QB} = \overline{RB}$, joten vastaavasti ℓ ja m kulkevat myös pisteen B kautta. Koska $A \neq B$, täytyy olla $\ell = m$. Tällöin sekä $\overleftrightarrow{QP}$ että $\overleftrightarrow{QR}$ ovat suoran ℓ normaaleja, jotka kulkevat pisteen Q kautta, ja siis lauseen 2.4.16 nojalla $\overleftrightarrow{QP} = \overleftrightarrow{QR}$. Nyt suora $\overleftrightarrow{QP} = \overleftrightarrow{QR}$ leikkaa ympyrää α kolmessa eri pisteessä, mikä on vastoin lausetta 2.6.1. □

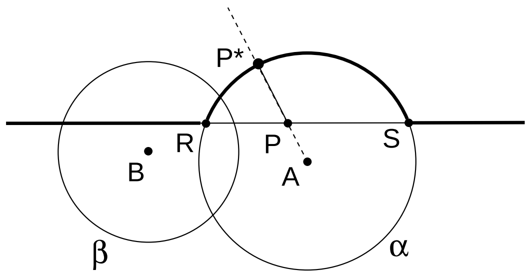
Lauseen 2.6.2 vastine kahdelle ympyrälle on seuraavassa. Sitä ei voi todistaa ilman Dedekindin aksioomaa. Seuraava todistuskin on aika monivaiheinen.

LAUSE 2.6.12. *Olkoot α ja β ympyröitä ja $R, S \in \alpha$ siten, että R on β:n sisäpuolella ja S on sen ulkopuolella. Tällöin α:lla ja β:lla on täsmälleen kaksi yhteistä pistettä.*



Kuva 110: Kahden ympyrän leikkaaminen

Todistus. Olkoot α:n ja β:n keskipisteet A ja B ja säteet a ja b. Todistuksen varsinainen työ on siinä, että Dedekindin aksiooman avulla etsitään ainakin yksi leikkauspiste siinä tapauksessa, että A ei ole suoralla $\overleftrightarrow{RS}$. Tätä varten määritellään kaikille suoran $\overleftrightarrow{RS}$ pisteille P apupiste P^* seuraavalla tavalla:



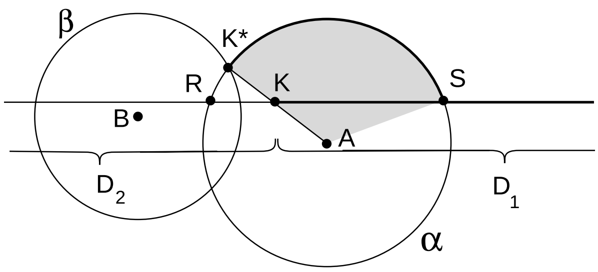
KUVA 111: KUVAUS $P \mapsto P^*$

$$P^* = \begin{cases} \text{ympyrän } \alpha \text{ ja puolisuoran } \overrightarrow{AP} \text{ leikkauspiste, jos } P \in RS \\ P \text{ muuten, eli kun } P * R * S \text{ tai } R * S * P \end{cases}$$

Tässä on huomattava, että koska $\overleftrightarrow{RS}$ ei kulje A:n kautta, niin $\overrightarrow{AP}$ on aina olemassa. Lisäksi, koska A on α:n sisäpuolella, suoralla $\overleftrightarrow{AP}$ on lauseen 2.6.6 mukaan täsmälleen kaksi α:n pistettä, joista täsmälleen yksi on puolisuoralla $\overrightarrow{AP}$ (lause 2.3.4). Siten P^* on yksikäsitteisesti määritelty jokaisella $\overleftrightarrow{RS}$:n pisteellä P. Huomaa vielä, että $R^* = R$ ja $S^* = S$.

Merkitään suoran $\overleftrightarrow{RS}$ kaikkien pisteiden joukkoa $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \overleftrightarrow{RS}\}$ ja jaetaan L Dedekindin ehdot toteuttaviin osiin määrittelemällä (huomaa puolisuora ja tähti!):

$$D_1 = \{P \in \overrightarrow{RS} \mid P^* \text{ on } \beta\text{:n ulkopuolella } \}$$
$$D_2 = L \setminus D_1.$$



KUVA 112: DEDEKINDIN JAKOPISTE K ANTAA LEIKKAUSPISTEEN K^*

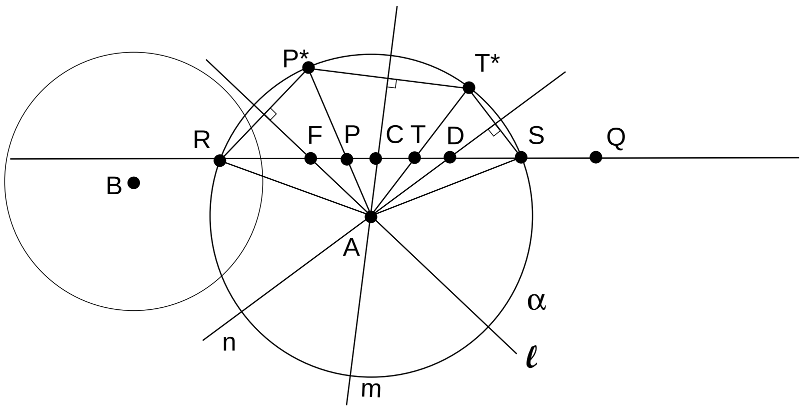
Todistuksen ideana on tarkastaa, että Dedekindin ehdot tosiaan toteutuvat ja että Dedekindin aksiooman antaman leikkauspisteen K kuva K^* on ympyröiden leikkauspiste.

(1) $D_1 \neq \emptyset$, koska $S^* = S$ ja siis $S \in D_1$. $D_2 \neq \emptyset$, koska $R^* = R$ ja siis $R \in D_2$.
(2) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ joukon D_2 määritelmän mukaan.
(3) $D_1 \cup D_2 = L$ joukon D_2 määritelmän mukaan.
(4) Olkoot $P, Q \in D_1$ eri pisteitä. Näytetään, että $PQ \subset D_1$. Antiteesi: on olemassa $T \in D_2$ siten, että kuitenkin $P * T * Q$. Koska $P, Q \in D_1 \subset \overrightarrow{RS} \setminus \{R\}$,

niin joko $R*P*Q$ tai $R*Q*P$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $R*P*Q$, jolloin lauseen 2.3.4 kohdan i) mukaan $R*P*T$ ja myös $T \in \overrightarrow{RS} \setminus \{R\}$. Ei voi olla niin, että $T = S$, koska $T \in D_2$, mutta $S \in D_1$. Siksi joko $R*T*S$ tai $R*S*T$. Seuraava päättely osoittaa, että jälkimmäinen vaihtoehto ei ole mahdollinen:

Jos olisi $R*S*T$, niin T^*:n määritelmän mukaan olisi $T^* = T$. Toisaalta $T \in \overrightarrow{RS}$ ja $T \notin D_1$, joten D_1:n määritelmän mukaan $T^* = T$ **ei voi olla β:n ulkopuolella.** Mutta oletuksen mukaan R on β:n sisäpuolella ja S ulkopuolella, jolloin lauseen 2.6.2 nojalla β leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{RS}$ tasan kahdessa pisteessä C_1 ja C_2, joille lisäksi pätee $C_1 * R * S$ ja $R * C_2 * S$. Jos siis olisi $R*S*T$, niin 2.3.4:n nojalla voitaisiin päätellä, että $C_1 * C_2 * T$. (Miten?) Tämä taas lauseen 2.6.6 perusteella merkitsee sitä, että T **ei ole β:n sisäpuolella.** Se on siis ulkopuolella, sillä se ei ole kumpikaan pisteistä C_1, C_2, jotka ovat ainoat $\overleftrightarrow{RS}$:n ja β:n leikkauspisteet. Mutta tämähän on mahdotonta, kuten yllä todettiin. Antiteesi on väärä: ei ole $R*S*T$.

On siis jatkettava tutkimalla ensimmäistä vaihtoehtoa eli olettamalla $R*T*S$. Koska toisaalta $R*P*T$, niin lauseen 2.3.4 nojalla pätee $P*T*S$.



Kuva 113: Tapaus $R*T*S$

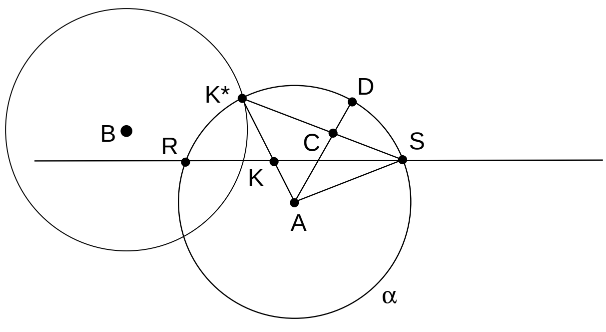
Koska $T \in D_2$, niin $T \notin D_1$, ja T^* **ei siis voi olla $\beta : n$ ulkopuolella.** Toisaalta $P \in D_1$, joten P^* **on β:n ulkopuolella.** Olkoon ℓ janan RP^* keskinormaali, m janan P^*T^* keskinormaali ja n janan T^*S keskinormaali — nämä janat ovat olemassa, sillä selvästikin $R \neq P^*$,$P^* \neq T^*$ ja $T^* \neq S$. Koska R on β:n sisäpuolella ja P^* sen ulkopuolella, niin $\overline{BR} < b < \overline{BP*}$, joten lauseen 2.6.10 nojalla $BR\ell$. Vastaavasti $\overline{BT^*} \leq b < \overline{BP^*}$, joten BT^*m ja $\overline{BT^*} \leq b \leq \overline{BS}$, joten BT^*n. Lauseen 2.6.9 nojalla ℓ, m ja n kulkevat A:n kautta. Koska $P^* \in \overrightarrow{AP}$ ja $T^* \in \overrightarrow{AT}$, niin $\measuredangle P^*AT^* = \measuredangle PAT$. Lauseen 2.3.9 nojalla janan P^*T^* keskipiste on kulman $\measuredangle PAT$sisällä, joten puomilauseen 2.3.11 mukaan m leikkaa janaa PT. Olkoon leikkauspiste C, jolloin $P*C*T$. Vastaavasti n leikkaa janaa TS jossakin pisteessä D, jolloin $T*D*S$, ja samoin ℓ leikkaa janaa RP pisteessä F, jolloin $R*F*P$.

Koska $T^* \in \overrightarrow{AT}$, niin TT^*m ja TT^*n, jolloin aksiooman (H7) nojalla BTm ja BTn. Lauseen 2.3.4 nojalla voidaan päätellä, että $C * T * D$, joten T on kulman $\measuredangle CAD$ sisällä. Tällöin aksiooman (H7) nojalla myös B on kulman $\measuredangle CAD$ sisällä. Puomilauseen 2.3.11 mukaan $\overrightarrow{AB}$ leikkaa tällöin janaa CD, olkoon leikkauspiste E, jolloin $C * E * D$. Lauseen 2.3.4 nojalla nähdään, että $R*F*E$. Koska $E \in \overrightarrow{AB}$, niin $EB\ell$ ja koska $R*F*E$, niin $R\ell E$. Tällöin $R\ell B$, mikä on vastoin ehtoa $BR\ell$, joka todistettiin pari riviä edellisen kuvan jälkeen. Dedekindin ehto (4) on siis voimassa.

(5) Antiteesi: On olemassa pisteet $P, Q \in D_2$ ja $T \in D_1$, jolla olisi $P * T * Q$. Kuten kohdassa (4) nähdään, että ei voi olla $R * S * P$ eikä $R * S * Q$, vaan P, T ja Q ovat puolisuoralla $\overrightarrow{SR}$. Tällöin joko $T * Q * S$ tai $T * P * S$. Koska $S \in D_1$, niin kumpikaan ei ole mahdollista kohdan (4) nojalla.

Näin on todistettu, että D_1 ja D_2 toteuttavat Dedekindin ehdot. Olkoon $K \in L$ Dedekindin aksiooman antama piste. Osoitetaan, että $K^* \in \alpha \cup \beta$. (Ks. kuva 112.) Ensinnäkin täytyy olla $K \in RS$. Jos nimittäin olisi $K * R * S$, niin valittaisiin Q siten, että $Q*K*R$, jolloin $Q \in D_2$, koska $Q \notin \overrightarrow{RS}$. Mutta $R \in D_2$, joten tilanne on vastoin Dedekindin aksiooman antamaa K:ta koskevaa ehtoa. Myöskään $R * S * K$ ei tule kysymykseen, sillä siinä tapauksessa tarkasteltaisiin sellaista pistettä Q, jolla $S * K * Q$, jolloin — kuten kohdassa (4) edellä — nähtäisiin, että $Q \in D_1$. Koska myös $S \in D_1$ niin jouduttaisiin taas ristiriitaan Dedekindin aksiooman antaman jakoehdon kanssa. Siis tosiaan $K \in RS$ ja siksi K^*:n määritelmän nojalla $K^* \in \alpha$, jolloin riittää osoittaa, että $K^* \in \beta$. Antiteesi $K^* \notin \beta$ sisältää kaksi vaihtoehtoa: K^* on joko β:n sisäpuolella (i) tai ulkopuolella (ii).

Tapaus (i): $\overline{BK^*} < b$. Koska S on β:n ulkopuolella, niin $K^* \neq S$, jolloin janalta K^*S voidaan lauseen 2.6.3 nojalla valita piste C siten, että $K^* * C * S$ ja $\overline{K^*C} < \frac{1}{2}(b - \overline{BK^*})$.



Kuva 114: Tapaus (i)

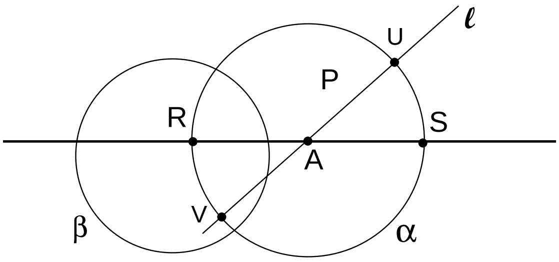
Lauseen 2.6.6 nojalla C on ympyrän α sisäpuolella ja edelleen puolisuoralla $\overrightarrow{AC}$ on α:n piste, olkoon se D, jolloin $A * C * D$, tämä seuraa esimerkiksi lauseesta 2.6.5. Tällöin $\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC} = a - \overline{AC}$. Toisaalta kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{AC} > \overline{AK^*} - \overline{K^*C}$, jolloin

$$\overline{CD} = a - \overline{AC} < a - \left(\overline{AK^*} - \overline{K^*C}\right) = \overline{K^*C}.$$

Edelleen kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{BD} \leq \overline{BK^*} + \overline{K^*D}$ ja siten $\overline{BD} \leq \overline{BK^*} + \big(b - \overline{BK^*}\big) = b$, joten D on β:n sisäpuolella. Koska C on kulman $\measuredangle K^*AS = \measuredangle KAS$ sisäpuolella, niin $\overrightarrow{AC}$ leikkaa puomilauseen 2.3.11 nojalla janaa KS. Olkoon leikkauspiste Q, jolloin $K * Q * S$. Suoraan K^*:n määritelmän mukaan $D = Q^*$, joten $Q \in D_2$. Jos valitaan F siten, että $F * R * S$, niin $F \in D_2$ ja 2.3.4:n mukaan $F * K * Q$. (Huomaa, että voi olla $K = R$.) Tämä on vastoin Dedekindin aksiooman antamaa ehtoa.

Tapaus (ii): $\overline{BK^*} > b$. Tämä tilanne käsitellään vastaavalla tavalla kuin (ii). Tässä valitaan C siten, että $R * C * K^*$ ja $\overline{K^*C} < \frac{1}{2}(\overline{BK^*} - b)$ ja samanlainen lasku kuin yllä antaa $\overline{K^*C} < \overline{BVK^*} - b$, josta saadaan edelleen $\overline{BD} \geq \overline{BK^*} - \overline{K^*D} > b$, ja D on siten ympyrän β ulkopuolella. Piste Q, jolla $R * Q * K$, löytyy kuten edellä ja $Q^* = D$. Täten $Q \in D_1$. Jos valitaan F siten, että $R * S * F$, niin $F \in D_1$ ja nyt $Q * K * F$, mikä on taas vastoin Dedekindin aksioomaa.

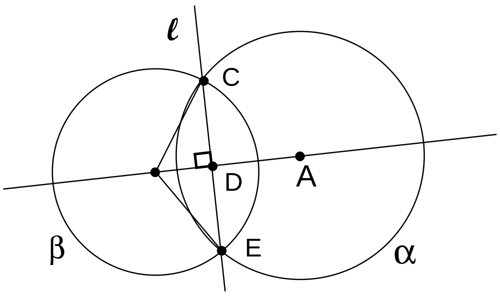
Nyt on siis löydetty yksi ympyröiden α ja β yhteinen piste siinä tapauksessa, että A ei ole suoralla $\overleftrightarrow{RS}$. Jos taas $\overleftrightarrow{RS}$ sattuu kulkemaan A:n kautta, niin valitaan jokin toinen A:n kauta kulkeva suora ℓ. Lauseen 2.6.6. mukaan ℓ leikkaa α:n kahdessa pisteessä, olkoot ne U ja V.



Kuva 115: Tapaus, jossa A sisältyy suoraan $\overleftrightarrow{RS}$

Jos toinen näistä kuuluu β:aan, niin leikkauspiste on löydetty. Jos toinen, olkoon se U, on β:n ulkopuolella, niin korvataan S pisteellä U. Koska nyt $\overleftrightarrow{RU}$ ei kulje pisteen A kautta, niin on palauduttu jo käsiteltyyn tapaukseen. Voi vielä käydä niin, että sekä U että V ovat β:n sisäpuolella. Tällöin korvataan R pisteellä U ja palaudutaan taas aikaisempaan.

On siis osoitettu, että on olemassa ainakin yksi leikkauspiste. Toinen löytyy seuraavasti: Olkoon C ympyröiden α ja β leikkauspiste. Olkoon ℓ sen kautta kulkeva suoran $\overleftrightarrow{AB}$ normaali ja leikatkoon se suoran $\overleftrightarrow{AB}$ pisteessä D.



Kuva 116: Toinen leikkauspiste

Valitaan E siten, että $C * D * E$ ja $DE \cong CD$. Tällöin $\overleftrightarrow{AB}$ on CE:n keskinormaali, joten lauseen 2.6.9 nojalla $\overline{AE} = \overline{AC} = a$, ja siten $E \in \alpha$. Vastaavasti $\overline{BE} = \overline{BC} = b$, ja siten $E \in \beta$.

Enempää leikkauspisteitä ei sitten lauseen 2.6.11 mukaan voi ollakaan, joten lause 2.6.12 on lopulta todistettu. □

Dedekindin aksiooma on riippumaton muista esittämistämme aksioomista, sillä on olemassa malli, jossa aksioomat (H1)–(H13) ja Arkhimedeen aksiooma pätevät, mutta Dedekindin aksiooma ei päde. (Perustelu on sopiva harjoitustehtävä.)

Toisaalta Arkhimedeen aksiooma on Hilbertin aksioomajärjestelmässä itse asiassa tarpeeton siinä mielessä, että jos oletetaan, että aksioomat (H1)–(H13) ja Dedekindin aksiooma pätevät, niin voidaan todistaa, että myös Arkhimedeen aksiooma pätee, toisin sanoen Arkhimedeen aksiooma voidaan tulkita lauseeksi. Todistetaan tämä vielä tämän luvun lopuksi. Todistaessa on oltava tarkkana, ettei käytä hyväksi Arkhimedeen aksioomaan nojautuvia luvun 2.5 tuloksia, jotta ei syyllistyisi kehäpäätelmään. Myös useimmat luvun 2.6. tulokset käyttävät hyväkseen luvun 2.5. tuloksia ja sitä kautta Arkhimedeen aksioomaa, joten nekin ovat nyt käyttökelvottomia.

LAUSE 2.6.13. *Arkhimedeen aksiooma seuraa aksioomista* (H1)–(H13) *ja Dedekindin aksioomasta.*

Todistus. Olkoot AB ja CD janoja. Pitää osoittaa, että on olemassa luku $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * D * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$. Antiteesi: näin ei ole. Merkitään

$$
\begin{aligned}
L &= \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \overleftrightarrow{CD}\} \\
L_1 &= \{P \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\} \mid \text{ ei ole olemassa lukua } n \in \mathbb{N} \text{ ja pistettä } E \text{ siten,} \\
&\qquad \text{että } C * D * E \text{ ja } CE \cong n \cdot AB.\} \\
L_2 &= L \setminus L_1.
\end{aligned}
$$

Osoitetaan, että L_1 ja L_2 toteuttavat Dedekindin ehdot.

(1) Antiteesin nojalla $D \in L_1$, joten $L_1 \neq \emptyset$. Toisaalta $C \in L_2$, joten myös $L_2 \neq \emptyset$.
(2) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ seuraa L_2:n määritelmästä.
(3) $D_1 \cup D_2 = L$ seuraa L_2:n määritelmästä.
(4) Antiteesi: On olemassa pisteet $P, Q \in L_1$ ja $R \in L_2$, jolla $P * R * Q$. Merkintöjä tarvittaessa muuttamalla voidaan olettaa, että $C * P * R$. Tällöin myös $R \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$. Koska $R \in L_2$, niin $R \notin L_1$ ja siten löytyy $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * R * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$. Koska $C * P * R$, niin $C * P * E$, mutta tämä on mahdotonta, koska $P \in L_1$.
(5) Antiteesi: On olemassa $P, Q \in L_2$ ja $R \in L_1$, joilla $P * R * Q$. Koska $R \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$, niin joko $C * R * Q$ tai $C * R * P$. Merkintöjä tarvittaessa muuttamalla voidaan olettaa, että $C * R * P$. Tästä joudutaan ristiriitaan, kuten kohdassa (4), kunhan vaihdetaan P:n ja R:n roolit.

Siis L_1 ja L_2 toteuttavat Dedekindin ehdot, joten on olemassa piste $P \in L$, joka toteuttaa Dedekindin jakoehdon. Koska $L = L_1 \cup L_2$, niin joko $P \in L_2$ tai $P \in L_1$.

Tapaus $P \in L_2$: Tässä on kolme osatapausta sen mukaan, onko $P*C*D$, $P = C$ vai $P \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$.

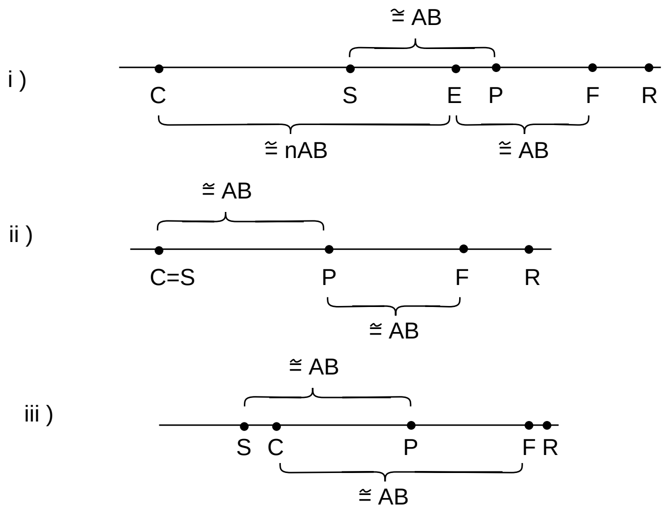
i) $P * C * D$: Valitaan R siten, että $R * P * C$, jolloin $R \in L_2$ ja joudutaan ristiriitaan pisteen P ominaisuuksien kanssa, sillä myös $C \in L_2$.

ii) $P = C$: Valitaan R siten, että $R * C * D$ ja valitaan lisäksi aksiooman (H8) mukaisesti piste $S \in \overrightarrow{CD}$ siten, että $CS \cong AB$ ja edelleen valitaan T siten, että $C * T * S$. Tällöin $R \in L_2$ ja myös $T \in L_2$ ($n = 1$, $E = S$) ja lisäksi $R * C * T$ eli $R * P * T$, mikä on taas mahdotonta.

iii) $P \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$: Koska nyt $P \in L_2$, niin L_2:n määritelmän nojalla löytyy luku $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * P * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$. Valitaan R siten, että $P*R*E$, jolloin $C*R*E$ ja $C*P*R$. Lisäksi L_2:n määritelmän mukaan $R \in L_2$. Tämä on taas mahdotonta, koska $C \in L_2$ ja $C * P * R$.

Siis kaikki tapauksen $P \in L_2$ alitapaukset ovat mahdottomia, joten koko tapaus $P \in L_2$ on mahdoton.

On siis oltava $P \in L_1$. Nyt $P \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$. Jos valitaan R siten, että $C * P * R$, niin P:n ominaisuuksien nojalla, koska $C \in L_2$, on oltava $R \in L_1$. Valitaan sitten $S \in \overrightarrow{PC}$ siten, että $PS \cong AB$. Tässä on taas kolme alatapausta: i) $P * S * C$, ii) $S = C$ ja iii) $P * C * S$. Kaikissa tapauksissa $S * P * R$, joten, koska $R \in L_1$, on P:n ominaisuuksien nojalla oltava $S \in L_2$.



Kuva 117: Tapauksen $P \in L_1$ vaihtoehdot

i) $P*S*C$. Tässä $S \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$, joten L_2:n määritelmän mukaan on olemassa luku $n \in \mathbb{N}$ ja piste E, siten, että $C * S * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$. Valitaan F siten, että $C * E * F$ ja $EF \cong AB$, jolloin monikerran määritelmän nojalla $CF \cong (n+1) \cdot AB$. Koska $P \in L_1$, niin ei voi olla $C * P * E$, ja koska lisäksi $C * E * F$, ei voi olla myöskään $P = E$. Koska tutkittavassa tapauksessa i) on $C * S * P$ ja $C * S * E$, jolloin $P \in \overrightarrow{CE}$, niin täytyy olla $C * E * P$. Koska lisäksi $C * S * E$, niin on $S * E * P$. Tällöin $PE < PS$. Koska $PS \cong AB$ niin lauseen 2.4.4 mukaan $PE < AB$. Toisaalta $EF \cong AB$, joten uudelleen lausetta 2.4.4 käyttäen $EP < EF$. Lauseen 2.4.4 iii) nojalla tällöin ei voi olla $P = F$ eikä $E * F * P$. Koska toisaalta $C * E * P$ ja $C * E * F$, ainoaksi mahdollisuudeksi jää $E * P * F$. Mutta tällöin, koska $C * E * P$, saadaan $C * P * F$, mikä sekin on mahdotonta, koska $CF \cong (n + 1) \cdot AB$ ja $P \in L_1$.

ii) $S = C$. Valitaan tässä F siten, että $C * P * F$ ja $PF \cong AB$. Tällöin, koska $CP \cong AB$, saadaan monikerran määritelmän mukaan $CF \cong 2 \cdot AB$. Koska $C * P * F$ ja $P \in L_1$, tämä on mahdotonta.

iii) $P*C*S$. Nyt valitaan F siten, että $F \in \overrightarrow{CP}$ ja $CF \cong AB$. Koska oletimme $P * C * S$, niin $PC < PS \cong AB \cong CF$, joten $PC < CF$. Lauseen 2.4.4. iii) nojalla ei tällöin voi olla $P = F$ eikä $C * F * P$. Koska $F \in \overline{CP}$, niin ainoaksi mahdollisuudeksi jää $C * P * F$. Tämäkin on mahdotonta, koska $P \in L_1$ ja $CF \cong 1 \cdot AB$.

Näin kaikki alatapaukset ovat mahdottomia, antiteesi on väärä ja lause on todistettu.

□

Huomautus 29. Lauseen 2.6.13 todistuksessa käytettiin antiteesia vain kerran ja sekin näennäisen vähäpätöisessä kohdassa (missä?), mutta sehän riitti!

III Paralleeliaksiooma

Seuraavassa oletetaan vielä yksi aksiooma, nimittäin paralleeliaksiooma, jolloin saadaan aikaan tuttu *euklidinen geometria.* Paralleeliaksiooma ei ole ristiriidassa muiden aksioomien kanssa, sillä koordinaattigeometria toteuttaa myös sen. Paralleeliaksioomaa ei toisaalta voi todistaa aikaisempien tulostemme avulla. Tämän osoitamme luvussa IV konstruoimalla Poincarén mallin, jossa muut aksioomat pätevät, mutta paralleeliaksiooma ei. Kirjan alussa esitetyssä Legendre'in todistuksessa on siis aukko. Mieti missä kohdassa?

3.1. Alkeellista euklidista geometriaa.

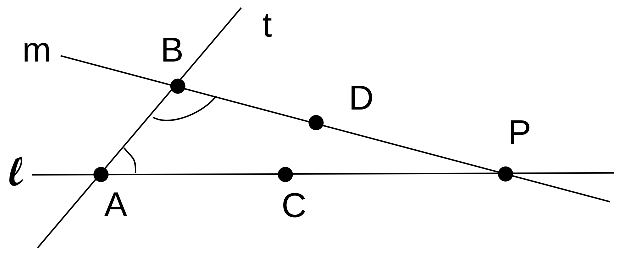
Tässä luvussa oletetaan, että aikaisempien lisäksi myös paralleeliaksiooma **(PAR)** pätee:

(PAR) Jos ℓ on suora ja P piste, joka ei sisälly suoraan A, niin P:n kautta kulkee korkeintaan yksi ℓ:n kanssa yhdensuuntainen suora.

Eukleideen viides aksiooma.

Huomautus 30. (PAR) ei ole täysin sama kuin kirjan alussa esitetty muoto Eukleideen paralleeliaksioomasta (PA), vaan nyt ainoastaan kielletään useamman kuin yhden paralleelin olemassaolo. Ero johtuu siitä, että nyt on käytössä lause 2.4.18, joka sanoo, että ainakin yksi on olemassa. Kirjan alussa ei itse asiassa edes esitetty sanamuodoltaan alkuperäistä Eukleideen paralleliaksioomaa (EA5), koska se olisi ollut teknisesti hankalaa. Nyt koneistomme on niin kehittynyt, että tämä voidaan helposti tehdä. Alkuperäinen aksiooma on seuraava:

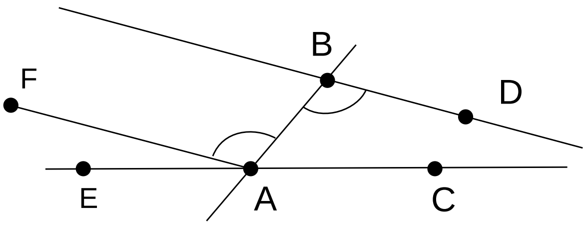
(EA5) Olkoot ℓ ja m eri suoria ja t kolmas suora, joka leikkaa suoraa ℓ pisteessä A ja suoraa m pisteessä $B \neq A$. Jos piste C sisälyy suoraan ℓ ja D suoralla m siten, että CDt ja $(\measuredangle DBA)^\circ + (\measuredangle BAC)^\circ < 180$, niin suorat ℓ ja m leikkaavat toisensa. Lisäksi, jos P on tuo leikkauspiste, niin PCt ja PDt.



Kuva 118: Eukleideen viides aksiooma

LAUSE 3.1.1. *Eukleideen viides aksiooma (EA5) pätee.*

Todistus. Olkoot A, B, C ja D kuten (EA5):ssä. Valitaan E siten, että $E * A * C$.



Kuva 119: (EA5):n todistus

Tällöin lauseen 2.5.17 nojalla $(\measuredangle EAB)^\circ + (\measuredangle BAC)^\circ = 180$. Oletuksen ja lauseen 2.5.17 nojalla saadaan nyt $(\measuredangle DBA)^\circ < 180 - (\measuredangle BAC)^\circ = (\measuredangle EAB)^\circ$, josta edelleen lauseen 2.5.20 mukaan

$$(*) \qquad \measuredangle DBA < \measuredangle EAB.$$

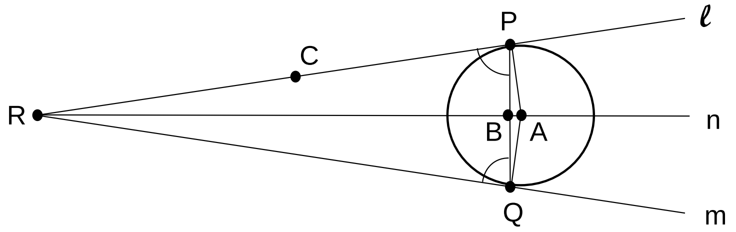
Symbolin "$<$" määritelmän mukaan tällöin kulman $\measuredangle EAB$ sisällä on piste F siten, että $\measuredangle DBA \cong \measuredangle BAF$. Nyt $EF\overleftrightarrow{AB}$, $E\overleftrightarrow{AB}C$ ja $CD\overleftrightarrow{AB}$ (oletus), joten aksiooman (H7) nojalla $F\overleftrightarrow{AB}D$. Tällöin lauseen 2.4.15 nojalla suorat $\overleftrightarrow{AF}$ ja $\overleftrightarrow{BD}$ ovat yhdensuuntaiset. Koska F on kulman $\measuredangle EAB$ sisällä, on $\overleftrightarrow{AF} \neq \overleftrightarrow{AE}$, jolloin (PA):n nojalla $\overleftrightarrow{AE}$ ei voi olla yhdensuuntainen $\overleftrightarrow{BD}$:n kanssa, vaan $\overleftrightarrow{AE}$ leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{BD}$. Olkoon leikkauspiste P. Pitää vielä näyttää, että $PC\overleftrightarrow{AB}$ ja $PD\overleftrightarrow{AB}$. Koska $CD\overleftrightarrow{AB}$, niin riittää, että $PC\overleftrightarrow{AB}$. Tehdään antiteesi $P\overleftrightarrow{AB}C$. (Huomaa, että ei voi olla $P = A$.) Koska $E\overleftrightarrow{AB}C$, niin $EP\overleftrightarrow{AB}$, joten $\measuredangle PAB = \measuredangle EAB$. Lisäksi $P\overleftrightarrow{AB}D$, joten $P{*}B{*}D$. Näinollen $\triangle PAB$ on kolmio ja ulkokulmaepäyhtälö 2.4.19 sovellettuna tähän kolmioon sanoo, että $\measuredangle PAB < \measuredangle ABD$. Tällöin $\measuredangle EAB < \measuredangle DBA$, mikä on vastoin ehtoa $(*)$ lauseen 2.4.12 iii) nojalla. □

Huomautus 31. Jos oletetaan, että Eukleideen 5. aksiooma pätee (muiden Hilbertin aksioomien lisäksi, tietenkin), niin voidaan todistaa, että (PA) pätee. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. Näin (EA5), (PA) ja (PAR) ovat siis "yhtä vahvoja".

LAUSE 3.1.2. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria. Jos suora $t \neq \ell$ leikkaa suoraa ℓ, niin se leikkaa myös suoraa m.*
Todistus. Olkoon P suorien ℓ ja t leikkauspiste. Aksiooman (PA) nojalla sen kautta voi kulkea vain yksi m:n suuntainen suora. Koska $\ell \parallel m$ ja $t \neq \ell$, niin t ei voi olla m:n kanssa yhdensuuntainen, vaan leikkaa sitä. □

Huomautus 32. Lauseen 3.1.2 perusteella suorien yhdensuuntaisuusrelaatio on euklidisessa geometriassa siinä mielessä melkein transitiivinen, että jos $\ell \parallel m$ ja $m \parallel t$ niin $\ell \parallel t$ tai $\ell = t$. Siten voidaan sanoa, että (eri) "suorat ℓ, m ja t ovat yhdensuuntaiset."

LAUSE 3.1.3. *Olkoon α ympyrä, A sen keskipiste sekä P ja $Q \in \alpha$ eri pisteitä siten, että A ei sisälly suoralle $\overleftrightarrow{PQ}$. Olkoot edelleen ℓ ja m pisteiden P ja Q kautta kulkevat α:n tangentit. Tällöin ℓ ja m leikkaavat toisensa. Jos leikkauspiste on R, niin $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle RQP$.*



Kuva 120: Tangentit

Todistus. Olkoon n janan PQ keskinormaali ja B janan PQ ja n:n leikkauspiste. Lauseen 2.6.9 nojalla n kulkee pisteen A kautta ja oletuksen nojalla $A \neq B$, joten $\measuredangle PBA$ on suora. Siten lauseen 2.5.19 mukaan $(\measuredangle PBA)^\circ = 90$. Koska $(\measuredangle BPA)^\circ > 0$ (lause 2.4.15.), niin Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla $(\measuredangle BAP)^\circ < 90$. Toisaalta lauseen 2.6.8 mukaan $\ell \perp \overleftrightarrow{AP}$, joten jos valitaan suoralta ℓ piste C siten, että $CB\overleftrightarrow{AP}$, niin $(\measuredangle CPA)^\circ = 90$. Siten

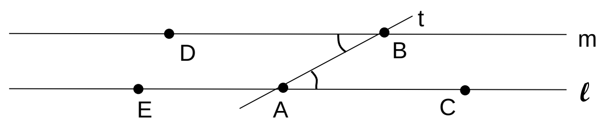
$$(\measuredangle BAP)^\circ + (\measuredangle CPA)^\circ < 90 + 90 = 180.$$

Tällöin lauseen 3.1.1 nojalla voidaan soveltaa Eukleideen viidettä aksioomaa, joka takaa, että ℓ ja n leikkaavat toisensa jossakin pisteessä R, jolle pätee $RB\overleftrightarrow{AP}$. Koska R sisältyy suoraan n, pätee lauseen 2.6.9 nojalla $RQ \cong RP$. Tällöin SSS-säännön nojalla $\triangle RAP \cong \triangle RAQ$. Erityisesti $\measuredangle RQA \cong \measuredangle RPA$, joten $\measuredangle RQA$ on suora. Siten $\overleftrightarrow{RQ}$ on suoran $\overleftrightarrow{AQ}$ normaali. Tällöin lauseen 2.6.8 mukaan $\overleftrightarrow{RQ}$ on ympyrän α tangentti ja koska Q:n kautta kulkee vain yksi α:n tangentti, niin $\overleftrightarrow{RQ} = m$. Siten R on m:n ja ℓ:n leikkauspiste. Väite $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle RQP$ seuraa lauseesta 2.4.1, sillä yllä todettiin, että $RQ \cong RP$. □

Vuorokulmat ja kolmion kulmasumma.

Seuraava lause ratkaisee vuorokulmalauseen 2.4.15 yhteydessä esitetyn ongelman euklidisessa tapauksessa.

LAUSE 3.1.4. (**Käänteinen vuorokulmalause**) *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria ja t suora, joka leikkaa ℓ:ää pisteessä A ja m:ää pisteessä B. Olkoot lisäksi C suoran ℓ ja D suoran m piste siten, että CtD. Tällöin $\measuredangle DBA \cong \measuredangle CAB$.*



Kuva 121: (PAR) takaa yhtä suuret kulmat!

Todistus. Antiteesi: $\measuredangle DBA \ncong \measuredangle CAB$. Lauseen 2.4.12 nojalla tällöin joko $\measuredangle DBA < \measuredangle CAB$ tai $\measuredangle CAB < \measuredangle DBA$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $\measuredangle DBA < \measuredangle CAB$. Valitaan E siten, että $E * A * C$. Lauseen 2.4.17 nojalla $(\measuredangle EAB)^\circ + (\measuredangle CAB)^\circ = 180$. Koska $\measuredangle DBA < \measuredangle CAB$, niin $(\measuredangle DBA)^\circ < (\measuredangle CAB)^\circ$ (lause 2.5.20) ja siten

$$(\measuredangle EAB)^\circ + (\measuredangle DBA)^\circ < (\measuredangle EAB)^\circ + (\measuredangle CAB)^\circ = 180.$$

Lisäksi $E\overleftrightarrow{AB}C$ eli EtC, joten oletuksen CtD nojalla EDt. Tällöin Eukleideen 5. aksiooman nojalla suorat m ja ℓ leikkaavat, mikä on mahdotonta, koska ne ovat yhdensuuntaiset. □

SEURAUS 3.1.5. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria ja n suoran ℓ normaali. Tällöin n on myös m:n normaali.*

Huomautus 33. Näytämme myöhemmin Poincarén mallin avulla, että ilman paralleeliaksioomaa ei voi todistaa edes, että n leikkaa suoraa m.

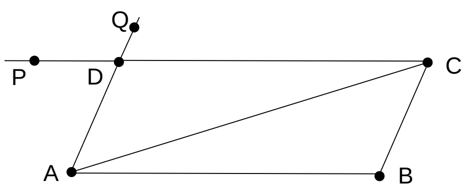
LAUSE 3.1.6. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria sekä n suoran ℓ normaali ja t suoran m normaali. Tällöin n ja t ovat joko samoja tai yhdensuuntaisia.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Luvussa 2.5 tarkasteltiin kolmion defektiä $\operatorname{def}(\triangle ABC) = 180 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle B)^\circ - (\measuredangle C)^\circ$ ja todettiin, että aina $\operatorname{def} \triangle ABC \geq 0$ ja että samassa mallissa joko $\operatorname{def}(\triangle ABC) > 0$ kaikilla kolmioilla tai sitten $\operatorname{def}(\triangle ABC) = 0$ kaikilla kolmioilla. Erityisesti euklidisen geometrian kaikissa malleissa pätee $\operatorname{def}(\triangle ABC) = 0$.

LAUSE 3.1.7 (Kulmasummalause). *Jokaisen kolmion defekti on 0.*
Todistus. Lauseen 2.5.26 nojalla riittää näyttää, että on olemassa suorakulmio. Konstruoidaan sellainen. Valitaan suora ℓ ja piste P, joka ei sisälly suoraan ℓ. Lauseen 2.4.18 nojalla voidaan valita P:n kautta kulkeva suora m siten, että $\ell \parallel m$. Lauseen 2.4.8 nojalla on olemassa P:n kautta kulkeva m:n normaali t. Lauseen 3.1.5 nojalla t on myös ℓ:n normaali. Olkoon Q ℓ:n ja t:n leikkauspiste. Valitaan sitten suoran ℓ piste $R \neq Q$. Lauseen 2.4.8 nojalla on olemassa R:n kautta kulkeva ℓ:n normaali n. Lauseen 3.1.5 nojalla n on myös m:n normaali, leikatkoon se m:ää pisteessä S. Koska $R \neq Q$, niin $n \neq t$ ja silloin on oltava $S \neq P$ lauseen 2.4.16 nojalla. Siten P, Q, R, S ovat eri pisteitä ja koska $\ell \parallel m$, mitkään kolme niistä eivät sisälly samaan suoraan. Koska $\ell \parallel m$, janat SP ja QR eivät leikkaa toisiaan, ja koska lauseen 3.1.6 nojalla $n \cong t$, niin myöskään janat PQ ja RS eivät leikkaa toisiaan. Siten $\square PQRS$ on nelikulmio. Konstruktion ja lauseen 3.1.5 perusteella sen kaikki kulmat ovat suoria, joten $\square PQRS$ on suorakulmio. □

Määritelmä 3.1. Olkoon $\square ABCD$ nelikulmio. Sanotaan, että $\square ABCD$ on *suunnikas*, mikäli $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DA}$.

LAUSE 3.1.8. *Olkoon $\square ABCD$ suunnikas. Tällöin $AB \cong CD$, $BC \cong DA$, $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ ja $\measuredangle B \cong \measuredangle D$.*



KUVA 122: SUUNNIKAS

Todistus. Valitaan pisteet P ja Q siten, että $P{*}D{*}C$ ja $Q{*}D{*}A$. Koska $\square ABCD$ on nelikulmio, niin $BC\overleftrightarrow{AD}$ ja nyt $P\overleftrightarrow{AD}C$, joten $P\overleftrightarrow{AD}B$. Koska $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, niin lauseen 3.1.4 mukaan $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ADP$. Lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle ADP \cong \measuredangle QDC$. Toisaalta, koska $\square ABCD$ on nelikulmio, niin $AB\overleftrightarrow{DC}$ ja nyt $Q\overleftrightarrow{DC}A$, joten $Q\overleftrightarrow{DC}B$. Koska $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, niin lauseen 3.1.4 nojalla $\measuredangle QDC \cong \measuredangle BCD$. Siten $\measuredangle A = \measuredangle DAB \cong \measuredangle ADP \cong \measuredangle QDC \cong \measuredangle BCD = \measuredangle C$, joten $\measuredangle A \cong \measuredangle C$. Aivan vastaavasti voidaan päätellä, että $\measuredangle B \cong \measuredangle D$. Koska $\square ABCD$ on nelikulmio, niin $BC\overleftrightarrow{AD}$ ja $CD\overleftrightarrow{AB}$, joten C on kulman $\measuredangle DAB$ sisällä. Puomilauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{AC}$ leikkaa janaa DB, joten $D\overleftrightarrow{AC}B$. Koska $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, niin lauseen 3.1.4 mukaan $\measuredangle DAC \cong \measuredangle BCA$. Koska jo tiedetään, että $\measuredangle B \cong \measuredangle D$, niin SKK-säännön nojalla $\triangle ACD \cong \triangle CAB$, mistä saadaan $AD \cong CB$ ja $CD \cong AB$. $\square$

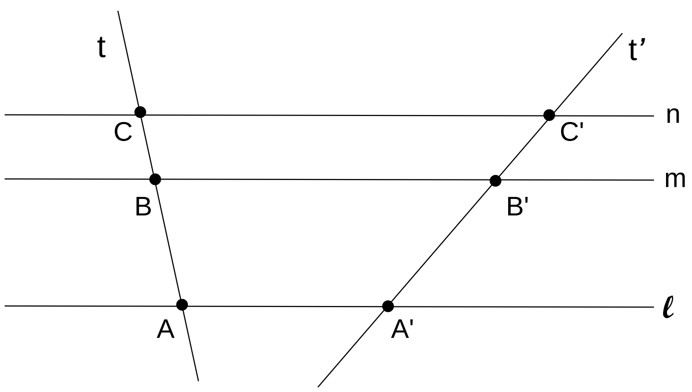
Yhdensuuntaiset ja samanmuotoiset.

Seuraava tulos on keskeinen euklidisessa geometriassa. Voidaan sanoa, että lähes kaikki myöhemmin esitettävät tärkeät tulokset perustuvat tähän tavalla tai toisella. Englanninkielisessä kirjallisuudessa tulos tunnetaan nimellä ”Parallel Projection Theorem”.

LAUSE 3.1.9. *Olkoot ℓ, m ja n eri suoria, jotka ovat keskenään yhdensuuntaisia. Olkoot lisäksi t ja t' suoria, jotka leikkaavat suoria ℓ, m ja n pisteissä A, B ja C. sekä A', B' ja C' vastaavassa järjestyksessä. Tällöin*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

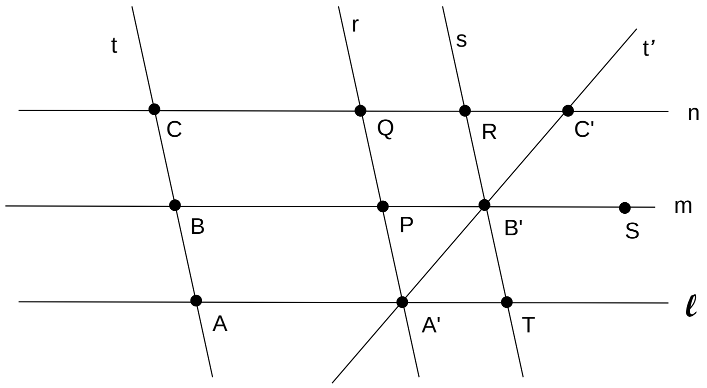
Lause 3.1.9 sanoo siis, että kolme yhdensuuntaista suoraa erottavat jokaisesta niitä leikkaavasta suorasta t kaksi palasta, joiden pituuksien suhde ei riipu suorasta t laisinkaan.



Kuva 123: Parallel Projection Theorem

Todistus. Tarkastellaan kolmea eri tapausta sen mukaan, onko pituuksien suhde $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ a) yksi, b) muu rationaaliluku vai c) irrationaalinen.

Tapaus a): $\overline{AB}/\overline{BC} = 1$. Lauseen 2.4.18 nojalla voidaan valita pisteen A' kautta kulkeva suora r siten, että $r \parallel t$. Lauseen 3.1.2 nojalla r leikkaa suoria m ja n, olkoot leikkauspisteet P ja Q vastaavassa järjestyksessä. Samoin voidaan valita B':n kautta kulkeva suora s siten, että $s \parallel t$. Lauseen 3.1.2 nojalla s leikkaa suoria ℓ ja n, olkoot leikkauspisteet T ja R vastaavassa järjestyksessä.



Kuva 124: Tapaus $\overline{AB}/\overline{BC} = 1$

Jos nyt $t = t'$, niin $A = A'$, $B = B'$ ja $C = C'$, joten väite on selvä. Jos taas $t \parallel t'$, niin nelikulmiot $\square AA'B'B$ ja $\square BB'C'C$ ovat suunnikkaita, jolloin lauseen 3.1.8 nojalla $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ja $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, ja väite seuraa.

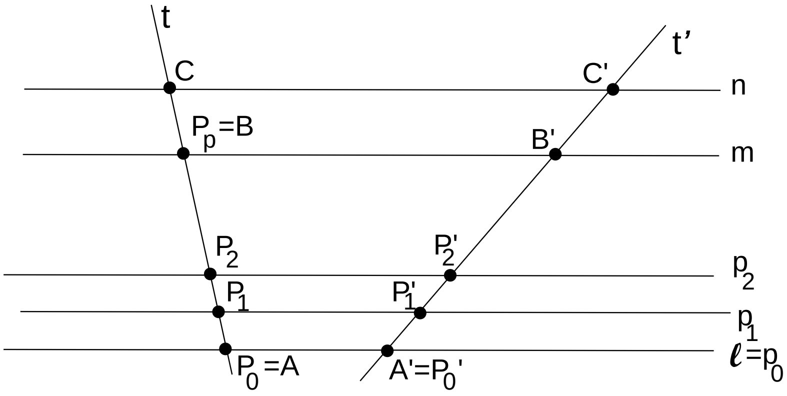
Voidaan siis olettaa, että t ja t' ovat eri suoria, jotka eivät ole yhdensuuntaisia. Tällöin $t' \neq r$ ja $t' \neq s$ eikä mikään pisteistä P, Q ja R ole suoralla t'. Lisäksi $Q \neq R$, sillä jos olisi $Q = R$, niin (PA):n nojalla olisi $r = s$, jolloin olisi $P = B'$, mikä on mahdotonta. Nyt tapauksessa a) on $\overline{AB} = \overline{BC}$, jolloin on oltava $A * B * C$. Tällöin AmC ja koska $\ell \parallel m$ ja $n \parallel m$, niin $AA'm$ ja $CC'm$ ja näin saadaan $A'mC'$ ja silloin $A' * B' * C'$. Vastaavasti voi päätellä, että $A' * P * Q$. Tällöin QPt' $(**)$. Lauseen 3.1.2 ja sen jälkeisen huomautuksen nojalla $r \parallel s$, joten $QA's$ $(*)$. Koska $A' * B' * C'$, niin $A'sC'$ ja silloin $(*)$:n nojalla QsC'. Tällöin $Q * R * C'$ tai $R * Q * C'$; kummassakin tapauksessa QRC'. Tällöin $(**)$:n nojalla PRt'. Valitaan nyt piste S siten, että $P * B' * S$, jolloin $Pt'S$ ja siten $Rt'S$. Koska $m \parallel n$, niin lauseen 3.1.4 mukaan $\measuredangle RC'B' \cong \measuredangle AB'P$. $(* * *)$.

Koska AsC', niin lauseen 3.1.4 nojalla $\measuredangle ATR \cong \measuredangle TRC'$. Toisaalta nyt $\square A'TB'P$ on suunnikas, joten lauseen 3.1.8 nojalla $\measuredangle A'TB' \cong \measuredangle A'PB'$. Koska $A * B * C$, niin $T * B' * R$, mikä perustellaan samalla tavalla kuin $A' * B' * C'$. Siksi $\measuredangle A'TB' = \measuredangle A'TR$ ja $\measuredangle TRC' = \measuredangle B'RC$. Siten $\measuredangle B'RC = \measuredangle TRC' \cong \measuredangle A'TR = \measuredangle A'TB' \cong \measuredangle A'PB'$ ja näin $\measuredangle B'RC \cong \measuredangle A'PB'$ $(****)$. Nyt nelikulmiot $\square AA'PB$ ja $\square BB'RC$ ovat suunnikkaita, joten lauseen 3.1.8 nojalla $\overline{AB} = \overline{A'P}$ ja $\overline{BC} = \overline{B'R}$. Tapauksessa a) pätee oletuksen mukaan, että $\overline{AB} = \overline{BC}$ ja siten $\overline{A'P} = \overline{B'R}$ eli $A'P \cong B'R$. Tämän sekä ehtojen $(***)$ ja $(****)$ ja vielä SKK–säännön nojalla saadaan

$$\triangle A'PB' \cong \triangle B'RC'.$$

Erityisesti tällöin $A'B' \cong B'C'$ eli $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$, joten $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

Tapaus b): $\overline{AB}/\overline{BC} = \frac{p}{q} \neq 1$ on rationaaliluku; $p, q \in \mathbb{N}$. Valitaan pisteet $P_0, \ldots, P_p$ seuraavasti: Asetetaan $P_0 = A$ ja valitaan $P_k \in \overrightarrow{AB}$, $k = 1, \ldots, p$ siten, että $\overline{AP_k} = k \cdot \frac{\overline{AB}}{p}$. Tämä on lauseen 2.6.3 nojalla mahdollista.



KUVA 125: TAPAUS $\overline{AB}/\overline{BC} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

Koska kaikilla k on $\overline{AP_k} < \overline{AP_{k+1}}$, niin $A * P_k * P_{k+1}$ kaikilla $k = 1, \ldots, p-1$. Lisäksi $\overline{AP_p} = p \cdot \frac{\overline{AB}}{p} = \overline{AB}$, joten $P_p = B$. Koska $A * P_k * P_{k+1}$, niin $\overline{P_kP_{k+1}} = \overline{AP_{k+1}} - \overline{AP_k} = k+1 \cdot \frac{\overline{AB}}{p} - k \cdot \frac{\overline{AB}}{p} = \frac{\overline{AB}}{p}$ $\forall k = 1, \ldots, p-1$ ja lisäksi myös $\overline{P_0P_1} = \overline{AP_1} = \frac{\overline{AB}}{p}$. Lauseen 3.4.18 nojalla jokaisen P_i:n $(0 = 1, \ldots, p-1)$ kautta kulkee ℓ:n kanssa yhdensuuntainen suora, olkoon se p_i. Lauseen 3.1.2 nojalla p_i leikkaa suoraa t', olkoon leikkauspiste P'_i. Merkitään lisäksi $p_0 = \ell$, $P'_0 = A'$ ja $p_p = m$, $P'_p = B'$. Lauseen 3.1.2 nojalla suorat p_k, $k = 0, \ldots, p$ ovat kaikki yhdensuuntaisia keskenään. Lisäksi pätee

$$\frac{\overline{P_kP_{k+1}}}{\overline{P_{k-1}P_k}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{p}}{\frac{\overline{AB}}{p}} = 1 \quad \forall\, k = 1, \ldots, p-1.$$

Tällöin voidaan soveltaa a) -kohtaa, jonka mukaan on

$$\frac{\overline{P'_kP'_{k+1}}}{\overline{P'_{k-1}P'_k}} = 1 \quad \forall\, k = 1, \ldots, p-1,$$

eli $\overline{P'_kP'_{k+1}} = \overline{P'_{k-1}P'_k}$ $\forall\, k = 1, \ldots, p-1$. Merkitään $a = \overline{P_kP_{k+1}}$, $k = 1, \ldots, p-1$. Koska $A = P_k * P_{k+1}$ ja suorat p_k ovat yhdensuuntaisia, pätee myös $A' * P'_k * P'_{k+1}$. Tämä perustellaan kuten kaava $A' * B' * C'$ a) -kohdassa. Täten

$$\overline{A'P'_{k+1}} = \overline{A'P'_k} + \overline{P'_kP'_{k+1}} = \overline{A'P'_k} + a \quad \forall\, k = 1, \ldots, p-1.$$

Koska $\overline{A'P'_1} = \overline{P'_0P'_1} = a$, niin induktiopäättelyllä nähdään, että kaikilla $k = 0, \ldots, p-1$ pätee $\overline{A'P'_{k+1}} = (k+1)a$. Erityisesti, kun $k = p-1$ saadaan

$$(*) \qquad \overline{A'B'} = \overline{A'P'_p} = p \cdot a.$$

Valitaan sitten pisteet $Q_0, \ldots, Q_q$ seuraavasti: Asetetaan $Q_0 = B$ ja $Q_k \in \overline{BC}$ siten, että $\overline{BQ_k} = k \cdot \frac{\overline{BC}}{q}$. Samalla tavalla kuin yllä voidaan nyt päätellä, että

$$(**) \qquad \overline{B'C'} = q \cdot b,$$

missä $b = \overline{Q'_k Q'_{k+1}}$, $k = 0, \ldots, q-1$. Nyt $\overline{P_{p-1}B} = \frac{\overline{AB}}{p}$ ja $\overline{BQ_1} = \frac{\overline{BC}}{q}$, joten oletuksen $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{p}{q}$ nojalla saadaan

$$\frac{\overline{P_{p-1}B}}{\overline{BQ_1}} = \frac{\overline{AB}\,/\,p}{\overline{BC}\,/\,q} = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q} = 1.$$

Soveltamalla a) -kohtaa yhdensuuntaisiin (lause 3.1.2) suoriin p_{p-1}, m ja q_1 saadaan

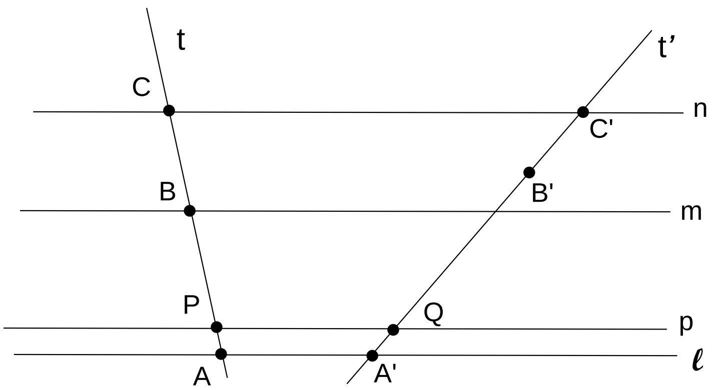
$$\frac{\overline{P'_{p-1}B'}}{\overline{B'Q'_1}} = 1$$

eli $\overline{P'_{p-1}P'_p} = \overline{Q'_0Q'_1}$ ja siten $a = b$. Tällöin $(*)$:n ja $(**)$:n nojalla

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{p \cdot a}{q \cdot b} = \frac{p}{q} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}},$$

kuten väitettiinkin.

Tapaus c): $\overline{AB}/\overline{BC} \notin \mathbb{Q}$. Olkoon $0 < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Merkitään $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = x'$ ja väitetään, että $x = x'$. Antiteesi on $x \neq x'$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voi olettaa, että $x' < x$. Valitaan rationaaliluku $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, siten, että $x' < \frac{p}{q} < x$. Lauseen 2.6.3 nojalla voidaan valita $P \in \overrightarrow{BA}$ siten, että $\overline{BP} = \frac{p}{q}\overline{BC}$. Tällöin $\overline{BP} < x\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\overline{BC} = \overline{AB}$, joten $B * P * A$. Lauseen 2.4.18 nojalla P:n kautta kulkee m:n kanssa yhdensuuntainen suora, olkoon se p. Lauseen 3.1.2 nojalla p leikkaa suoraa t', olkoon leikkauspiste Q. Tällöin $B' * Q * A'$. Tämä perustellaan taas kuten a) kohdan kaava $A' * B' * C$.



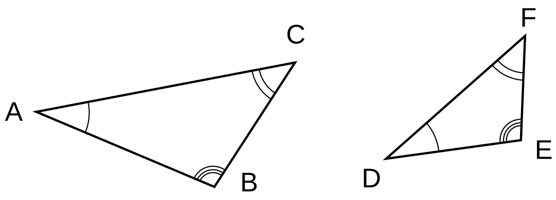
Kuva 126: Tapaus $\overline{AB}/\overline{BC} \notin \mathbb{Q}$

Nyt $\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} = \frac{p}{q}$, joten b) -kohdan nojalla $\frac{\overline{B'Q}}{\overline{B'C'}} = \frac{p}{q}$. Koska $B' * Q * A'$, niin $\overline{A'B'} > \overline{B'Q}$ ja siten

$$x' = \frac{\overline{A * B'}}{\overline{B'C'}} > \frac{\overline{B'Q}}{\overline{B'C'}} = \frac{p}{q} > x',$$

mikä on mahdotonta ja osoittaa antiteesin vääräksi. □

Määritelmä 3.2. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $\measuredangle C \cong \measuredangle F$. Tällöin sanotaan, että kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat *samanmuotoiset* ja merkitään $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



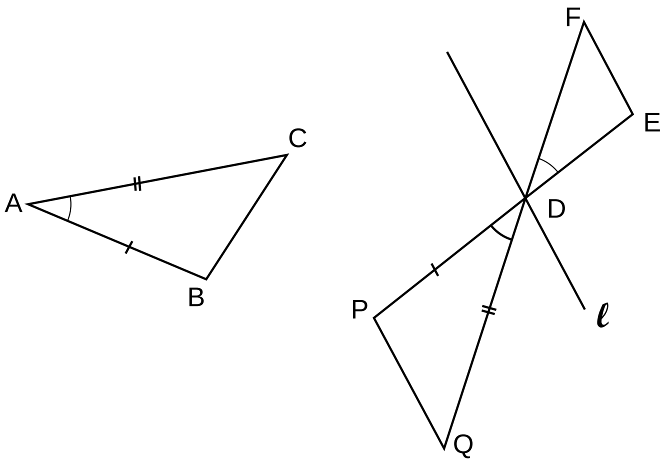
Kuva 127: Samanmuotoiset kolmiot

Samanmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhde on vakio:

LAUSE 3.1.10. *Olkoon* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$*. Tällöin*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

Todistus.



Kuva 128: Sivujen suhteet

Valitaan P siten, että $P * D * E$ ja $DP \cong AB$ ja Q siten, että $Q * D * F$ ja $DQ \cong AC$. Lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle PDQ \cong \measuredangle FDE$, jolloin oletuksen nojalla $\measuredangle PDQ \cong \measuredangle A$. SKS-säännön nojalla saadaan $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$. Erityisesti $\measuredangle Q \cong \measuredangle C$, joten oletuksen mukaan $\measuredangle Q \cong \measuredangle F$, eli $\measuredangle DQP \cong \measuredangle FDE$. Koska $F * D * Q$, niin $\measuredangle DQP = \measuredangle FQP$ ja $\measuredangle DFE = \measuredangle QFE$, joten $\measuredangle FQP \cong \measuredangle QFE$. Koska $E * D * P$, niin $E\overleftrightarrow{FQ}P$. Tällöin lauseen 2.4.15 mukaan $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{FE}$. Lauseen 2.4.18. nojalla D:n kautta kulkee suora ℓ, jolle $\ell \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, jolloin 3.1.2:n mukaan myös $\ell \parallel \overleftrightarrow{FE}$. Nyt voidaan soveltaa lausetta 3.1.9, jonka mukaan

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{DE}}.$$

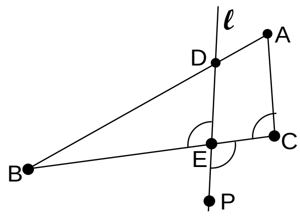
Koska $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$, niin $\overline{PD} = \overline{AB}$ ja $\overline{DQ} = \overline{AC}$. Siten

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}.$$

Merkintöjä vaihtamalla ($A \leftrightarrow B, D \leftrightarrow E$) nähdään, että myös

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}. \qquad \square$$

LAUSE 3.1.11. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $A * D * B$ ja ℓ suora, joka kulkee D:n kautta siten, että $\ell \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Tällöin ℓ leikkaa janaa BC pisteessä E. Lisäksi $B * E * C$ ja $\triangle DBE \sim \triangle ABC$.*



Kuva 129: Lause 3.1.11

Todistus. Pisteen E olemassaolo seuraa Paschin lauseesta. Valitaan P siten, että $D * E * P$, jolloin $D\overleftrightarrow{BC}P$. Koska $A * D * B$, niin $AD\overleftrightarrow{BC}$ ja siten $P\overleftrightarrow{BC}A$. Koska $\ell \parallel \overleftrightarrow{AC}$, niin lauseen 3.1.4 mukaan $\measuredangle PEC \cong \measuredangle ECA$. Lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle PEC \cong \measuredangle BED$, joten $\measuredangle ECA \cong \measuredangle BED$. Koska $B * E * C$, niin $\measuredangle BCA = \measuredangle ECA$, joten $\measuredangle BCA \cong \measuredangle BED$ $(*)$. Toisaalta $\measuredangle EBD = \measuredangle CBA$ $(**)$. Kulmasummalauseen 3.1.7 nojalla nähdään tällöin, että

$$(\measuredangle BDE)^\circ = 180 - (\measuredangle DBE)^\circ - (\measuredangle BED)^\circ = 180 - (\measuredangle CBA)^\circ - (\measuredangle BCA)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ$$

eli $\measuredangle BDE \cong \measuredangle BAC$. Tästä ja ehdoista $(*)$ ja $(**)$ väite seuraa. $\square$

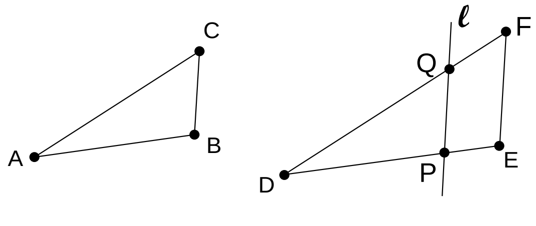
Lauseelle 3.1.10 pätee myös käänteinen tulos.

LAUSE 3.1.12. *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

Tällöin $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Todistus. Merkitään $a = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla ($A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$) voidaan olettaa, että $a \leq 1$. Jos $a = 1$, niin SSS-säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ja väite pätee. Voidaan siis olettaa, että $0 < a < 1$.



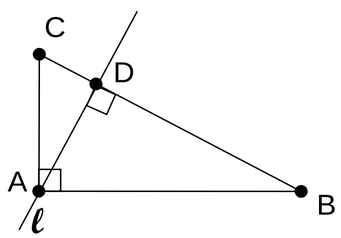
Kuva 130: Lause 3.1.12

Valitaan $P \in \overrightarrow{DE}$ siten, että $\overline{DP} = \overline{AB}$. Koska $a < 1$, niin $\overline{AB} < \overline{DE}$ ja siten $D * P * E$. Olkoon ℓ pisteen P kautta kulkeva suora siten, että $\ell \parallel \overleftrightarrow{FE}$. Lauseen 3.1.11 nojalla ℓ leikkaa janaa DF pisteessä Q siten, että $D * Q' * F$ ja $\triangle DPQ \sim \triangle DEF$. Tällöin lauseen 3.1.10 nojalla $\frac{\overline{DQ}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{DE}}$. Koska $\frac{\overline{DP}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = a$, niin $\overline{DQ} = a \cdot \overline{DF}$ ja $\overline{QP} = a \cdot \overline{FE}$. Suhdeluvun a määritelmän mukaan tällöin $\overline{DQ} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \cdot \overline{DF} = \overline{AC}$ ja $\overline{QP} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \cdot \overline{FE} = \overline{BC}$. Siten $AB \cong DP$, $AC \cong DC$ ja $BC \cong QP$. SSS-säännön nojalla tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$. Koska siis $\triangle DPQ \sim \triangle DEF$, niin väite seuraa. □

Pythagoras ja trigonometria.

LAUSE 3.1.13 (Pythagoras). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio siten, että $\measuredangle A$ on suora. Tällöin*

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$



KUVA 131: PYTHAGORAAN LAUSEEN TODISTUS

Todistus. Olkoon ℓ pisteen A kautta kulkeva $\overleftrightarrow{BC}$:n normaali; leikatkoon normaali ℓ suoraa $\overleftrightarrow{BC}$ pisteessä D. Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla $(\measuredangle B)^\circ < 90$ ja $(\measuredangle C)^\circ < 90$, jolloin pätee $C * D * B$. Tämä perustellaan täsmälleen samoin kuin lauseen 2.5.25 todistuksessa. Tällöin $(\measuredangle BDA)^\circ = 90 = (\measuredangle CDA)^\circ$ ja oletuksen mukaan $(\measuredangle CAB)^\circ = 90$. Lisäksi kulmasummalauseen 3.1.7 mukaan

$$\begin{aligned}(\measuredangle CAD)^\circ &= 180 - (\measuredangle ACD)^\circ - (\measuredangle ADC)^\circ = 180 - (\measuredangle ACB)^\circ - 90 \\ &= 180 - (\measuredangle ACB)^\circ - (\measuredangle CAB)^\circ = (\measuredangle ABC)^\circ\end{aligned}$$

eli $\measuredangle CAD \cong \measuredangle ABC$. Koska myös $\measuredangle CDA \cong \measuredangle CAB$ ja $\measuredangle ACD = \measuredangle ACB$, niin $\triangle DCA \sim \triangle ACB$. Tällöin lauseen 3.1.10 nojalla $\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ ja $\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$, mistä saadaan

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{DB}\,\overline{CB} + \overline{DC}\,\overline{CB} = \overline{CB}\big(\overline{DB} + \overline{DC}\big).$$

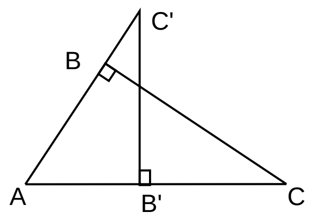
Koska $C * D * B$, niin $\overline{DB} + \overline{DC} = \overline{CB}$, ja väite seuraa. □

Määritelmä 3.3. Euklidisessa geometriassa voidaan määritellä kulman *sini* ja *kosini* seuraavasti. Sanotaan, että kulma $\measuredangle A$ on *terävä*, jos $(\measuredangle A)^\circ < 90$ ja että kulma $\measuredangle A$ on *tylppä*, jos $(\measuredangle A)^\circ > 90$. Olkoon ensin $\measuredangle A$ terävä. Valitaan piste $B \neq A$ kulman A toiselta kyljeltä. Olkoon ℓ pisteen B kautta kulkeva suoran $\overleftrightarrow{AB}$ normaali.

Tällöin ℓ leikkaa myös kulman $\measuredangle A$ toista kylkeä. (*Perustelu:* Olkoon toinen kylki $\overrightarrow{AP}$. Jos ℓ ei leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{AP}$, niin $\ell \parallel \overleftrightarrow{AP}$ ja lauseen 3.1.5 nojalla $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AP}$, ja tällöin $\measuredangle A = \measuredangle BAP$ on suora kulma vastoin oletusta. Siis suorat ℓ ja $\overleftrightarrow{AP}$ leikkaavat toisensa jossakin pisteessä R. Pitää osoittaa, että $R \in \overrightarrow{AP}$. Jos näin ei olisi, niin $R * A * P$. Tällöin $\measuredangle RAB$ on kulman $\measuredangle PAB$ eli kulman $\measuredangle A$ täydennyskulma. Koska $\measuredangle A$ on terävä, niin $\measuredangle RAB$ siis on tylppä eli $(\measuredangle RAB)^\circ > 90$. Koska $\measuredangle RBA$ on suora, kolmion $\triangle RAB$ defekti olisi aidosti negatiivinen vastoin Saccherin ja Legendre'in lausetta. ℓ leikkaa siis tosiaan myös kulman $\measuredangle A$ toista kylkeä.) Olkoon C suorien ℓ ja $\overleftrightarrow{AP}$ leikkauspiste. Ei voi olla $C = A$, koska $\ell \neq \overleftrightarrow{AB}$, joten AC on jana. Tällöin voidaan asettaa

$$\sin \measuredangle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad \cos \measuredangle A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \in \mathbb{R}.$$

Huomautus 34. Määritelmässä valittiin B aika mielivaltaisesti. Mitään muita mielivaltaisia valintoja ei tehty, ℓ ja C ovat B:n valinnan jälkeen yksikäsitteisiä. Voisi olla, että toisenlainen B:n valinta tuottaisi toisenlaisen sinin ja kosinin arvon, jolloin määritelmässä ei olisi järkeä. Osoitetaan, että B:n valinta ei vaikuta asiaan.



Kuva 132: Pinta-alan yksikäsitteisyys

Jos B:n sijasta valitaan jokin toinen piste B' kulman $\measuredangle A$ jommalta kummalta kyljeltä, niin olkoon C' vastaavasti piste $\measuredangle A$:n toiselta kyljeltä niin, että $\measuredangle AB'C'$ on suora. Tällöin kulmasummalauseen 3.1.7. mukaan $\measuredangle ACB \cong \measuredangle AC'B'$ ja siis lauseen 3.1.10 nojalla

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \quad \text{ja} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}},$$

ts. sinin ja kosinin määrittelevät lausekkeet pysyvät samoina, käytettiinpä määritelmässä sitten pistettä B tai B'.

Nyt on määritelty terävän kulman sini ja kosini. Jos $\measuredangle A$ on tylppä, niin sen täydennyskulma on terävä. Merkitään täydennyskulmaa $(\measuredangle A)'$:lla ja asetetaan

$$\sin \measuredangle A = \sin(\measuredangle A)' \quad \text{ja} \quad \cos \measuredangle A = -\cos(\measuredangle A)'.$$

Lisäksi, jos $\measuredangle A$ on suora kulma, niin sovitaan, että $\sin \measuredangle A = 1$ ja $\cos \measuredangle A = 0$.

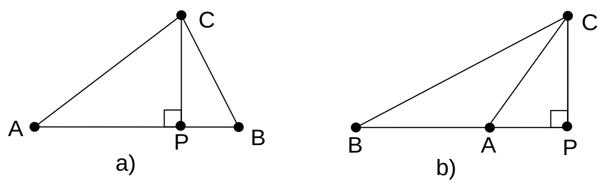
LAUSE 3.1.14 (Sinilause). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin pätee*

$$\frac{\sin \measuredangle A}{\sin \measuredangle B} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

Todistus. Jos $\measuredangle A$ tai $\measuredangle B$on suora, niin väite seuraa suoraan sinin määritelmästä. Voidaan siis olettaa, että kulmat $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ eivät ole suoria. Saccherin ja Legenrdre'in lauseen nojalla ne molemmat eivät voi olla tylppiä, joten ainakin toinen niistä on terävä. Merkintöjä tarvittaessa muuttamalla voidaan olettaa, että $\measuredangle B$ on terävä. Olkoon ℓ pisteen C kautta kulkeva $\overleftrightarrow{AB}$:n normaali ja P sen ja $\overleftrightarrow{AB}$:n leikkauspiste.

Koska $\measuredangle A$ ei ole suora, niin ei voi olla $P = A$; samoin ei voi olla $P = B$. Toisaalta, koska $\measuredangle CBA$ on terävä, niin ei voi olla $P * B * A$, sillä jos näin olisi, niin $\measuredangle PC$ olisi terävän kulman $\measuredangle CBA$ täydennyskulmana tylppä ja koska $\measuredangle CPB$ on suora, kolmion $\triangle CPB$ defekti olisi aidosti negatiivinen, mikä on mahdotonta.

Jäljelle jää vain kaksi mahdollisuutta. a) $B * P * A$ ja b) $B * A * P$.



KUVA 133: SINILAUSEEN TODISTUS

Koska $\measuredangle CPA$ on suora, on molemmissa tapauksissa Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla $\measuredangle CAP$ terävä.

Tapaus a): Jos $B * P * A$, niin $\measuredangle BAC = \measuredangle PAC$ ja $\measuredangle ABC = \measuredangle PBC$ ja sinin määritelmästä saadaan

$$\frac{\sin\measuredangle A}{\sin\measuredangle B} = \frac{\sin\measuredangle BAC}{\sin\measuredangle ABC} = \frac{\sin\measuredangle PAC}{\sin\measuredangle PBC} = \frac{\overline{PC}\,/\,\overline{AC}}{\overline{PC}\,/\,\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

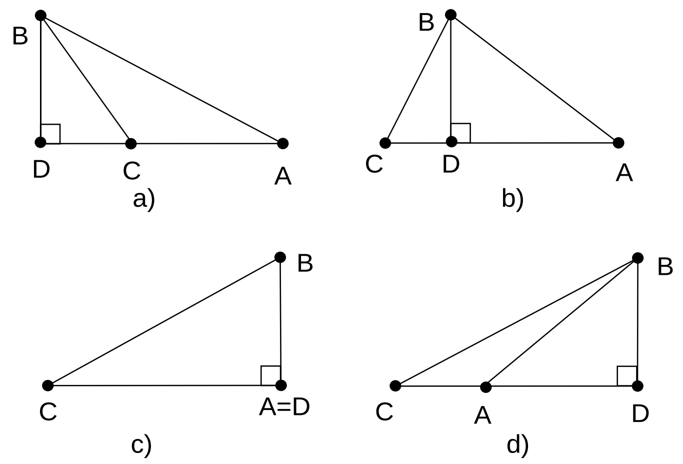
Tapaus b): Jos $B * A * P$, niin $\measuredangle ABC = \measuredangle PBC$ ja $\measuredangle BAC$ on kulman $\measuredangle PAC$ täydennyskulma, jolloin sinin määritelmän mukaan $\sin\measuredangle BAC = \sin\measuredangle PAC$ ja nyt täsmälleen sama lasku kuin a) -kohdassa antaa väitteen. $\square$

LAUSE 3.1.15 (Kosinilause). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin pätee*

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\,\overline{AC}\cos\measuredangle C.$$

Todistus. Jos $\measuredangle C$ on suora, niin väite seuraa kosinin määritelmästä ja Pythagoraan lauseesta. Voidaan siis olettaa, että $\measuredangle C$ ei ole suora. Olkoon ℓ pisteen B kautta kulkeva $\overleftrightarrow{CA}$:n normaali ja D suorien ℓ ja $\overleftrightarrow{CA}$ leikkauspiste. Koska $\measuredangle C$ ei ole suora kulma, niin $C \neq D$. Tällöin on neljä mahdollisuutta

a) $D * C * A$
b) $C * D * A$
c) $D = A$
d) $C * A * D$



Kuva 134: Kosinilauseen todistus

Tapaus a): Tässä $\measuredangle BCD$ on $\measuredangle BCA$:n täydennyskulma. Koska $\measuredangle BDC$ on suora, niin $\measuredangle BCD$ on Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla terävä ja $\measuredangle BCA$ tylppä. Kosinin määritelmän mukaan $\cos\measuredangle C = \cos\measuredangle BCA = -\cos\measuredangle BCD = -\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$. Koska $D * C * A$, niin $\overline{AD} = \overline{DC} + \overline{CA}$. Pythagoraan lauseen nojalla $\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2$ ja $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$. Tällöin

$$\begin{aligned}&\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\,\overline{AC}\cos\measuredangle C = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AC}\;\overline{DC}\\ &= \overline{BC}^2 + (\overline{AC} + \overline{DC})^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2.\end{aligned}$$

Tapaus b): Tässä $\measuredangle C = \measuredangle DCB$, joten $\cos\measuredangle C = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$, $\overline{AC} - \overline{DC} = \overline{DA}$, $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2$ ja $\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2$. Yhdistämällä nämä saadaan haluttu tulos:

$$\begin{aligned}&\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\;\overline{AC}\cos\measuredangle C = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}\;\overline{DC}\\ &= \overline{BC}^2 + (\overline{AC} - \overline{DC})^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AB}^2.\end{aligned}$$

Tapaus c): Tässä $\cos\measuredangle C = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, ja $\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$, joten

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\;\overline{AC}\cos\measuredangle C = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2.$$

Tapaus d): Tässä $\measuredangle C = \measuredangle BCD$, joten $\cos\measuredangle C = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$, $\overline{AC} - \overline{DC} = -\overline{AD}$, $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2$ ja $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$. Saadaan taas:

$$\begin{aligned}&\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\;\overline{AC}\cos\measuredangle C = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}\;\overline{AD}\\ &= \overline{BC}^2 + (\overline{AC} - \overline{DC})^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + (-\overline{AD})^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2.\end{aligned}$$

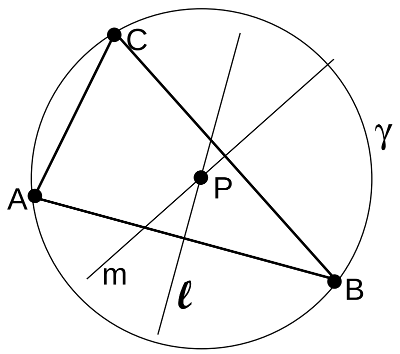
$\square$

Kolmioon liittyvät perusympyrät.

LAUSE 3.1.16. *Olkoon ABC kolmio. On olemassa täsmälleen yksi ympyrä γ, joka kulkee A:n, B:n ja C:n kautta.*

Huom: Lauseen 3.1.16 ympyrää γ sanotaan kolmion $\triangle ABC$ *ympäri piirretyksi ympyräksi.*

Todistus. Olkoon ℓ janan AB ja m janan BC keskinormaali. Tällöin ℓ ja m leikkaavat toisensa, sillä jos olisi $\ell \cong m$, niin lauseen 3.1.6 nojalla olisi joko $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$ tai $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Kumpikaan tapaus ei ole mahdollinen, koska $\triangle ABC$ on kolmio. Olkoon P keskinormaalien ℓ ja m leikkauspiste, jonka juuri totesimme olevan olemassa. Lauseen 2.6.9 mukaan $\overline{AP} = \overline{BP}$ ja $\overline{BP} = \overline{BC}$, joten p-keskinen ja $\overline{AP}$-säteinen ympyrä γ on haluttu ympyrä.



Kuva 135: Kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretty ympyrä

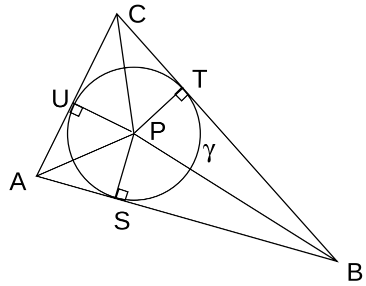
Halutun ympyrän yksikäsitteisyys seuraa välittömästi lauseesta 2.6.11. $\square$

LAUSE 3.1.17. *Kolmion kaikki kolme sivun keskinormaalia leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Lauseen 2.3.9 nojalla kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on jokaisella keskinormaalilla. $\square$

LAUSE 3.1.18. *Kolmion kaikki kolme kulman puolittajaa leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ annettu kolmio. Puomilauseen 3.2.11 nojalla kulman $\measuredangle CAB$ puolittaja leikkaa sivua CB jossain pisteessä D. $\triangle ABD$ on myös kolmio ja $\measuredangle CBA$:n puolittaja on $\triangle DBA$:n puolittaja. Taas puomilauseen nojalla kyseinen puolittaja leikkaa janaa AD ja siten puolittajaa $\overrightarrow{AD}$. Olkoon P kyseinen leikkauspiste. P ei voi olla suorilla $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ eikä $\overleftrightarrow{AC}$. Olkoon S pisteen P kautta kulkevan $\overleftrightarrow{AB}$.n normaalin ja $\overleftrightarrow{AB}$:n leikkauspiste.



Kuva 136: Kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretty ympyrä

Tällöin $S \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$, sillä muutoin olisi

$$90 = (\measuredangle PSB)^\circ \overset{2.4.19}{\leq} (\measuredangle PAB)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle CAB)^\circ \overset{2.5.18}{<} \tfrac{1}{2}180 = 90,$$

mikä on mahdotonta. Vastaavasti todetaan, että $S \in \overrightarrow{BA} \setminus \{B\}$.

Olkoon T pisteen P kautta kulkevan $\overleftrightarrow{BC}$:n normaalin ja $\overleftrightarrow{BC}$:n leikkauspiste. Kuten yllä, $T \in \overrightarrow{BC} \setminus \{B\}$. Olkoon vielä U pisteen P kautta kulkevan $\overleftrightarrow{AC}$:n normaalin ja $\overleftrightarrow{AC}$:n leikkauspiste, jolloin $U \in \overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$.

Nyt, koska $U \in \overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$ ja $S \in \overrightarrow{BA} \setminus \{B\}$ ja $\overrightarrow{AP}$ on kulman $\measuredangle CAB$ puolittaja, pätee $\measuredangle UAP \cong \measuredangle SAP$. Koska $\measuredangle U$ ja $\measuredangle S$ ovat suoria kulmia, niin lauseen 3.1.7. nojalla $\measuredangle UPA \cong \measuredangle SPA$. Siten $\triangle APU \sim \triangle APS$. Koska näissä on yhteinen sivu AP, on lauseen 3.1.10 mukaan myös $UP \cong SP$. Vastaavasti nähdään, että $\triangle BPS \sim \triangle BPT$, josta edelleen $SP \cong TP$. Kaikkiaan siis $\overline{SP} = \overline{TP} = \overline{UP}$.

Olkoon γ ympyrä, jonka keskipiste on P ja säde $\overline{SP}$. Lauseen 2.6.8 nojalla $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ ja $\overleftrightarrow{AC}$ ovat γ:n tangentteja.

Lauseen 2.6.7 nojalla voidaan edelleen nähdä, että $PS\overleftrightarrow{AC}$. Koska $S \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$, on myös $BC\overleftrightarrow{AC}$ ja siten $PB\overleftrightarrow{AC}$. Vastaavasti nähdään, että $PA\overleftrightarrow{BC}$.

Siten P on kulman $\measuredangle ACB$ sisällä.

Tässä tilanteessa on oltava $T \in \overrightarrow{CB} \setminus \{C\}$. Ei nimittäin ainakaan voi olla $T * C * B$, sillä jos näin kuitenkin olisi, niin olisi $T\overleftrightarrow{AC}B$, ja koska $PT\overleftrightarrow{AC}$, mikä seuraa lauseesta 2.6.7, olisi myös $P\overleftrightarrow{AC}B$, mikä ei ole mahdollista, koska $PB\overleftrightarrow{AC}$, kuten yllä nähtiin. Ei myöskään voi olla $T = C$, sillä jos näin olisi, niin γ:n tangentti $\overleftrightarrow{AC}$ leikkaisi γ:aa pisteissä U ja C, jolloin olisi $U = C = T$ ja edelleen $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$ (Lauseen 2.6.8:n jälkeinen huomautus 27), mikä on mahdotonta, koska $\triangle ABC$ on kolmio.

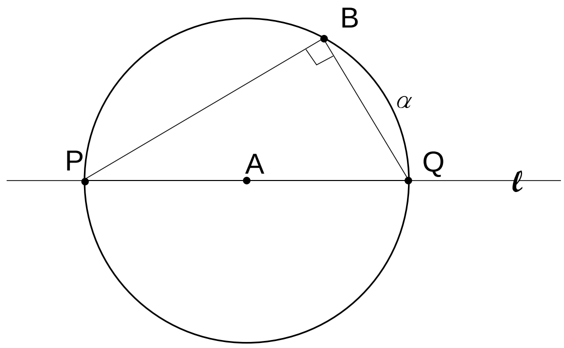
Vastaavasti nähdään, että $U \in \overrightarrow{CA} \setminus \{C\}$. Siten $\measuredangle TCP = \measuredangle BCP$ ja $\measuredangle UCP = \measuredangle ACP$. Nyt kolmioissa $\triangle PCU$ ja $\triangle PCT$ on $\measuredangle U \cong \measuredangle T$ (suora kulma) ja $PT \cong PU$ (γ:n säde) ja PC yhteinen, joten lauseen 2.4.21 nojalla $\triangle PCU \cong \triangle PCT$ ja erityisesti $\measuredangle UCP \cong \measuredangle TCF$ eli $\measuredangle ACP \cong \measuredangle BCP$. Koska, kuten todettiin, P on kulman $\measuredangle C$ sisällä, niin $\overrightarrow{CP}$ on kulman $\measuredangle C$ puolittaja. Siten P sisältyy jokaiseen puolittajaan. $\square$

Huom: Lauseen 3.1.18 todistuksessa esiintyvää ympyrää γ sanotaan *kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretyksi ympyräksi.*

Kehäkulmat.

Seuraava lause sanoo, että ”ympyrän halkaisijaa vastaava kehäkulma on suora kulma.

LAUSE 3.1.20 (Thales). *Olkoon α ympyrä, keskipiste A, ja ℓ pisteen A kautta kulkeva suora, joka leikkaa α:aa pisteissä P ja Q. Olkoon lisäksi $B \in \alpha \setminus \{P, Q\}$. Tällöin kulma $\measuredangle PBQ$ on suora.*



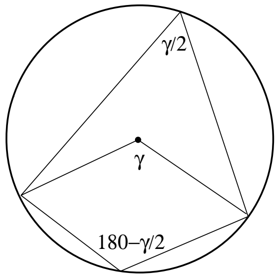
Kuva 137: Thaleen lause

Todistus. Lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle APB \cong \measuredangle ABP$ ja $\measuredangle AQB \cong \measuredangle ABQ$. Merkitään $\alpha = (\measuredangle APB)^\circ$ ja $\beta = (\measuredangle AQB)^\circ$. Koska $P{*}A{*}Q$, niin $\measuredangle APB = \measuredangle QPB$ ja $\measuredangle AQB = \measuredangle PQB$. Koska kolmion $\triangle PQB$ astemittojen summa on 180, on $(\measuredangle PQB)^\circ = 180 - (\measuredangle QPB)^\circ - (\measuredangle PQB)^\circ = 180 - \alpha - \beta$. Koska $P * A * Q$, niin $\overrightarrow{BA}$ on $\measuredangle PBQ$:n sisällä, jolloin lauseen 2.2.15 nojalla $(\measuredangle PBQ)^\circ = (\measuredangle ABP)^\circ + (\measuredangle ABQ)^\circ$. Koska siis $\measuredangle ABP \cong \measuredangle APB$ ja $\measuredangle ABQ \cong \measuredangle APB$, niin saadaan

$$(*) \qquad (\measuredangle PBQ)^\circ = \alpha + \beta.$$

Tällöin $\alpha + \beta = 180 - \alpha - \beta$, josta saadaan $\alpha + \beta = 90$, mikä $(*)$:n kanssa antaa väitteen. □

”Kehäkulmalause” on edellisen yleistys. Sen mukaan ”ympyrän keskuskulmaa γ vastaava kehäkulma on $\frac{1}{2}\gamma$ ja vastakkainen kehäkulma $180 - \frac{1}{2}\gamma$. Tämä siis riippumatta siitä, missä kohtaa asianomaista kaarta kehäkulman kärki sijaitsee.



Kuva 138: Kehäkulmalauseen väite tapauksessa $A\ell B$

LAUSE 3.1.21. (Kehäkulmalause). *Olkoon α ympyrä, keskipiste A ja ℓ suora, joka ei kulje A:n kautta ja leikkaa α:n pisteissä P ja Q. Olkoon lisäksi $B \in \alpha \setminus \{P, Q\}$. Tällöin, jos a) $AB\ell$, niin $(\measuredangle PBQ)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$ ja jos b) $A\ell B$, niin $(\measuredangle PBQ)^\circ = 180 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$.*