Lassi Kurittu, Veli-Matti Hokkanen ja Lauri Kahanpää[1]

GEOMETRIA

Sisällys

I Historiaa 2
II Hilbertin aksioomajärjestelmä 8
2.1. Aksiomaattisesta menetelmästä 8
2.2. Hilbertin aksioomat (H1)–(H3) 9
2.3. Hilbertin aksioomat (H4)–(H7) 11
2.4. Hilbertin aksioomat (H8)–(H13) 25
2.5. Arkhimedeen aksiooma 43
Janamitan konstruktio 44
Kulmamitan konstruktio 51
2.6. Dedekindin aksiooma 67
III Paralleeliaksiooma 84
3.1. Alkeellista euklidista geometriaa 84
Eukleideen viides aksiooma 84
Vuorokulmat ja kolmion kulmasumma 86
Yhdensuuntaiset ja samanmuotoiset 88
Pythagoras ja trigonometria 94
Kolmioon liittyvät perusympyrät 98
Kehäkulmat 100
Kolmion ala 104
Cevan lause 105
3.2. Vähän kehittyneempää euklidista geometriaa 111
IV Liikkeet ja Poincarén malli 121
4.1. Peilaukset 121
Peilaus suoran suhteen 121
Inversio ympyrän suhteen 125
Pisteen potenssi ympyrän suhteen 135
Ortogonaalisista ympyröistä 137
4.2. Poincarén malli 146
4.3. Hyperbolista geometriaa 146
4.4. Lopuksi 177
Hilbertin tasogeometrian aksioomat 178
Hakemisto 179

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

I Historiaa

Sana *geometria* on peräisin kreikasta, *geo* = maa, *metrein* = mitata. Yksi ensimmäisistä geometrisista ongelmista oli ympyrän kehän pituuden ($2\pi r$) määrittäminen, siis π:n likiarvon arviointi. Babylonialaiset käyttivät kaavaa ”kehä = $3\times$ halkaisija” eli $\pi \approx 3$. Myös muinaiset juutalaiset käyttivät samaa π:n arvoa; se mainitaan jopa Raamatussa (1. Kuningasten kirja 7:28), millä perusteella Rabbi Nehemiahin myöhempi π:n likiarvo $\frac{22}{7} \approx 3.14159$ hylättiin. Muinaiset egyptiäiset käyttivät π:lle arviota $(\frac{16}{9})^2 \approx 3.1604$. Matematiikan kannalta näissä eri likiarvoissa ei ole oleellista arvion tarkkuus vaan se oivallus, että kaiken kokoisissa ympyröissä kehän ja halkaisijan suhde on täsmälleen sama. (Vasta vuonna 1768 Lambert[2] osoitti, että π ei ole rationaaliluku, ja 1882 Lindemann[3] osoitti sen olevan transkendenttiluku.)

Egyptiläisten geometria ei ollut varsinaista matematiikkaa, vaan pikemminkin kokoelma perustelemattomia kaavoja ja laskulakeja. Joskus he arvasivat oikein: he osasivat esimerkiksi laskea puolisuunnikkaan alan ja jopa katkaistun pyramidin tilavuuden aivan oikein. Suoran kulman egyptiläiset virittivät maastoon pingottamalla kolmioksi narulenkin, johon oli merkitty kolmen, neljän ja viiden yksikön pituiset sivut. Kaksoisvirran maan asukkaat olivat egyptiläisiä aikalaisiaan etevämpiä laskijota, mikä osittain johtui heidän käyttämästään erinomaisesta numerojärjestelmästä. Babylonialaiset tunsivat paremmin matematiikkaa, jopa *Pythagoraan teoreeman* ($c^2 = a^2 + b^2$) yleisessä muodossa. Kuitenkin vasta kreikkalaiset astuivat ratkaisevan askelen kohti nykyaikaista matematiikkaa vaatiessaan, että laskulait on jotenkin yleispätevästi **todistettava** sen sijaan, että edettäisiin yrityksen ja erehdyksen tietä. Ensimmäinen tuntemamme tämän perinteen matemaatikko oli myös kreikkalaisen filosofian perustajana pidetty Thales[4], josta tuli kuuluisa ennustettuaan oikein auringonpimennyksen ajankohdan 585 e.a.a. Parin seuraavan vuosisadan johtavia matemaatikkoja oli Pythagoras[5] oppilaineen. Hän oli lähinnä uskonnollinen profeetta, jolle luvun $\sqrt{2}$ osoittautuminen irrationaaliseksi oli suuri järkytys (tätä vaarallista tulosta yritettiin aluksi jopa salata). Pythagoralaisen koulukunnan tuottama systemaattinen tasogeometrian esitys julkaistiin n. 400 e.a.a.

Neljäs vuosisata e.a.a. oli Platonin[6] aikaa. Hän korosti epäsuoran todistuksen merkitystä; itse asiassa Sokrateen dialogit ovat epäsuoraa todistamista: osoitetaan väite oikeaksi lähtemällä liikkeelle päinvastaisesta väitteestä ja päätymällä siitä mahdottomiin tai kelvottomiin johtopäätöksiin. Geometrian kannalta tärkein Platonin oppilas oli *Eukleides*[7], joka noin 300 e.a.a. julkaisi mahtavan 13-osaisen teoksen *Stoikheia* (Alkeet), jossa hän käsitteli kreikkalaista geometriaa ja lukuteoriaa. Eukleideen *aksiomaattinen esitystapa* on nykyaikaisen matematiikan prototyyppi: siinä ei väitteitä perustella millään mittauksilla tai piirroksilla, vaan ne *todistetaan* oikeiksi loogisella päättelyllä tietyistä perusolettamuksista lähtien. Eukleides perusti geometriansa viiteen perusolettamukseen eli *aksioomaan*. Esitämme

[2] Johann Heinrich Lambert 1728–1777. Saksa.

[3] Carl Louis Ferdinand von Lindemann 1852–1939. Saksa.

[4] Mileton Thales n.640-546 eaa. Kreikka.

[5] Samoksen Pythagoras n. 569–n. 475 eaa. Kreikka.

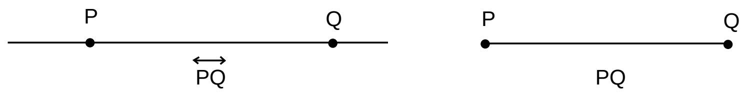
[6] Platon n. 427–347 eaa. Kreikka.

[7] Eukleides Aleksandrialainen n. 325–265 eaa. Egypti.

seuraavaksi niistä neljä ensimmäistä sellaisinaan ja viidennen hieman muutetussa muodossa, (EA1)-(EA4), (PA).

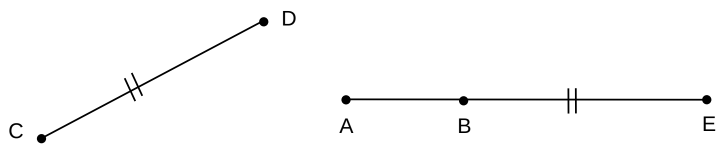
(EA1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin niiden kautta kulkee yksi ja vain yksi suora.

Merkitään pisteiden P ja Q kautta kulkevaa suoraa symbolilla $\overleftrightarrow{PQ}$: tuollaisen suoran olemassaolon ja yksikäsitteisyyden takaa (EA1). Määritellään *jana* PQ niiden suoran $\overleftrightarrow{PQ}$ pisteiden joukkona, jotka ovat pisteiden P ja Q välissä pisteet P ja Q mukaan lukien.



Kuva 1: Suora ja jana

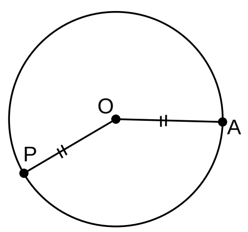
(EA2) Jos AB ja CD ovat kaksi janaa, niin on olemassa yksi ja vain yksi piste E siten, että BE ja CD ovat saman pituisia ja B on janalla AE.



Kuva 2: Janan jatkaminen

Havainnollisesti (EA2) sanoo, että janaa AB voidaan jatkaa janan CD pituisella janalla.

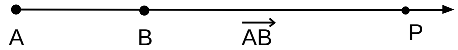
Olkoot O ja P kaksi eri pistettä. Kaikkien niiden pisteiden P joukkoa, joille OP ja OA ovat saman pituisia, sanotaan *ympyräksi*, jonka *keskipiste* on O ja *säde* on janan OA pituus.



Kuva 3: Ympyrä

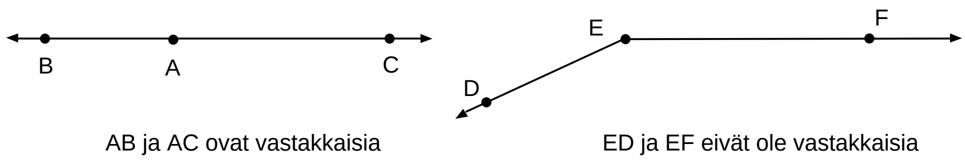
(EA3) Jos O ja A ovat eri pisteitä, niin on olemassa ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde on janan OA pituus.

Muita Eukleideen aksioomia varten tarvitaan lisää määritelmiä. *Puolisuora* $\overrightarrow{AB}$ $(A \neq B)$ on niiden suoran $\overleftrightarrow{AB}$ pisteiden P joukko, jotka kuuluvat janaan AB tai joille B on pisteiden A ja P välissä.



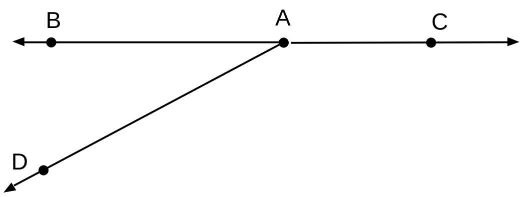
Kuva 4: Puolisuora

Puolisuoria $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ sanotaan *vastakkaisiksi*, jos ne eivät ole samoja ja $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$.



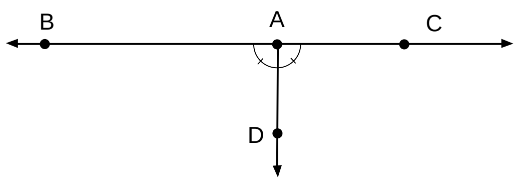
Kuva 5: Vastakkaiset puolisuorat

Seuraavaksi määrittelemme kulman: *Kulma* $\measuredangle BAC$ koostuu kahdesta puolisuorasta $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$, jotka eivät ole samoja eivätkä vastakkaisia. Kulmaa $\measuredangle BAC$ merkitään myös $\measuredangle CAB$ tai lyhyesti $\measuredangle A$. Pistettä A sanotaan kulman $\measuredangle A$ *kärjeksi* ja puolisuoria $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ sen *kyljiksi*. Jos kahdella kulmalla $\measuredangle BAD$ ja $\measuredangle CAD$ on yhteinen kylki $\overrightarrow{AD}$ ja puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ ovat vastakkaisia, niin sanotaan, että $\measuredangle BAD$ ja $\measuredangle CAD$ ovat toistensa *täydennyskulmia*:



Kuva 6: Täydennyskulmat

Kulmaa $\measuredangle BAD$ sanotaan *suoraksi kulmaksi*, jos sillä on täydennyskulma $\measuredangle CAD$, joka on yhtä suuri kuin se itse:

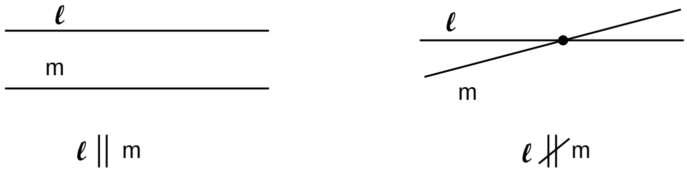


Kuva 7: Suora kulma

Huomaa, että suoran kulman täydennyskulma on sekin suora kulma.

(EA4) Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria.

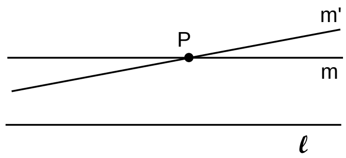
Matemaatikot hyväksyivät kahden vuosituhannen ajan nämä neljä Eukleideen aksioomaa (EA1)-(EA4) välttämättöminä tosiasioina, joita ei voi eikä tarvitse todistaa oikeiksi muiden aksioomien ja loogisten päättelysääntöjen avulla. Sen sijaan viidennestä Eukleideen aksioomasta keskusteltiin vilkkaasti aina 1800-luvulle asti. Emme vielä esitä sitä Eukleideen alkeiden käyttämässä sanamuodossa, koska silloin tarvitsisimme runsaasti lisää määritelmiä, vaan esitämme sen kanssa yhtäpitävän *paralleeliaksiooman* (yhtäpitävyyden todistamme myöhemmin). Eukleides ei itse mainitse paralleeliaksioomaa, vaan sen esitti ensimmäisenä vasta Proclus[8]. Sanomme, että suorat ℓ ja m ovat *yhdensuuntaisia*, jos ne eivät leikkaa toisiaan eli niillä ei ole yhteisiä pisteitä. Merkitsemme silloin $\ell \parallel m$, muulloin $\ell \not\parallel m$.



Kuva 8: Yhdensuuntaisuus

Huomaa, että tämän määritelmän mukaan suora ei ole yhdensuuntainen itsensä kanssa. Tämä oudolta tuntuva seikka voitaisiin korjata muuttamalla hieman yhdensuuntaisuuden määritelmää, mutta osoittautuu, että se monimutkaistaisi joitakin muita asioita. Siksi pidämme kiinni tästä historiallisesta määritelmästä.

(PA) *Paralleeliaksiooma.* Olkoon ℓ suora ja P piste, joka ei ole suoralla ℓ. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi suora m, joka kulkee pisteen P kautta ja joka on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa.



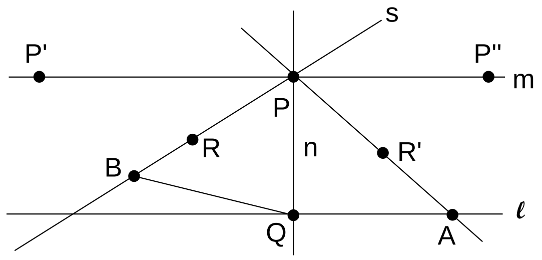
Kuva 9: Paralleeliaksiooma

Paralleeliaksiooma siis takaa, että pisteen P kautta kulkee suora m siten, että $m \parallel \ell$ ja ennen kaikkea myös sen, että toista tällaista suoraa ei ole. Kuvan tilanteessa on siis välttämättä $m' \not\parallel \ell$. Paralleeliaksiooma tuntuu luonnolliselta, mutta se ei ole aivan samassa mielessä ilmeinen kuin muut Eukleideen aksioomat: (EA1)-(EA3) voidaan intuitiivisesti nähdä oikeiksi vaikkapa harpilla ja viivottimella; (EA4) on ilmeinen, jos hyväksytään kulman mittaaminen vaikkapa astelevyllä. Paralleeliaksiooma on toista maata: toki voidaan piirtää suora, joka näyttää yhdensuuntaiselta suoran ℓ kanssa, mutta miten todistetaan, että se todella on sellainen? Määritelmän mukaan olisi nähtävä, että ℓ ja m eivät leikkaa toisiaan lainkaan, mutta sitä voidaan tutkia vain paperin laitaan asti. Ehkä ne leikkaavat jossakin kauempana. Toinen ongelma on suoran m yksikäsitteisyys: entäpä, jos kuvan 9 ℓ ja m' eivät sittenkään leikkaa toisiaan, kunhan niiden välinen kulma vain on tarpeeksi pieni. Nämä seikat lienevät olleet syynä siihen, että monet merkittävät matemaatikot asettivat paralleeliaksiooman kyseenalaiseksi: uskottiin, että se pitäisi — ja voitaisiin — todistaa oikeaksi muiden neljän Eukleideen aksiooman avulla. Monia todistusyrityksiä tehtiin. Käymme läpi niistä yhden, jonka on 1700-luvun lopulla esittänyt Adrien Marie Legendre[9].

Olkoon piste P suoran ℓ ulkopuolella. Piirretään P:n kautta suoralle ℓ normaali, jonka nimi on n ja joka leikkaa suoran ℓ pisteessä Q. Piirretään edelleen n:lle P:n

[8]Proclus Diadochus 411–485. Kreikka
[9]Adrien-Marie Legendre 1752–1833. Ranska.

kautta normali m. Tällöin m ja ℓ ovat yhdensuuntaisia, koska niillä on yhteinen normaali n. On vielä todistettava m:n yksikäsitteisyys.



Kuva 10: Paralleelliaksiooman todistusko?

Olkoon siis s suora, joka kulkee P:n kautta mutta ei ole m. On siis osoitettava, että $s \nparallel \ell$ eli että s ja ℓ leikkaavat toisensa. Valitaan pisteet P' ja P'' suoralta m siten, että P on niiden välissä. Valitaan vielä piste R suoralta s siten, että se on joko kulman $\measuredangle P'PQ$ tai $\measuredangle P''PQ$ sisällä (kuvassamme siis R valitaan suoran m alapuolelta). Valitaan lopuksi piste R' siten, että R ja R' ovat eri puolilla suoraa n ja lisäksi kulmat $\measuredangle QPR$ ja $\measuredangle R'PQ$ ovat yhtäsuuria, jolloin piste Q on kulman $\measuredangle RPR'$ sisällä. Toisaalta Q kuuluu suoralle ℓ, joten ℓ on osittain kulman $\measuredangle RPR'$ sisällä ja leikkaa siis ainakin toisen kulman $\measuredangle RPR'$ kyljistä $\overrightarrow{PR}$ tai $\overrightarrow{PR'}$.

Jos ℓ leikkaa kyljen $\overrightarrow{PR}$, niin se leikkaa myös suoran s, sillä $s = \overleftrightarrow{PR}$ (EA1):n nojalla, ja asia on tällöin selvä. Voimme siten olettaa, että ℓ leikkaa kyljen $\overrightarrow{PR'}$ jossakin pisteessä A. Valitaan puolisuoralta $\overrightarrow{PR}$ piste B siten, että janat PA ja PB ovat yhtä pitkiä. Osoitetaan nyt, että B kuuluu suoralle ℓ, mistä väite seuraa jälleen (EA1):n nojalla kuten yllä. Tarkastellaan kolmioita $\triangle PBQ$ ja $\triangle PAQ$. Niillä on yhteinen sivu PQ ja sivut PA ja PB ovat yhtä pitkiä. Lisäksi näiden sivujen väliset kulmat $\measuredangle BPQ$ ja $\measuredangle APQ$ ovat yhtä suuria. Silloin kolmioiden muutkin vastinsivut ja -kulmat ovat yhtäsuuria ("sivu-kulma-sivu -sääntö"). Erityisesti tällöin kulmat $\measuredangle BQP$ ja $\measuredangle AQP$ ovat yhtä suuria. Koska n on ℓ:n normaali, niin kulma $\measuredangle AQP$ on suora. Tällöin myös $\measuredangle BQP$ on suora. (Huomaa, että tämä ei suoraan seuraa (EA4):stä). Koska nyt $\measuredangle AQP$ ja $\measuredangle BQP$ ovat molemmat suoria, niin puolisuorat $\overrightarrow{QP}$ ja $\overrightarrow{QA}$ ovat vastakkaisia, joten $\overleftrightarrow{QB} = \overleftrightarrow{QA}$. Koska A kuuluu suoralle ℓ, niin $\overleftrightarrow{QA} = \ell$ ja siten $\overleftrightarrow{QB} = \ell$ ja erityisesti piste B kuuluu suoralle ℓ. M.O.T.

Mikä vikaa tässä todistuksessa on? Siinä on joukko määrittelemättömiä käsitteitä: "normaali", "kulman sisällä", "eri puolilla suoraa"; toki ne voidaan määritellä täsmällisesti. Perustelematta jäi:

(1) Onko suoralla aina normaali, joka kulkee annetun pisteen kautta?
(2) Ovatko suorat yhdensuuntaisia, jos niillä on yhteinen normaali?
(3) Voidaanko P ja Q valita aina yllä mainitulla tavalla?
(4) Voidaanko R valita aina yllä mainitulla tavalla?
(5) Voidaanko R' valita aina yllä mainitulla tavalla?
(6) Leikkaako ℓ välttämättä ainakin toista $\measuredangle RPR'$:n kyljistä?
(7) Voidaanko B aina valita yllä mainitulla tavalla?
(8) Päteekö aina sivu-kulma-sivu -sääntö?

(9) Onko $\measuredangle BQP$ välttämättä suora?

(10) Ovatko $\overrightarrow{QB}$ ja $\overrightarrow{QA}$ välttämättä vastakkaisia?

Kehitämme geometrista käsitteistöä niin, että voimme vastata näihin kysymyksiin ja siten tarkastaa, onko Legendre'in todistus pätevä. Osoittautuu, että yhdeksään kysymykseen voidaan vastata myöntävästi, yhteen ei. Se yksi kaataa koko todistuksen. Parhaiden salapoliisitarinoiden perinteiden mukaisesti murhaaja paljastuu vasta lopussa — syyttömiä löytyy pikkuhiljaa tarinan edetessä.

Kommentteja Eukleideen aksioomista.

(EA1) Mikä on piste, suora, jana? Mitä tarkoittaa, että suora kulkee jonkin pisteen kautta tai että yksi piste on kahden muun välissä?

(EA2) Mitä tarkoittaa, että janat ovat saman pituisia?

(EA4) Mitä tarkoittaa kulmien yhtäsuuruus? Mikä on suora kulma?

Nämä asiat kaipaavat lähempää tarkastelua. Todistaessaan teoreemojaan (joita yhteensä on 465 kpl.) Eukleides harhautui toisinaan kuvien johdattelemana pitämään joitakin asioita itsestäänselvinä huomaamatta sitä itse. Kuviohan on usein oikein hyvä apu todistuksen keksimiselle, mutta todistuksessa siihen vetoaminen ei ole matemaattisesti oikea tapa, ja piirretty kuva on sitä paitsi toisinaan harhaanjohtava, sillä se ei aina kata kaikkia mahdollisia tapauksia. Itse asiassa Eukleideen lauset eivät tarkkaan ottaen seuraa hänen aksioomistaan, vaan Eukleides pitää itsestäänselvinä eräitä muitakin asioita nimeämättä niitä eriksen. Jotta nykyaikaisessa mielessä tiukan matemaattiset todistukset voitaisiin tehdä, täytyy Eukleideen sinänsä tervettä aksioomajärjestelmää laajentaa ja tarkentaa. Parannusesityksiä on lukuisia; seuraavassa tutustumme *Hilbertin aksioomajärjestelmään.* Hilbert[10] esitti aksioomansa laajassa teoksessaan *Grundlagen der Geometrie* vuonna 1902.

[10] David Hilbert 1861–1943. Saksa

II Hilbertin aksioomajärjestelmä

2.1. Aksiomaattisesta menetelmästä.

Mikä on matemaattinen todistus? Kuinka todistetaan, että jokin lause T on tosi? Sovimme, että T *on todistettu oikeaksi*, jos on löydetty yksi tai useampi lause T', jotka tiedetään todeksi, ja jos näistä lauseista T' yhdessä seuraa lause T äärellisellä määrällä loogisia päättelyjä. Kuten matemaatikot yleensäkin (joskaan eivät aina) tyydymme tässä kirjassa intuitioomme siitä, mitkä ovat loogisia päättelyjä eli oikeiden päättelysääntöjen oikein soveltamista. Jotta tosiksi tiedettyjen lauseiden joukko olisi muutakin kuin kokoelma tautologioita (esim. ”sataa tai ei sada”) seurauksineen, on oletettava joitakin lauseita tosiksi. Niitä sanotaan *aksioomiksi* eli *selviöiksi*. Eukleideelle selviöt olivat itsestäänselvästi tosia, niitä ei tarvinnut perustella. Niiden koettiin myös kuvaavan ”todellisuutta”. Nyttemmin selviöt eivät olekaan aina itsestäänselviä, vaan saattavat abstraktisuudessaan vaikuttaa intuitiostamme ja kokemuksestamme irrallisilta tai jopa niiden vastaisilta. Hyperbolisen geometrian paralleeliaksiooma on sellainen (”suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee ainakin kaksi sen kanssa yhdensuuntaista suoraa”). Aksioomien pitäminen tosina on myös yhä useammin vain metodologista: halutaan rakentaa teoria, joka perustuu joillekin aksioomille, minkä *jälkeen* sitten arvioidaan valittujen aksioomien hyväksyttävyyttä, hedelmällisyyttä tai totuutta rakennetun teorian perusteella. Jonkin fysiikan teorian muodostaminen ja testaaminen on yksi esimerkki tällaisesta ajattelutavasta: jos jokin seurauslause on vastoin havaintoja, on syytä epäillä ainakin jonkin aksiooman olevan havainnoitavassa maailmassa epätoden. Ajatus aksioomien metodologisesta totuudesta vie vielä pidemmälle: aksioomilla ei tarvitse olla totuusarvoa (tosi, epätosi) lainkaan, on vain joukko lauseita, joista tiettyjen päättelysääntöjen avulla johdetaan toisia lauseita. Jos moraalikäsityksiä esitetään aksiomaattisesti, ollaan tällaisessa tilanteessa, sillä vallitsevan käsityksen mukaan moraaliarvostelmilla ei ole totuusarvoa.

Yksittäisiin aksioomiin ei sinänsä kohdistu mitään erityisvaatimuksia, kunhan peruskäsitteet (”piste”, ”suora”, ...) kirjataan niihin selvästi. Kelvollisia aksioomia ovat esim. ”jokaisella suoralla on tasan kaksi pistettä”, ”on olemassa suora” tai ”jokaisella suoralla on äärettömän monta pistettä”, mutta näitä kolmea lausetta ei saa ottaa aksioomiksi yhtä aikaa, sillä ne ovat ristiriidassa keskenään ja silloin niistä voitaisiin päätellä loogisesti mikä hyvänsä lause. Teorian kehittely olisi mieletöntä. Aksioomajärjestelmän tulee siis olla *ristiriidaton.* Ristiriidattomuuden osoittaminen ei ole useinkaan kovin helppoa, mutta esittelemme siihen keinon — mallien käyttämisen. Aksioomiksi ei yleensä valita tautologioita, vaan sellaisia lauseita, jotka logiikan kannalta voivat olla joko tosia tai epätosia. Leibniz[11] käytti nimitystä *mahdollinen maailma.* Lause ”nyt sataa” on tosi tai epätosi riippuen siitä, olemmeko sellaisessa maailmassa, jossa parhaillaan sataa; jos olisimme hieman toisenlaisessa maailmassa, jossa olisi juuri nyt tarpeeksi enemmän tai vähemmän vesihöyryä ilmassa, olisi lauseen ”nyt sataa” totuusarvo toinen. Nykyään ja erityisesti matematiikassa käytetään arkisempaa nimitystä *malli* mahtipontisen ”mahdollisen maailman” sijasta. *Jos aksioomajärjestelmällä on edes yksi malli, jossa kaikki sen aksioomat ovat tosia, on järjestelmä ristiriidaton.* Tämän huomion

[11] Gottfried Wilhelm von Leibniz 1646–1716. Saksa

perusteella näytämme pian, että neljä ensimmäistä Eukleideen aksioomaa ovat ristiriidattomia konstruoimalla yhden konkreettisen mallin, jossa ne kaikki ovat tosia. Myöhemmin rakennamme mallin, jossa muutkin aksioomat ovat tosia lauseita.

Loogisessa päättelyssä tosista oletuksista ei voida päätyä epätosiin johtopäätöksiin, joten *teorian jokainen todistettu teoreema on tosi jokaisessa mallissa, jossa teorian aksioomat ovat tosia.* Tämä huomio auttaa toisen aksiomaattisiin järjestelmiin liittyvän kysymyksen ratkaisemisessa: Onko aksioomajärjestelmä kyllin *laaja*, jotta tietty teoreema T voitaisiin siitä todistaa? Jos onnistutaan muodostamaan malli, jossa T on epätosi, vaikka kaikki järjestelmän aksioomat ovat tosia, ei T:tä tässä järjestelmässä voida todistaa oikeaksi.

Aksioomajärjestelmien tulisi mielellään olla *minimaalisia* eli niissä ei yleensä haluta olevan (ainakaan monia) turhia aksioomia: jos jokin aksiooma voidaan päätellä muista aksioomista, on tyylikkäämpää nimetä se teoreemaksi kuin aksioomaksi. Paralleeliaksioomasta käydyssä keskustelussa oli kyse Eukleideen aksioomajärjestelmän minimaalisuudesta ja siis epäeuklidisen, tarkemmin sanoen hyperbolisen, geometrian ristiriidattomuudesta.

Aksioomat sisältävät *peruskäsitteitä* (kuten "suora", "piste",...), joita ei eksplisiittisesti määritellä. Toisinaan sanotaan, että aksioomajärjestelmä "määrittelee ne implisiittisesti". Näiden peruskäsitteiden avulla määritellään kaikki muut tarvittavat käsitteet (esim. suorakulmainen kolmio), jotka loogiselta kannalta ovat vain näppäriä lyhennysmerkintöjä peruskäsitteiden komplekseille.

2.2. Hilbertin aksioomat (H1)–(H3).

Tässä luvussa tarkastelemme kolmea ensimmäistä Hilbertin aksioomajärjestelmän selviötä. Peruskäsitteet ovat *piste*, *suora* ja *suora kulkee pisteen kautta.* Ilmaisulla "piste P sisältyy suoraan ℓ" tarkoitamme samaa kuin sanoessamme, että suora ℓ kulkee pisteen P kautta. Päinvastaisen ilmaisemme sanomalla, että P on suoran ℓ *ulkopuolella.* Pisteen ja suoran välisen relaation ei tarvitse olla sama kuin joukko-opin $P \in l$. Riittää, että se toteuttaa Hilbertin aksioomat.[12]

Kolme ensimmäistä Hilbertin aksioomaa ovat:

(H1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa yksi ja vain yksi suora, joka kulkee sekä P:n että Q:n kautta.

(H2) Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi pistettä.

(H3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

Ensimmäinen Hilbertin aksiooma on siis aivan sama kuin (EA1). Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin (H1):n nojalla voidaan antaa nimi sille yhdelle ja ainoalle suoralle, joka kulkee niiden kautta. Olkoon se $\overleftrightarrow{PQ}$. Sovitaan lisäksi, että jos kirjoitamme $\overleftrightarrow{PQ}$, niin oletamme silloin samalla että $P \neq Q$.

Kolmannesta Hilbertin aksioomasta seuraa, että on olemassa pisteitä. Tästä seuraa (H1):n nojalla, että on olemassa myös suoria. Tätä päättelyä ei Eukleideen aksioomista voi tehdä.

[12] Aksioomat eivät ollenkaan liity siihen, mitä suorat ja pisteet "ovat". Aksioomasysteemimme mallissa voivat pisteet kyllä olla alkioita ja suorat niiden joukkoja — ja usein malli näin tehdäänkin. Esimerkkejä tulee tuonnempana.

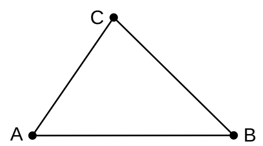
Nyt on aika kysyä, ovatko kolme ensimmäistä Hilbertin aksioomaa keskenään ristiriidattomia. Käytämme malleja. Haemme siis edes yhtä mahdollista maailmaa, jossa (H1)–(H3) ovat tosia. Oletamme tunnetuiksi joukko-opin perusteet ja lukujoukkojen $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^n$ ominaisuudet.

Malli 1. Tarkastellaan kolmen eri alkion joukkoa $\{A, B, C\}$. Sovitaan, että *pisteitä* ovat $P_1 = \{A, B\}$, $P_2 = \{A, C\}$ ja $P_3 = \{B, C\}$ sekä *suoria* $\ell_1 = \{A\}$, $\ell_2 = \{B\}$ ja $\ell_3 = \{C\}$. Sanomme, että *suora ℓ kulkee pisteen P kautta*, jos $\ell \subset P$.

Tällöin (H1) pätee: pisteiden P_1 ja P_2 kautta kulkee suora ℓ_1 ja se on ainoa tällainen suora. Muille pistepareille voidaan tehdä vastaava havainto. Myös (H2) pätee: pisteet P_1 ja P_2 ovat suoralla ℓ_1 ja vastaavasti myös suorilla ℓ_2 ja ℓ_3 on kaksi pistettä. Lopuksi (H3) pätee: mikään suorista ℓ_1,ℓ_2 ja ℓ_3 ei kulje kaikkien kolmen pisteen P_1, P_2 ja P_3 kautta. Näin kaikki kolme Hilbertin aksioomaa toteutuvat, joten olemme onnistuneet konstruoimaan mallin aksioomajärjestelmälle (H1)–(H3). Täten aksioomat (H1)–(H3) ovat ristiriidattomia.

Malli 2. Tarkastellaan yhä mallin 1 joukkoa, mutta sovitaan — ehkä vähän edellistä esimerkkiä tutummalla tavalla — että *pisteitä* ovat $\{A\}$, $\{B\}$ ja $\{C\}$, että *suoria* ovat $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ ja $\{B, C\}$ ja että *suora ℓ kulkee pisteen P kautta*, jos $P \subset l$.

Tällöinkin kolme ensimmäistä Hilbertin aksioomaa toteutuvat (Totea!). Tästä mallista voidaan piirtää kuvakin:



KUVA 11: MALLI 2

Malli 3. Tarkastellaan neljän eri pisteen joukkoa $\{A, B, C, D\}$. Sovitaan, että pisteitä ovat $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$ ja $\{D\}$ sekä suoria joukot $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ ja $\{C, D\}$ sekä että suoran kulkeminen pisteen kautta tarkoittaa samaa kuin mallissa 2.

Tällöinkin kolme ensimmäistä Hilbertin aksioomaa pätevät (Totea!).

Malli 4. Kuten malli 3 mutta 5 pisteelle.

Malli 5. (Descartesin koordinaattigeometria) Olkoot *(koordinaattigeometrian) pisteet* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja *(koordinaattigeometrian) suorat*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

missä $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Suora ℓ *kulkee pisteen P kautta*, jos $P \in l$.

Lineaarialgebran tiedoin osoittautuu, että (H1)–(H3) pätevät (Totea!).

Määritelmä 2.1. Olkoot ℓ ja m suoria. Niitä sanotaan *yhdensuuntaisiksi*, jos ei ole pistettä, jonka kautta ne molemmat kulkevat. Merkitsemme tällöin $\ell \parallel m$, muulloin $\ell \nparallel m$.

Huomaa, että kun kirjoitamme $\ell \parallel m$, niin silloin ilmaisemme myös että $\ell \neq m$. Tämä johtuu aksioomasta (H2).

Tarkastellaan malleissa 1-4 suorien yhdensuuntaisuutta ja edellisessä luvussa mainittua paralleeliaksioomaa (PAR). Mallissa 1 suoran $\ell_1 = \{A\}$ ulkopuolella on vain piste $P_3 = \{B, C\}$. Sen kautta kulkevat vain suorat $\ell_2 = \{B\}$ ja $\ell_3 = \{C\}$. ℓ_2 kulkee suoran ℓ_1 pisteen P_1 kautta; ℓ_3 kulkee suoran ℓ_1 pisteen P_2 kautta. Siten ℓ_1 ei ole yhdensuuntainen ℓ_2:n eikä ℓ_3:n kanssa. Paralleeliaksiooma on mallissa 1 epätosi — mallissa ei ole ollenkaan yhdensuuntaisia suoria. Mallissa 2 käy samoin, siinäkään ei ole yhdensuuntaisia suoria lainkaan (Totea!). Mallissa 3 paralleeliaksiooma pätee (Totea!). Mallissa 4 suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee peräti **kaksi** sen kanssa yhdensuuntaista suoraa (Totea!).

Huomautus 1. Löysimme mallin, jossa paralleeliaksiooma ei päde ja toisen, jossa se pätee. Siten aksioomajärjestelmä (H1)–(H3) on liian suppea, jotta parallelliaksiooma tai sen pätemättömyys voitaisiin siinä todistaa.

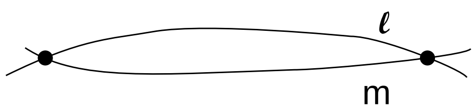
Määritelmä 2.2. Sanomme, että mallilla on

(1) *elliptinen paralleeliominaisuus*, jos siinä ei ole yhdensuuntaisia suoria,
(2) *euklidinen paralleeliominaisuus*, jos siinä paralleeliaksiooma pätee,
(3) *hyperbolinen paralleeliominaisuus*, jos jokaista suoraa ℓ ja sen ulkopuolista pistettä P kohti on olemassa *ainakin kaksi* suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia suoran ℓ kanssa ja kulkevat P:n kautta.

Seuraavat lauseet saadaan välittömästi kolmesta ensimmäisestä Hilbertin aksioomasta. Jätämme niiden todistamisen harjoitustehtäväksi.

LAUSE 2.2.1. *Olkoot ℓ ja m eri suoria, jotka eivät ole yhdensuuntaisia. Silloin on olemassa täsmälleen yksi piste, jonka kautta sekä ℓ että m kulkevat.*

Suorat eivät siis voi olla tämän näköisiä:



KUVA 12: OUDOT SUORAT

LAUSE 2.2.2. *Jokaisen suoran ulkopuolella on ainakin yksi piste.*

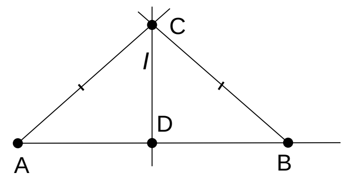
LAUSE 2.2.3. *Jos P on mielivaltainen piste, niin on olemassa ainakin yksi suora, johon P ei sisälly.*

LAUSE 2.2.4. *Jokaisen pisteen kautta kulkee ainakin kaksi eri suoraa.*

2.3. Hilbertin aksioomat (H4)–(H7).

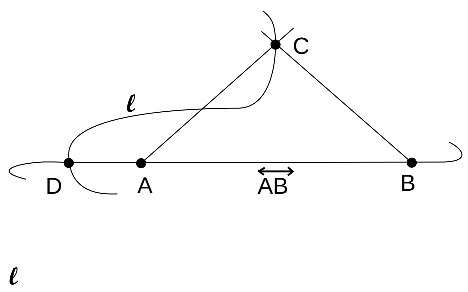
Tarkastellaan seuraavaa "todistusta'", jolla yritetään näyttää, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio siten, että janat AC ja BC ovat yhtäsuuret eli $AC = BC$.
Väite. $\measuredangle A = \measuredangle B$.

Todistus. Valitaan suora ℓ, joka puolittaa kulman $\measuredangle C$. Leikatkoon se suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ pisteessä D. Tällöin kolmioilla $\triangle ACD$ ja $\triangle CDB$ on yhteinen sivu CD, $\measuredangle ACD = \measuredangle DCB$ (kulman puolittajan ominaisuus) ja $AC = CB$ (oletus), joten sivu-kulma-sivu -säännön nojalla kolmioissa kaikki vastinsivut ja -kulmat ovat yhtä suuria, erityisesti $\measuredangle A = \measuredangle B$. $\square$



Kuva 13: "Tasakylkinen kolmio"

Kommenteja. Mikä on kolmio, mikä kulman puolittaja? Nämä voidaan toki määritellä. Onko kulman puolittaja sitten olemassa? Leikkaako se välttämättä suoraa $\overleftrightarrow{AB}$. Onko sivu-kulma-sivu -sääntö voimassa? Näihin kysymyksiin voidaan vastata myönteisesti, kuten myöhemmin teemme, mutta todistuksessa on vielä yksi aukko, joka johtuu kuviosta katsomisesta: mistä tiedämme, että piste D on pisteiden A ja B välissä? Eihän ole mitään tietoa, minkä näköisiä suorat ovat; tilannehan voisi näyttää vaikkapa seuraavalta:



Kuva 14: Tasakylkinen kolmioko?

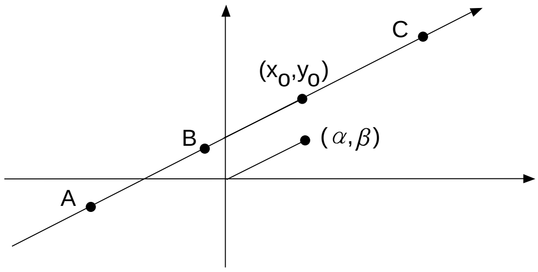
Mikä on nyt kolmio $\triangle ADC$? Tässä joudutaan vaikeuksiin! Aksioomat (H1)–(H3) eivät riitä estämään tämän tapaisten tilanteiden syntymistä, joten tarvitsemme lisää aksioomia ja uuden peruskäsitteen *välissäolo*. Merkitään $A * B * C$ ja luetaan se "*piste B on pisteiden A ja C välissä*". Tämän käsitteen, yhdessä jo käyttöön otettujen käsitteiden (suora, piste, kulkee kautta) kanssa, tulee toteuttaa (H1)–(H3) *ja* seuraavat *välissäoloaksioomat* (H4)–(H7):

(H4) Jos $A * B * C$, niin A, B ja C ovat eri pisteitä, joiden kaikkien kautta kulkee sama suora ja $C * B * A$.

Esimerkki 1. Tarkastellaan vielä mallia 5 eli koordinaattitason pisteitä ja suoria. Sovitaan, että pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ pätee $A * B * C$, jos on olemassa $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ja $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ siten, että $\lambda < \mu < \nu$ tai $\lambda > \mu > \nu$ ja

$$\begin{cases} (a_1, a_2) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \\ (b_1, b_2) = (x_0, y_0) + \mu(\alpha, \beta), \\ (c_1, c_2) = (x_0, y_0) + \nu(\alpha, \beta). \end{cases}$$

Tällöin (H4) on voimassa (Totea!).

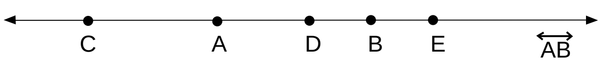


Kuva 15: Suora koordinaattitasossa

Esitämme seuraavaksi kaksi Hilbertin aksioomaa lisää:

(H5) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$.

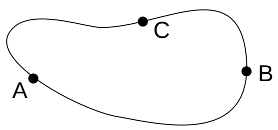
Huomautus 2. Aksiooma (H5) takaa, ettei suora $\overleftrightarrow{AB}$ pääty pisteeseen A tai B eikä ole tyhjä niiden välillä:



Kuva 16: Välissäoloaksiooma (H5)

Aksioomasta (H3) seuraa, että kaikenkaikkiaan on olemassa vähintään kolme pistettä. Aksioomat (H4) ja (H5) takaavat, että jokaisella suoralla on ainakin kolme pistettä (ja yhteensä siis ainakin seitsemän). Siksi mallit 1-4 eivät toteuta aksioomaa (H5), sovittiin välissä oleminen miten tahansa.

Toisaalta aksioomat (H1)–(H5) eivät vielä takaa, että millään suoralla olisi enemmän kuin nuo kolme pistettä. Aksioomassa (H5) pisteet C, D ja E voivat nimittäin olla keskenään samoja. Suoraan aksioomaa (H5) vastaan rikkomatta voi määritellä välissäolon vaikka siten, että $A * B * C$ aina, kun A, B ja C ovat eri pisteitä mallin samalla suoralla. Vasta seuraavana esiteltävä aksiooma (H6) estää suoria olemasta kuvan 17 mukaisia lenkkuja, kun kuvassa välissäolo tulkitaan niin, että kukin piste on kahden muun välissä. Välissäoloaksiooma (H6) tekee siten selvän eron esimerkiksi pallogeometriaan, jossa suorien roolissa ovat isoympyrät.



Kuva 17: Ei suora

(H6) Jos A, B ja C ovat eri pisteitä, jotka kuuluvat samalle suoralle, niin yksi ja vain yksi seuraavista ehdoista on voimassa:

$$A * B * C, \ A * C * B \text{ tai } B * A * C.$$

Esimerkin 5 malli, tavallinen koordinaattigeometria, toteuttaa aksioomat (H5) ja (H6). (Totea!)

Aksioomista (H1)–(H6) seuraa, että jokaisella suoralla on ainakin viisi pistettä, mutta niistäkään ei vielä seuraa, että millään suoralla tarvitsisi olla enempää kuin viisi. On sopiva harjoitustehtävä muodostaa sellainen malli aksioomille (H1)–(H6), jossa jollain suoralla on vain 5 pistettä.

Määritelmä 2.3. Olkoot A ja B eri pisteitä.

(1) Joukkoa

$$AB\colon = \{C \text{ on piste } \mid A * C * B \text{ tai } C = A \text{ tai } C = B\}$$

sanotaan *pisteiden A ja B väliseksi janaksi* eli *janaksi AB.*

(2) *Puolisuoraksi pisteestä A pisteen B suuntaan* sanotaan joukkoa

$$\overrightarrow{AB} = AB \cup \{C \text{ on piste } \mid A * B * C\}.$$

Kuva 18: Jana ja puolisuora

Huomautus 3. Kun kirjoitamme AB tai $\overrightarrow{AB}$, sanomme samalla, että A ja B ovat eri pisteitä.

LAUSE 2.3.1. *Olkoot A ja B eri pisteitä. Silloin*

(a) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$

(b) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P \mid \overleftrightarrow{AB}$ *kulkee pisteen P kautta*$\}$.

Huomautus 4. Kohdassa (b) ei voitu kirjoittaa lyhyesti $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$, sillä edellinen on aina pisteiden joukko, mitä suora ei Hilbertin järjestelmän mukaisessa aksiomaattisessa geometriassa ole; vertaa esimerkkiin 1.

Todistus. (a). Puolisuoran määritelmän ja (H4):n nojalla

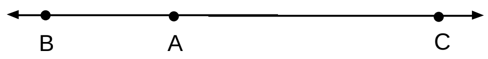
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = &\big(AB \cup \{C \mid A * B * C\}\big) \cap \big(AB \cup \{C \mid C * A * B\} = \\ =&AB \cup \big(\{C \mid A * B * C\} \cap \{C \mid C * A * B\}\big) = \\ =& AB \cup \{C \mid A * B * C \text{ ja } C * A * B\} = AB \cup \emptyset = AB,\end{aligned}$$

sillä (H6):n nojalla ei voi olla sekä $A * B * C$ että $C * A * B$.

(b), "$\subset$". (H1):n nojalla A:n ja B:n kautta kulkee vain suora $\overleftrightarrow{AB}$, jolloin (H4):n ja puolisuoran määritelman mukaan $\overrightarrow{BA} \subset \{P \mid \overleftrightarrow{AB}$ kulkee P:n kautta$\}$. Samoin $\overrightarrow{AB} \subset \{P \mid \overleftrightarrow{BA}$ kulkee P:n kautta$\}$. Siten $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subset \{P \mid \overleftrightarrow{AB}$ kulkee P:n kautta$\}$.

(b), "$\supset$". Olkoon P piste, jonka kautta suora $\overleftrightarrow{AB}$ kulkee. On osoitettava, että $P \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Jos $P = A$ tai $P = B$, on asia selvä. Jos $P \neq A$ ja $P \neq B$, niin (H6):n nojalla joko $P * A * B$, $A * P * B$ tai $A * B * P$. Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa janan ja puolisuoran määritelmän mukaan $P \in \overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Viimeisessä tapauksessa puolisuoran määritelmän mukaan $P \in \overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.
□

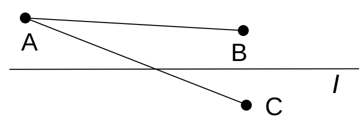
Määritelmä 2.4. Puolisuoria $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ sanotaan *vastakkaisiksi*, jos $B * A * C$.



KUVA 19: VASTAKKAISET PUOLISUORAT $\overrightarrow{AB}$ JA $\overrightarrow{AC}$

Kuvasta katsoen näyttäisi ilmeiseltä, että jokainen suoran $\overleftrightarrow{BC}$ piste kuuluisi joko puolisuoraan $\overrightarrow{AB}$ tai $\overrightarrow{AC}$. Näin ei kuitenkaan vielä aksioomien (H1)–(H6) nojalla tarvitse olla, vaan on olemassa malli, joka toteuttaa aksioomat (H1)–(H6), mutta jossa suoralla $\overleftrightarrow{BC}$ on muitakin pisteitä, kuin puolisuorien $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ pisteet. Mallin konstruoiminen jätetään harjoitustehtäväksi. Tällaisten ihmeellisyyksien välttämiseksi tarvitsemme uuden aksiooman, jonka pitäisi väittää suunnilleen, että "jokainen suoran piste jakaa sen kahteen puolisuoraan". Asetamme tulevia tarpeitamme varten hieman vahvemman aksiooman, joka olennaisesti sanoo, että jokainen suora jakaa tason kahteen puolitasoon.

Määritelmä 2.5. Olkoon ℓ suora ja A ja B pisteitä, joiden kautta ℓ ei kulje. Sanomme, että A ja B *ovat samalla puolella suoraa* ℓ ja merkitsemme $AB\ell$ tai $BA\ell$, jos $A = B$ tai suora ℓ ei sisällä janan AB pisteitä. Muussa tapauksessa sanomme, että A ja B ovat *eri puolilla suoraa* ℓ ja merkitsemme $B\ell A$ tai $A\ell B$.

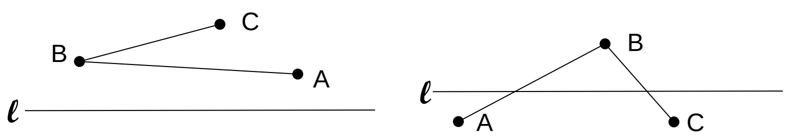


KUVA 20: $AB\ell$ JA $A\ell C$

Huomautus 5. Siis $A\ell B$, jos ja vain jos ℓ leikkaa janaa AB, mutta ei sen päätepisteissä.

(H7) Olkoot ℓ suora sekä A, B ja C pisteitä, joiden kautta suora ℓ ei kulje. Tällöin on voimassa:

(i) jos $AB\ell$ ja $BC\ell$, niin $AC\ell$:
(ii) jos $A\ell B$ ja $B\ell C$, niin $AC\ell$.



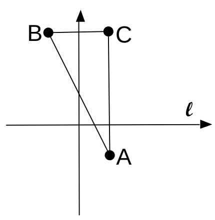
KUVA 21: AKSIOOMA (H7)

Esimerkki 2. Esimerkin 1 malli (koordinaattitason suorat ja pisteet) toteuttaa aksiooman (H7). Sen toteaminen suoraan laskemalla on kuitenkin hankalaa, mutta lineaarialgebran tiedoilla tason siirroista ja kierroista voidaan mielivaltainen tilanne palauttaa sellaiseksi, että tarkasteltava suora on x-akseli. Toki tässä mallissa (H7) on intuitiivisesti aivan selvä.

Esimerkki 3. Merkitään

$$S = \{\frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}.$$

Joukon S alkiot ovat siis luvut, joiden esittämiseen 2-järjestelmässä tarvitaan vain äärellinen määrä ykkösiä, nollia sekä piste. Sovitaan, että *pisteet* ovat tulojoukon $S^2 = S \times S$ alkiot, *suorat* ovat ne joukot $(S \times S) \cap \ell$, joissa on vähintään 2 pistettä ja missä ℓ on koordinaattitason $\mathbb{R}^2$ tavallinen suora (ks. esimerkki 1). Pisteen olo suoralla ja välissäolo määritellään samoin kuin koordinaattitasossa. Nyt (H1)–(H4) ja (H6) ovat ilmeisesti voimassa kuten esimerkin 1 mallissakin. Myös (H5) pätee (Totea!). Mutta **(H7) ei päde!** Jos nimittäin valitaan $\ell = (S \times S) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$, $A = (1, -1)$, $B = (-1, 2)$ ja $C = (1, 2)$,



KUVA 22: ESIMERKKI 3

niin selvästi $BC\ell$, sillä suora ℓ ei leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{BC}$ eikä siis myöskään janaa BC. Hämmästyttävästi myös $AB\ell$: janan AB ja suoran ℓ ainoa mahdollinen leikkauspiste on $(\frac{1}{3}, 0)$, mutta se ei ole tämän mallin piste, sillä $\frac{1}{3} \notin S$.

Toisaalta $A\ell C$, sillä $(1, 0)$ on sekä suoran ℓ että janan AB piste. Siten $AB\ell$, $BC\ell$, mutta silti $A\ell C$, mikä on vastoin aksioomaa (H7).

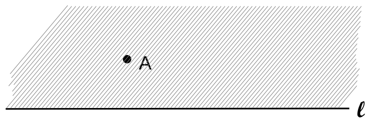
Huomautus 6. Aksiooma (H7) estää sen, että suorissa olisi reikiä, joiden kautta ne voisivat kulkea toistensa läpi toisiaan leikkaamatta; vrt. esimerkki 3. Jääköön harjoitustehtäväksi todistaa, että aksiooman (H7) ansiosta suorilla on äärettömän monta pistettä.

Huomautus 7. Suoran ℓ ulkopuolisten pisteiden oleminen samalla puolella suoraa ℓ eli $AB\ell$ on *ekvivalenssirelaatio,* ts.

(1) Jos $AB\ell$, niin $BA\ell$ (relaatio on symmetrinen).
(2) Aina $AA\ell$ (relaatio on refleksiivinen).
(3) Jos $AB\ell$ ja $BC\ell$, niin $AC\ell$ (relaatio on transitiivinen).

LAUSE 2.3.2. *Olkoon ℓ suora sekä A, B ja C eri pisteitä, jotka eivät sisälly suoraan ℓ. Jos nyt $AB\ell$ ja $B\ell C$, niin $A\ell C$*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Määritelmä 2.6. Olkoon ℓ suora ja A piste, jonka kautta ℓ ei kulje. Joukkoa $\{P \mid AP\ell\}$ sanotaan *suoran ℓ rajoittamaksi pisteen A määräämäksi puolitasoksi.*



KUVA 23: PUOLITASO $\{P \mid AP\ell\}$

LAUSE 2.3.3. *Jokainen suora rajoittaa täsmälleen kahta eri puolitasoa H_1 ja H_2. Niille pätee $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.*
Todistus. Olkoon ℓ suora. On olemassa piste A, jonka kautta ℓ ei kulje (lause 2.2.2), ja toisaalta piste B, jonka kautta ℓ kulkee (H2). Edelleen (H5):n nojalla on olemassa piste C siten, että $A * B * C$. Tällöin B sisältyy suoraan AC, joten $A\ell C$. Erityisesti ℓ ei kulje C:n kautta, joten voidaan määritellä puolitasot $H_1 =: \{P \mid AP\ell\}$ ja $H_2 : = \{P \mid CP\ell\}$, jotka ovat määritelmän mukaan suoran ℓ rajoittamia. Koska $A \in H_1 \setminus H_2$, niin $H_1 \neq H_2$. Siten ℓ rajoittaa ainakin kahta eri puolitasoa.

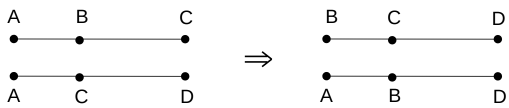
Olkoon H_3 kolmas ℓ:n rajoittama puolitaso. Siis $H_3 = \{P \mid DP\ell\}$, missä D on jokin piste, jonka kautta ℓ ei kulje. Nyt joko $AD\ell$ tai $A\ell D$. Ensimmäisessä tapauksessa aksiooman (H7) kohdasta (i) seuraa, että $H_3 = H_1$. Jälkimmäisessä tapauksessa aksioomasta (H7) kohdasta (ii) seuraa, että $CD\ell$, josta kohdan (i) nojalla saamme, että $H_3 = H_2$. Näin ℓ:n rajoittamia puolitasoja on enintään kaksi.

Jos olisi olemassa $P \in H_1 \cap H_2$, niin pitäisi päteä $AP\ell$ ja $CP\ell$, jolloin suoran samalla puolella olemisen transitiivisuudesta seuraisi, että $AC\ell$. Niin ei ole, joten $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. □

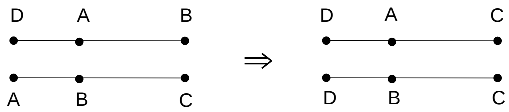
LAUSE 2.3.4.

(i) *Jos $A * B * C$ ja $A * C * D$, niin $B * C * D$ ja $A * B * D$.*
(ii) *Jos $D * A * B$ ja $A * B * C$, niin $D * A * C$ ja $D * B * C$.*

Kuvioina lauseen 2.3.4 sisältö on:

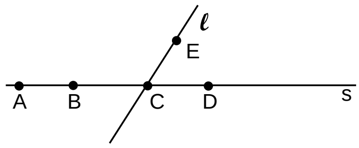


KUVA 24: (i)



KUVA 25: (ii)

Todistus. Osoitetaan kohdasta (i) johtopäätös $B * C * D$. Olkoon siis $A * B * C$ ja $A * C * D$. Välissäolon määritelmän nojalla pisteet A, B ja C ovat eri pisteitä ja myös D eroaa A:sta ja C:stä sekä kaikki neljä ovat samalla janalla $s = \overleftrightarrow{AC}$. (H3):n nojalla suoran s ulkopuolella on jokin piste E. Merkitään $\ell = \overleftrightarrow{EC}$. Lauseen 2.2.1 nojalla suorat s ja ℓ leikkaavat vain yhdessä pisteessä. C on leikkauspiste, joten mikään muu suoran s piste ei ole suoralla ℓ, erityisesti siis yksikään pisteistä A, B, D ei ole suoralla ℓ. Siis $A\ell D$.



KUVA 26: LAUSE 2.3.4

Jos olisi $A\ell B$, niin jana AB leikkaisi suoraa ℓ. Ainoa mahdollinen leikkauspiste on C. Koska $A \neq C \neq B$, niin olisi $A * C * B$, mikä on vastoin aksioomaa (H6), sillä oletuksen mukaan jo $A * B * C$. Täten $AB\ell$.

Lauseen 2.3.2 nojalla $B\ell D$. Siten BD ja ℓ leikkaavat. Ainoa mahdollinen leikkauspiste on C. Koska $B \neq C \neq D$, niin $B * C * D$.

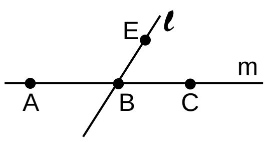
Johtopäätös $A*B*D$ todistetaan samoin; jätetään se harjoitustehtäväksi samoin kuin väitteen (ii) todistaminen. □

Huomautus 8. Välissäolon käsite vastaa siis intuitiivista käsitystämme pisteiden järjestyksestä suoralla. Todistuksessa käytimme lauseen 2.3.2 kautta aksioomaa (H7).

Seuraava lause väittää, että jokainen suora voidaan jakaa kahdeksi puolisuoraksi.

LAUSE 2.3.5. *Olkoot A, B ja C pisteitä siten, että $A*B*C$, jolloin ne erityisesti ovat eri pisteitä ja samalla suoralla m. Tällöin on olemassa toinen suora ℓ, joka kulkee pisteen B kautta ja joka jakaa suoran m kahteen osaan seuraavasti:*

(i) $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = BA \cap BC = \{B\}$,
(ii) $\{P \mid m \text{ kulkee } P\text{:n kautta } \} = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$.
(iii) Jos $P \in \overrightarrow{BA}$ ja $P \neq B$, niin $PA\ell$,
(iv) Jos $P \in \overrightarrow{BC}$ ja $P \neq B$, niin $PC\ell$.



KUVA 27: SUORAN JAKAMINEN

Todistus. Koska $A * B * C$, niin (H4):n nojalla pisteet A, B, C ovat eri pisteitä ja samalla suoralla $m = \overleftrightarrow{AB}$. (H3):n nojalla on m:n ulkopuolella jokin piste E. Siten (H1):n nojalla on olemassa suora $\ell = \overleftrightarrow{BE}$. Lauseen 2.2.1 nojalla se leikkaa suoran

m vain yhdessä pisteessä. Se on B. Täten $A\ell C$.

Osoitetaan (iii). Olkoon $P \in \overrightarrow{BA}$ siten, että $P \neq B$. Niinpä $P = A$, $B * P * A$ tai $B * A * P$. Jos olisi $P\ell A$, niin jana PA leikkaisi suoraa ℓ. Ainoa mahdollinen leikkauspiste on B, joten pätisi $P * B * A$. Niin ei (H6):n ja (H4):n mukaan ole. Siten $PA\ell$. Kohta (iv) osoitetaan samoin.

Selvästi $\{B\} \subset BA \cap BC \subset \overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC}$.

Olkoon $P \in \overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC}$ siten, että $P \neq B$. Nyt kohtien (iii) ja (iv) nojalla $PA\ell$ ja $PC\ell$, jolloin (H7):n mukaan $AC\ell$. Niin ei ole, joten $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} \subset \{B\}$. Kohta (i) on todistettu.

Olkoon P sellainen suoran m piste, että $P \notin \overrightarrow{BA}$ ja $P \notin \overrightarrow{BC}$. Silloin puolisuoran määritelmän mukaan mikään seuraavista ei päde: $P \in \{A, B\}$, $B * P * A$, $B * A * P$, $P \in \{B, C\}$, $B * P * C$, $B * C * P$. (H6):n ja (H4):n nojalla $A * B * P$ ja $P * B * C$. Siten $A\ell P$ ja $P\ell C$. Aksiooman (H7) kohdan (ii) nojalla $AC\ell$. Niin ei ole, joten

$$\{P \mid m \text{ kulkee } P\text{:n kautta}\} \subset \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}.$$

Toisaalta suoran puolisuorat ovat ovat aina suoran pisteiden joukkoja, joten yllä pätee inkluusio myös toiseen suuntaan ja siten yhtäsuuruus. Kohta (ii) on todistettu. □

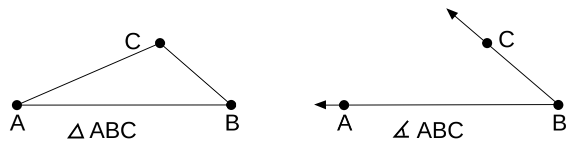
On aika määritellä geometrian keskeiset käsitteet, kolmio ja kulma.

Määritelmä 2.7.

(1) *Kolmio* $\triangle ABC$ on järjestetty pistekolmikko, joka ei sisälly mihinkään suoraan.

(2) Jos $\triangle ABC$ on on kolmio, niin sanomme janoja AB, BC ja CB *kolmion* $\triangle ABC$ *sivuiksi* ja pisteitä A, B ja C sen *kärjiksi*.

(3) Jos $\triangle ABC$ on on kolmio, niin sanomme puolisuoria $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ *kulman* $\measuredangle ABC$ *kyljiksi* ja pistettä B sen *kärjeksi*.

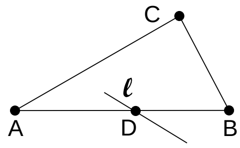


KUVA 28: KOLMION SIVUT JA KULMAN KYLJET

Huomautus 9. Kun sanomme, että *"$\triangle ABC$ on kolmio"* tarkoitamme, että pisteet A, B ja C eivät ole samalla suoralla. Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat samat, jos ja vain jos $A = D$, $B = E$ ja $C = F$. Koska kolmion kärjet ovat annetussa järjestyksessä, on kolmiosta $\triangle ABC$ puhuttaessa mahdollista sanoa puolisuoria $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ *kulman* $\measuredangle ABC$ *ensimmäiseksi ja toiseksi kyljeksi* — tässä järjestyksessä.

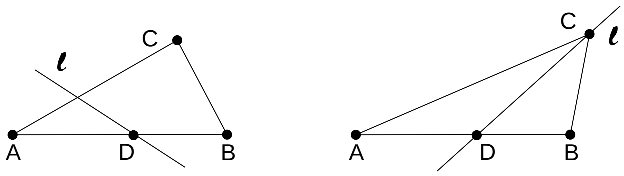
Eukleides käytti ilman todistusta ilmeiseltä näyttävää tulosta, jonka mukaan suora, joka leikkaa jotakin kolmion sivua muualla kuin kärjessä, leikkaa myös jotakin muuta sivua. Tämä voidaan nyt muotoilla ja todistaa täsmällisesti. Tulos on nimeltään *Paschin lause*[13] .

[13] MORITZ PASCH 1843–1930. Saksa. Esitti Paschin lauseen aksioomana 1882.



Kuva 29: Paschin lauseen tilanne

LAUSE 2.3.6 (Pasch). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $\ell \neq \overleftrightarrow{AB}$ suora, joka leikkaa sivua AB pisteessä D, $A \neq D \neq B$. Silloin ℓ leikkaa myös sivua AC tai BC. Jos suora ℓ ei kulje kärjen C kautta, leikkaa ℓ vain toista sivuista AC tai BC.*



Kuva 30: Paschin lause

Todistus. Jos ℓ kulkee C:n kautta, niin lause pätee. Älköön siis ℓ kulkeko C:n kautta. Koska $A * D * B$ ja ℓ kulkee D:n kautta, niin $A\ell B$.

Nyt joko $A\ell C$ tai $AC\ell$. Ensimmäisessä tapauksessa ℓ leikkaa janaa AC. Silloin aksiooman (H7) kohdan (ii) nojalla $BC\ell$, joten ℓ ei leikkaa janaa BC ja lause pätee. Jälkimmäisessä tapauksessa ℓ ei leikkaa janaa AC. Lauseen 2.3.2 nojalla $C\ell B$ eli ℓ leikkaa janaa B. Nytkin lause pätee. $\square$

LAUSE 2.3.7. *Olkoot A, B ja C pisteitä siten, että $A * B * C$. Silloin*

(i) $AC = AB \cup BC$
(ii) $AB \cap BC = \{B\}$.

Todistus. Kohta (ii) on osa lausetta 2.3.5.

Todistetaan kohta (i). Näytetään aluksi $AC \subset AB \cup BC$. Olkoon P janalla AC. Jos $P \in \{A, B, C\}$, on asia selvä. Olkoot siis A, B, C ja P eri pisteitä, jolloin $A * P * C$. (H6):n nojalla joko $P * A * B$, $A * P * B$ tai $A * B * P$. Ensimmäinen ei käy, sillä muutoin lauseen 2.3.4 kohdan (ii) ja oletuksen $A * B * C$ nojalla olisi $P * A * C$, mikä on vastoin tietoa $A * P * C$. Jos $A * P * B$, niin $P \in AB$ ja asia on selvä. Jos $A * B * P$, niin lauseen 2.3.4 kohdan (i) ja tiedon $A * P * C$ nojalla $B * P * C$, joten $P \in BC$ ja asia on selvä.

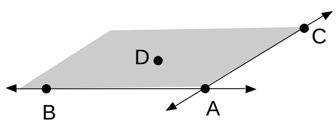
Näytetään, että $AB \cup BC \subset AC$. Olkoon $P \in AB \cup BC$. Jos $P = A$ tai $P = C$, on asia selvä. Jos taas $P = B$, niin oletuksen $A * B * C$ mukaan $P \in AC$. Olkoon siis $P \notin \{A, B, C\}$, jolloin $A * P * B$ tai $B * P * C$. Ensimmäisessä tapauksessa oletuksen $A * B * C$ ja lauseen 2.3.4 kohdan (i) nojalla $A * P * C$, joten $P \in AC$. Toisessa tapauksessa (H4):n ja oletuksen perusteella $C * B * A$ ja $C * P * B$. Lauseen 2.3.4 kohdan (i) mukaan nyt $C * P * A$ eli $P \in CA = AC$. $\square$

LAUSE 2.3.8. *Olkoot A, B ja C eri pisteitä siten, että $A * B * C$. Tällöin $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.*

Todistus. Näytetään ensin, että $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AC}$. Olkoon $P \in \overrightarrow{AB}$. Nyt joko $P \in AB$ tai $A * B * P$. Jos $P \in AB$, niin edellisen lauseen mukaan $P \in AC \subset \overrightarrow{AC}$. Olkoon siis $A * B * P$. Jos $P = C$, on asia selvä. Niinpä oletamme, että $P \neq C$. (H6):n nojalla joko $P * A * C$, $A * P * C$ tai $A * C * P$. Ensimmäinen näistä ei käy, sillä muutoin olisi $C * A * P$, mistä tiedon $C * B * A$ ja lauseen 2.3.4 kohdan (i) nojalla seuraa $B * A * P$, mikä on vastoin oletusta $A * B * P$. Jos taas $A * P * C$, niin $P \in AC \subset \overrightarrow{AC}$. Jos $A * C * P$, niin suoraan $P \in \overrightarrow{AC}$.

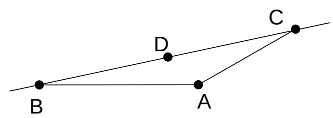
Näytetään, että $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{AB}$. Olkoon $P \in \overrightarrow{AC}$. Jos $P \in \{A, B, C\}$, on asia selvä suoraan tai oletuksen $A * B * C$ nojalla. Olkoon siis $P \notin \{A, B, C\}$. Jälleen on vain kolme mahdollisuutta: $A * B * P$, $A * P * B$ tai $P * A * B$. Kaksi ensimmäistä antavat suoraan $P \in \overrightarrow{AB}$. Jos viimeinen toteutuisi, niin oletuksen $A * B * C$ ja lauseen 2.3.4 kohdan (ii) nojalla $P * A * C$, jolloin $P \notin \overrightarrow{AC}$. Se ei käy. □

Määritelmä 2.8. Olkoot A, B ja C eri pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla. Sanomme, että piste D on *kulman $\angle BAC$ sisäpuolella*, jos $DC\overleftrightarrow{BA}$ ja $DB\overleftrightarrow{AC}$.



Kuva 31: Kulman sisäpuoli

LAUSE 2.3.9. *Olkoot A, B ja C pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla ja kulkekoon suora $\overleftrightarrow{BC}$ pisteen D kautta. Tällöin D on kulman $\angle BAC$ sisäpuolella, jos ja vain jos $B * D * C$.*



Kuva 32: Lause 2.3.9

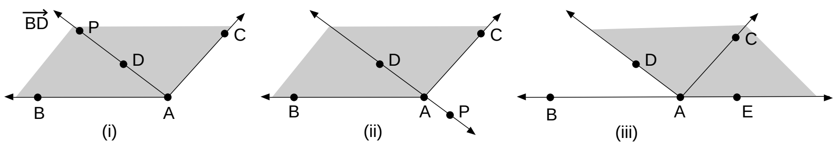
Todistus. "$\Rightarrow$". Olkoon D kulman $\angle BAC$ sisäpuolella, jolloin heti $D \notin \{B, C\}$. Määritelmän mukaan $\overleftrightarrow{BA}$ ei leikkaa janaa DC eikä $\overleftrightarrow{AC}$ leikkaa janaa DB. Siten ei voi olla $D * B * C$ eikä $B * C * D$. (H6):n nojalla on tällöin $B * D * C$.

"$\Leftarrow$". Olkoon $B * D * C$. Pisteet B, A ja C eivät ole samalla suoralla, joten $\overleftrightarrow{BA} \neq \overleftrightarrow{BC}$. Näiden suorien ainoa leikkauspiste on lauseen 2.2.1 nojalla B. Toisaalta (H1):n nojalla $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{CD}$, joten suorien $\overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{BA}$ ainoa leikkauspiste on B. Jos nyt janalla DC olisi jokin suoran $\overleftrightarrow{BA}$ piste, niin se olisi B ja silloin olisi $C * B * D$. Se on vastoin oletusta $B * D * C$, joten janalla DC ei ole suoran $\overleftrightarrow{BA}$ pisteitä. Siten $DC\overleftrightarrow{BA}$. Samoin päätellään, että $DB\overleftrightarrow{AC}$. □

LAUSE 2.3.10. *Olkoon $\angle BAC$ kulma ja D piste sen sisäpuolella. Tällöin:*

(i) *jos $P \in \overrightarrow{AD}$ ja $P \neq A$, niin P on kulman $\angle BAC$ sisäpuolella;*

(ii) *jos $P * A * D$, niin P ei ole kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella;*
(iii) *jos $B * A * E$, niin C on kulman $\measuredangle DAE$ sisäpuolella.*

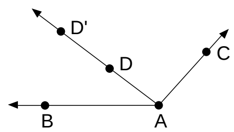


Kuva 33: Lause 2.3.10

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Määritelmä 2.9. Olkoon $\measuredangle BAC$ kulma ja D piste. Sanomme, että puolisuora $\overrightarrow{AD}$ on puolisuorien $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ *välissä*, jos piste D on kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella.

Huomautus 10. Määritelmä on sikäli järkevä, että jos olisi $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD'}$ jollekin toiselle pisteelle D', niin edellisen lauseen 2.3.10 kohdan (i) nojalla D ja D' olisivat yhtäaikaa kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella. Määrittely ei siis riipu puolisuoran $\overrightarrow{AD}$ pisteen D valinnasta.

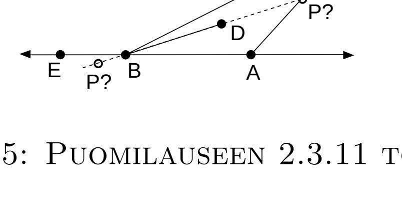


Kuva 34: Puolisuora toisten välissä

LAUSE 2.3.11 (Puomilause). *Olkoon puolisuora $\overrightarrow{BD}$ puolisuorien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ välissä. Tällöin puolisuora $\overrightarrow{BD}$ leikkaa janaa AC.*

Todistus. Tehdään vastaoletus: $\overrightarrow{BD}$ ei leikkaa janaa AC. Tällöin ei edes suora $\overleftrightarrow{BD}$ leikkaa janaa AC, sillä mahdollinen leikkauspiste P ei voisi olla A eikä C, vaan olisi niiden välissä $A * P * C$. Lauseen 2.3.9 mukaan P olisi siis kulman $\measuredangle ABC$ sisäpuolella. Mutta vastaoletuksen mukaan P ei voisi olla puolisuoralla $\overrightarrow{BD}$, vaan lauseen 2.3.5 nojalla $P * B * D$, jolloin lauseen 2.3.10 kohdan (ii) mukaan D ei olisikaan kulman $\measuredangle CBA$ sisäpuolella. Se on vastoin oletusta.

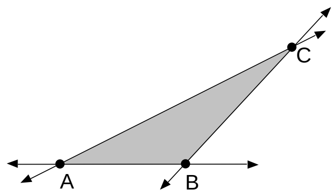
Olemme todistaneet, että suora $\overleftrightarrow{BD}$ ei leikkaa janaa AC, vaan $AC\overleftrightarrow{BD}$. Aksiooman (H5) nojalla valitsemme pisteen E siten, että $E * B * A$.



Kuva 35: Puomilauseen 2.3.11 todistus

Tällöin lauseen 2.3.10 kohdan (iii) nojalla piste C on kulman $\measuredangle EBD$ sisäpuolella. Määritelmän mukaan nyt $EC\overleftrightarrow{BD}$. Koska suoran samalla puolella olo on transitiivinen relaatio, niin $EA\overleftrightarrow{BD}$. Tämä on mahdotonta, sillä $E * B * A$ ja $\overleftrightarrow{BD}$ leikkaa siten janaa EA pisteessä B. Vastaoletus on siis epätosi. $\square$

Määritelmä 2.10. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Merkitsemme sen kulmia lyhyesti $\measuredangle A = \measuredangle BAC$, $\measuredangle B = \measuredangle ABC$ ja $\measuredangle C = \measuredangle ACB$. Sanomme, että piste P on *kolmion* $\triangle ABC$ *sisäpuolella,* jos P on jokaisen kulman $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ ja $\measuredangle C$ sisäpuolella. Jos piste P ei ole kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella eikä ole minkään sen sivun piste, niin sanomme, että P on kolmion $\triangle ABC$ *ulkopuolella.*



Kuva 36: Kolmion sisäpuoli

Huomautus 11. Seuraavan lauseen todistuksessa tarvitaan sitä sinänsäkin mielenkiintoista tietoa, että kolme samasta pisteestä alkavaa puolisuoraa jakavat kaikkien pisteiden joukon tyhjentävästi seitsemään erilliseen osaan: kulmien sisäpuolella olevien pisteiden joukkoihin sekä puolisuoriin, joista päätepiste on poistettu ja päätepisteeseen. Otetaan käyttöön merkinnät näille ja muotoillaan tulos lauseeksi. Jos ℓ on suora ja A, B ja C ovat eri pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla eikä ℓ kulje pisteen A kautta, niin merkitsemme (huomaa sulkeet):

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \{P \mid P \text{ on piste}\},\\
H(\ell, A) &= \{P \in \mathcal{T} \mid \ell \text{ ei kulje } P\text{:n kautta ja } AP\ell\},\\
\measuredangle(ABC) &= \{P \in \mathcal{T} \mid P \text{ on kulman } \measuredangle ABC \text{ sisäpuolella}\},\\
\triangle(ABC) &= \{P \in \mathcal{T} \mid P \text{ on kolmion } \triangle ABC \text{ sisäpuolella}\}.
\end{aligned}$$

Huomaamme lauseen 2.3.3 avulla:

(i) $\measuredangle(ABC) = H(\overleftrightarrow{AB}, C) \cap H(\overleftrightarrow{BC}, A)$.
(ii) Jos $AB\ell$, niin $H(\ell, A) = H(\ell, B)$.
(iii) Jos $A\ell B$, niin $H(\ell, A) \cap H(\ell, B) = \emptyset$ ja

$$H(\ell, A) \cup H(\ell, B) = \mathcal{T} \setminus \{P \in \mathcal{T} \mid \ell \text{ kulkee } P\text{:n kautta}\}.$$

(iv) $\triangle(ABC) = \measuredangle(ABC) \cap \measuredangle(BAC) \cap \measuredangle(ACB)$.

LAUSE 2.3.12. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja P piste sen sisäpuolella. Tällöin joukot $T_1 = \measuredangle(APB)$, $T_2 = \measuredangle(APC)$, $T_3 = \measuredangle(BPC)$, $T_4 = \overrightarrow{PA} \setminus \{P\}$, $T_5 = \overrightarrow{PB} \setminus \{P\}$, $T_6 = \overrightarrow{PC} \setminus \{P\}$ ja $T_7 = \{P\}$ toteuttavat*

$$\mathcal{T} = \cup_{i=1}^{7} T_i \quad \text{ja} \quad T_i \cap T_j = \emptyset \ \text{ kaikilla } i, j = 1, 2, \ldots, 7, \text{ joilla } i \neq j.$$

Todistus. Todistus käy edellisen huomautuksen laskusääntöjen avulla. Esimerkiksi

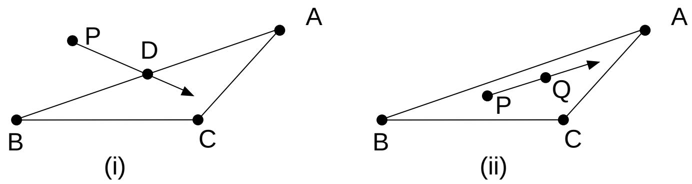
$$T_1 \cap T_2 = \big(H(\overleftrightarrow{AP}, B) \cap H(\overleftrightarrow{PB}, A)\big) \cap \big(H(\overleftrightarrow{AP}, C) \cap H(\overleftrightarrow{PC}, A)\big) = \emptyset,$$

sillä $B\overrightarrow{AP}C$ ja silloin $H(\overleftrightarrow{AP}, B) \cap H(\overleftrightarrow{AP}, C) = \emptyset$. □

Lause 2.3.13. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio.*

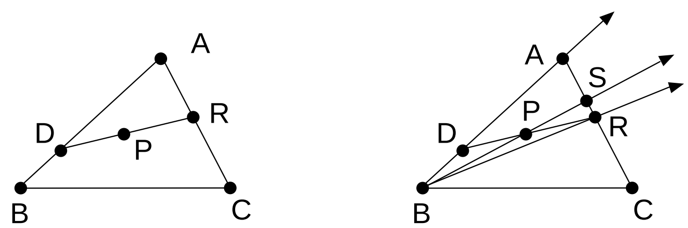
(i) *Jos P on piste kolmion $\triangle ABC$ ulkopuolella, D on sivun AB piste ja $A \neq D \neq B$, niin puolisuora $\overrightarrow{PD}$ leikkaa myös sivua BC tai AC.*

(ii) *Jos piste P on kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella ja Q on jokin toinen piste, niin puolisuora $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa jotakin kolmion $\triangle ABC$ sivua. Jos $\overrightarrow{PQ}$ ei kulje kolmion $\triangle ABC$ minkään kärjen kautta, niin $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa vain yhtä kolmion $\triangle ABC$ sivua.*



KUVA 37: LAUSE 2.3.12

Todistus. Todistetaan ensin väite (i): Paschin lauseen nojalla suora $\overleftrightarrow{PD}$ leikkaa toista sivuista AC tai BC jossakin pisteessä R. Osoitetaan, että R on puolisuoralla $\overrightarrow{PD}$. Ainakin R sisältyy suoraan $\overleftrightarrow{PD}$. Lisäksi P, D ja R ovat eri pisteitä, sillä jos olisi $D = R$, niin olisi $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ mikä on mahdotonta, koska $\triangle ABC$ on kolmio. Niinpä tasan yksi seuraavista pätee: $P * D * R$, $P * R * D$ tai $D * P * R$. Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa lauseen 2.3.8 nojalla $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PR}$, ja asia on selvä. Osoitetaan, että tapaus $D * P * R$ ei ole mahdollinen. Jo kuvasta arvataan, että tapauksessa $D * P * R$ täytyy pisteen P olla kolmion sisäpuolella — vastoin oletusta! Osoitetaan se.



KUVA 38: JOS $D * P * R$, NIIN P ON KULMAN $\measuredangle BAC$ SISÄPUOLELLA

R ei ainakaan ole kumpikan kärjistä A ja B. Jos olisi $R = C$, niin P olisi lauseen 2.3.9 nojalla kolmion kulman $\triangle ABC$ sisäpuolella. Oletetaan siksi, että R ei ole mikään kärjistä A, B, C. On siis tutkittava enää vain kaksi tapausta: R on sivulla AC tai BC päätepisteet pois lukien, eli $A * R * C$ tai $B * R * C$.

Olkoon $A * R * C$. Tällöin $\overleftrightarrow{CA} = \overleftrightarrow{CR}$. Koska lisäksi $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AD}$ ja $D * P * R$, niin lauseen 2.3.9 nojalla P on kulmien $\measuredangle BAC$, $\measuredangle DCA$ ja $\measuredangle ABR$ sisäpuolella. Määritelmän 7 nojalla $\overrightarrow{BP}$ on puolisuorien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BR}$ välissä, jolloin puomilauseen 2.3.11 mukaan $\overrightarrow{BP}$ leikkaa janaa AR jossakin pisteessä $S \neq A$. Koska $AR \subset AC$, on nyt $A*S*C$. Lauseen 2.3.9 nojalla S on kulman $\measuredangle ABC$ sisäpuolella, jolloin lauseen 2.3.10 kohdan (i) nojalla myös $P \in \overrightarrow{BS}$ on kulman $\measuredangle ABC$ sisäpuolella. Samoin $\overrightarrow{CP}$ on puolisuorien $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{CA}$ välissä, jolloin $\overrightarrow{CP}$ leikkaa sivua AB jossakin pisteessä $T \neq A$. Siten $B * T * A$, joten T on kulman $\measuredangle BCA$ sisäpuolella, josta lopulta $P \in \overrightarrow{CT}$ on kulman $\measuredangle BCA$ sisäpuolella. Näin P on kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella vastoin oletusta. Tapaus $B * R * C$ suljetaan pois aivan samoin; sen jälkeen (i) on todistettu.

Todiostetaan väite (ii): Lauseen 2.3.12 mukaan Q ei voi olla missään muualla kuin suorilla $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$ tai $\overleftrightarrow{CP}$ tai kulmien $\measuredangle APB$, $\measuredangle APC$ tai $\measuredangle BPC$ sisäpuolella.

Olkoon aluksi Q kulman $\measuredangle APC$ sisäpuolella. Määritelmän 7 nojalla $\overrightarrow{PQ}$ on puolisuorien $\overrightarrow{PA}$ ja $\overrightarrow{PC}$ välissä, jolloin lauseen 2.3.11 mukaan $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa sivua AC. Jos Q on kulman $\measuredangle APB$ sisäpuolella, niin $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa vastaavasta syystä sivua AB. Jos taas Q on kulman $\measuredangle BPC$ sisäpuolella, niin $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa sivua BC.

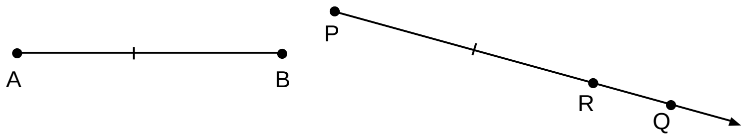
Olkoon Q jokin suoran $\overleftrightarrow{AP}$ piste. Koska P on kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella, niin $\overrightarrow{AP}$ leikkaa sivua BC jossakin pisteessä $S \neq B$. Koska P on kulman $\measuredangle ABC$ sisäpuolella, niin lauseen 2.3.9 nojalla $A * P * S$. Jos $Q \in \overrightarrow{PA}$, niin $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA}$ leikkaa sivuja AB ja AC. Jos $Q \in \overrightarrow{PS}$, niin $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS}$ leikkaa sivua BC. Lauseen 2.3.5 nojalla ei suoralla $\overleftrightarrow{AP}$ ole muita pisteitä. Samoin näytetään, että $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa jotakin sivua, jos Q on suoran $\overleftrightarrow{PB}$ tai suoran $\overleftrightarrow{PC}$ piste.

Todistetaan lopuksi väitteen yksikäsitteisyysosa. Ensinnäkin Paschin lauseen ja lauseen 2.2.1 nojalla suora $\overleftrightarrow{PQ}$ leikkaa kolmion $\triangle ABC$ sivuja korkeintaan kahdessa eri pisteessä U ja V. Niille pätee $U*P*V$, sillä P on kolmion sisäpuolella. Lauseen 2.3.8 nojalla pisteistä U ja V vain toinen on puolisuoralla $\overrightarrow{PQ}$. Jos tämä ei ole kolmion kärki, leikkaa $\overrightarrow{PQ}$ siten vain yhtä kolmion sivua. □

2.4. Hilbertin aksioomat (H8)–(H13).

Tähän mennessä olemme käyttäneet peruskäsitteitä *piste, suora, kulkee pisteen kautta* ja *pisteiden välissä.* Nyt on aika ottaa käyttöön vielä kaksi peruskäsitettä. Käytämme niistä samaa nimitystä *yhtenevyys*; ensimmäinen on relaatio kahden janan välillä, jälkimmäinen on relaatio kahden kulman välillä. Merkitsemme ensimmäistä $AB \cong CD$ ja luemme *”janat AB ja CD ovat yhteneviä”*. Jälkimmäistä merkitsemme $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ ja luemme *”kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ ovat yhteneviä”*. Nämä peruskäsitteet vastaavat joissakin konkreettisissa malleissa juuri janojen pituuksien ja niiden välisten kulmien yhtäsuuruuksia.

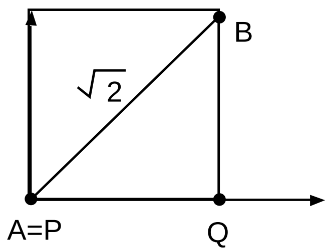
(H8) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on mielivaltainen puolisuora, niin on olemassa **yksi ja vain yksi** piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.



Kuva 39: Hilbertin kahdeksas aksiooma

Esimerkki 4. Palataan luvun 2.3 esimerkkiin 1 (tason tavalliset pisteet ja suorat). Olkoot A, B, C ja D pisteitä siten, että $A \neq B$ ja $C \neq D$. Sovimme, että $AB \cong CD$, jos $\|A - B\| = \|C - D\|$, missä $\| \cdot \|$ on tavallinen tason $\mathbb{R}^2$ normi eli $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tällöin (H8) pätee (Totea!).

Esimerkki 5. Muutetaan edellisen esimerkin mallia siten, että lukusuora $\mathbb{R}$ korvataan rationaalilukujen joukolla $\mathbb{Q}$. Pisteet ovat siis tulojoukon $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ alkioita, suorat joukkoja $\{(x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta) \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}$, missä x_0, y_0, α ja β ovat rationaalisia. Relaatiot määritellän kutenkoordinaattigeometriassa. Tällöin aksioomat (H1)–(H7) toteutuvat. (Todista tämä harjoituksena. Vertaa myös luvun 2.3 esimerkkiin 3.) Aksiooma (H8) ei tässä mallissa päde: Jos $A = P = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $Q = (1, 0)$, niin $\|A-B\| = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ja niin ei ole pistettä $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $\|P-R\| = \|A-B\|$.



Kuva 40: H8-vastaesimerkki

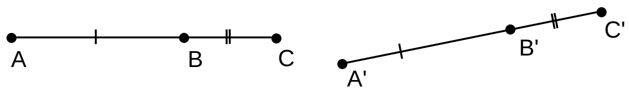
(H9) Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio eli:

(i) $AB \cong AB$ (relaatio on refleksiivinen).

(ii) Jos $AB \cong CD$, niin $CD \cong AB$ (relaatio on symmetrinen).

(iii) Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB \cong EF$ (relaatio on transitiivinen).

(H10) Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.



Kuva 41: Hilbertin 10. aksiooma

Esimerkki 6. Esimerkin 4 malli eli Descartesin koordinaattigeometria toteuttaa Hilbertin aksioomat (H9)–(H10).

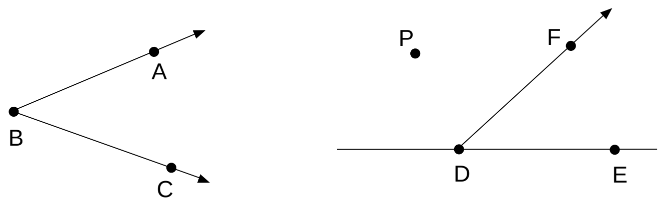
Huomautus 12. Aksiooma (H10) sanoo, että jos yhteneviä janoja sijoitetaan peräkkäin jollekin suoralle, niin näin saadut ”summajanat” ovat yhteneviä. Tämä antaa aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 2.11. Olkoon AB jana ja $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Janan AB *monikerta (suuntaan $\overrightarrow{AB}$)* on jana $n \cdot AB = AB_n$, missä $B_1 = B$ ja B_{n+1} on se yksikäsitteinen piste puolisuoralta $\overrightarrow{AB_n}$, jolle $A * B_n * B_{n+1}$ ja $B_nB_{n+1} \cong AB$.

Kuva 42: Janan monikerrat

Induktioperiaatteen ja (H10):n nojalla $n \cdot AB \cong n \cdot CD$, jos $AB \cong CD$ ja $n \in \mathbb{N}$. (Todista!) Seuraavat aksioomat sanovat kulmien yhtenevyydestä suunnilleen samat asiat, jotka aksioomat sanoivat janojen yhtenevyydestä.

(H11) Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma, $\overrightarrow{DE}$ puolisuora ja P piste, joka ei sisälly suoraan $\overleftrightarrow{DE}$. Silloin on olemassa yksi ja vain yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$.



Kuva 43: Aksiooma (H11)

(H12) Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

Esimerkki 7. Esimerkin 5 malli eli koordinaattigeometria toteuttaa aksioomat (H9) ja (H10). Täydennetään sitä määrittelemällä mallissa kulmien yhtenevyys kosinilauseen mukaisesti siten, että $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$, jos

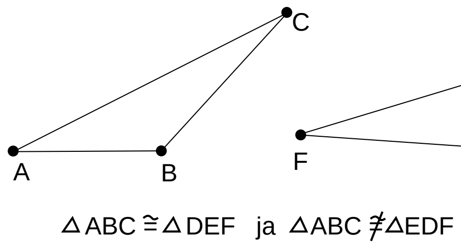
$$\frac{(A-B \mid C-B)}{\|A-B\| \, \|C-B\|} = \frac{(E-D \mid F-D)}{\|E-D\| \, \|F-D\|},$$

missä $(\cdot \mid \cdot)$ on tavallinen tason $\mathbb{R}^2$ sisätulo ja $\|\cdot\|$ on normi, siis $((x,y) \mid (u,v)) = xu + yv$ ja $\|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2$. Tällöin myös aksioomat (H11) ja (H12) toteutuvat (Totea!).

Huomautus 13. (H11) vastaa aksioomaa (H8), samoin (H9) ja (H12) vastaavat toisiaan. Kulmille voitaisiin asettaa vielä janoja koskevaa aksioomaa (H10) vastaava aksiooma, mutta osoittautuu, että vastaava väite seuraa muuhun tarkoitukseen vaadittavasta vahvemmasta aksioomasta (H13), jota varten tarvitsemme käsitteen kolmioiden samanlaisuudesta, kolmioiden yhtenevyyden.

Määritelmä 2.12. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita. Sanomme, että ne ovat *yhteneviä kolmioita* ja merkitsemme $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, jos niiden vastaavat sivut ja kulmat ovat yhteneviä eli $AB \cong DE$, $BC \cong EF$, $AC \cong DF$, $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $\measuredangle C \cong \measuredangle F$. Muissa tapauksissa merkitsemme $\triangle ABC \ncong \triangle DEF$.

Huomautus 14. Toisin kuin janojen ja kulmien yhtenevyyden yhteydessä on nyt kärkipisteiden järjestyksellä väliä: voi olla $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ja $\triangle ABC \ncong \triangle EDF$, vaikka vastaavat pistejoukot ovatkin samat eli $\triangle(DEF) = \triangle(EDF)$. (Samat kärjet, mutta mahdollisesti eri järjestyksessä; samat sisäpuolet.)



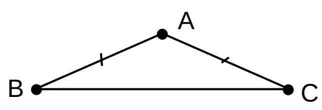
Kuva 44: Kolmioiden yhtenevyys riippuu järjestyksestä

(H13) (**Sivu-kulma-sivu -sääntö, SKS**) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Esimerkki 8. Koordinaattigeometria toteuttaa myös aksiooman (H13). (Totea!)

Huomautus 15. Eukleides esitti sivu-kulma-sivu -säännön lauseena ja yritti todistaa sen aksioomien avulla. Se ei kuitenkaan onnistu, vaan SKS on otettava aksioomaksi. Sen avulla todistetaan helposti Pappuksen[14] mukaan nimetty tulos, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat ovat yhtenevät. Käänteinen implikaatio, jonka mukaan kantakulmien yhtenevyys myös takaa tasakylkisyyden, on myös voimassa samoin ehdoin, mutta käytännössä hankalampi todistaa. Jätämme sen harjoitustehtäväksi, joka on helppo, kunhan käytössä on lause 2.4.9 eli KSK -sääntö.

LAUSE 2.4.1. (**Pappus**) *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio siten, että $AB \cong AC$. Tällöin $\measuredangle B \cong \measuredangle C$.*



Kuva 45: Tasakylkinen kolmio

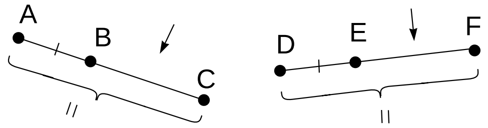
Todistus. Tarkastellaan kolmioita $\triangle ABC$ ja $\triangle ACB$. Koska kulmassa ei ole väliä kylkien järjestyksellä, kulmat $\measuredangle BAC$ ja $\measuredangle CAB$ ovat sama kulma $\measuredangle A$. (H12):n mukaan kulmien yhtenevyys on refleksiivinen relaatio, joten $\measuredangle A \cong \measuredangle A$ kummallekin kolmiolle eli $(\measuredangle A)_1 = (\measuredangle A)_2$, missä alaindeksi 1 viittaa kolmioon $\triangle ABC$ ja 2

[14] Pappus Aleksandrialainen 290– n. 350 Egypti.

kolmioon $\triangle ACB$. Oletuksen nojalla $AB \cong AC$, joten $(AB)_1 \cong (AC)_2$ ja $(AB)_2 \cong (AC)_1$. Koska janojen yhtenevyys on symmetrinen relaatio, niin $(AC)_1 \cong (AB)_2$. Näin kaikki sivu-kulma-sivu -säännön oletukset ovat voimassa, joten $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ ja erityisesti $(\measuredangle B)_1 \cong (\measuredangle C)_2$. □

Aksiooma (H10) antaa luvan laskea janoja yhteen. Siihen perustuu janojen vertailu ja viime kädessä myös pituuden käsite. Huomataan aluksi, että janoja voidaan vähentää toisistaan seuraavien kahden lauseen merkityksessä.

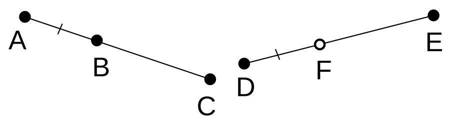
LAUSE 2.4.2. *Olkoot $A * B * C$, $D * E * F$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $BC \cong EF$.*



Kuva 46: Janojen vähennyslasku

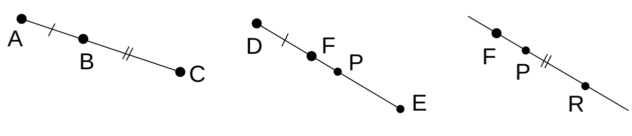
Todistus. Perustelu jää harjoitustehtäväksi. □

LAUSE 2.4.3. *Olkoot $A * B * C$ ja $AC \cong DE$. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi piste F siten, että $D * F * E$ ja $AB \cong DF$.*



Kuva 47: Janan jakaminen

Todistus. Aksiooman (H8) nojalla puolisuoralla $\overrightarrow{DE}$ on yksikäsitteinen piste $F \neq D$ siten, että $AB \cong DF$. Riittää siis osoittaa, että $D * F * E$. Tehdään antiteesi, että näin ei ole. Silloin joko $D * E * F$ tai $F = E$, sillä $F \in \overrightarrow{DE} \setminus \{D\}$. Kummassakin tapauksessa valitaan P siten, että $D * F * P$, ja edelleen aksiooman (H8) nojalla $R \in \overrightarrow{FP} \setminus \{F\}$ siten, että $FR \cong BC$.



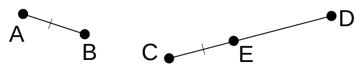
Kuva 48: Lauseen 2.4.3 todistus

Nyt pätee $R \in \overrightarrow{DE} \setminus \{D\}$, minkä päättelemme seuraavasti: Lauseen 2.3.8 nojalla saadaan ensin $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FR}$ ja sitten tiedon $D * F * P$ nojalla $D * F * R$. Nyt voidaan päätellä $D * E * R$ joko suoraan tapauksessa $F = E$ tai lauseen 2.3.4 kohdan (i) nojalla tapauksessa $D * E * F$ ja todellakin $R \in \overrightarrow{DE} \setminus \{D\}$.

Nyt siis $AB \cong DF$ ja $BC \cong FR$. Koska oletuksen mukaan $A * B * C$ ja, kuten yllä todettiin, $D * F * R$, niin aksioomaa (H10) käyttäen saadaan $AC \cong DR$.

Koska oletuksen mukaan $AC \cong DE$ ja nyt siis $R \in \overrightarrow{DE} \setminus \{D\}$, niin aksiooman (H8) yksikäsitteisyysväittämän nojalla onkin $R = E$. Tämä on mahdotonta, koska $D * E * R$. Siten $D * F * E$. □

Määritelmä 2.13. Olkoot AB ja CD janoja. Sanomme, että *jana AB on lyhyempi kuin jana CD*, jos on olemassa piste E siten, että $C * E * D$ ja $AB \cong CE$. Tällöin merkitsemme $AB < CD$.



Kuva 49: Lyhyempi jana

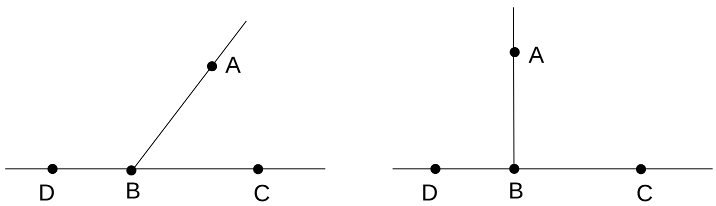
LAUSE 2.4.4. *Olkoot AB, CD ja EF janoja.*

(i) *Jos $AB < CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB < EF$.*
(ii) *Jos $AB < CD$ ja $CD < EF$, niin $AB < EF$.*
(iii) *Tasan yksi seuraavista on voimassa:*

$$AB < CD, \ AB \cong CD \text{ tai } CD < AB.$$

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Määritelmä 2.14. Olkoon $\angle ABC$ kulma ja $D * B * C$. Sanomme, että kulma $\angle DBA$ on kulman $\angle ABC$ *täydennyskulma.* Jos lisäksi $\angle DBA \cong \angle ABC$, niin sanomme, että kulma $\angle ABC$ on *suora kulma.*



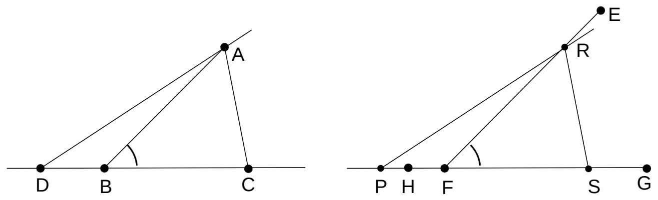
Kuvat 50 ja 51: Täydennyskulma ja suora kulma

Huomautus 16. Täydennyskulman määritelmä on sikäli järkevä, että $\angle DBA$ on myös kulma, sillä A ei voi olla suoralla $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{DB}$.

Määritelmästä näemme heti, että kulma on täydennyskulmansa täydennyskulma, joten voimme sanoa, että kulmat $\angle DBA$ ja $\angle ABC$ ovat *toistensa täydennyskulmia.* Aksiooman (H12) perusteella suoran kulman täydennyskulma on suora kulma.

Seuraava lause sanoo, että yhtenevien kulmien täydennyskulmat ovat yhtenevät.

LAUSE 2.4.5. *Olkoot $\angle ABC$ ja $\angle EFG$ kulmia sekä $\angle DBA$ ja $\angle HFE$ vastaavia täydennyskulmia ja olkoon lisäksi $\angle ABC \cong \angle EFG$. Tällöin myös $\angle DBA \cong \angle HFE$.*



Kuva 52: Yhtenevien kulmien täydennyskulmat

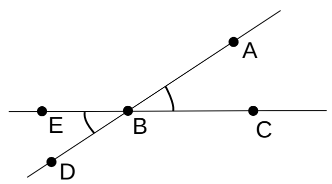
Todistus. Aksiooman (H8) nojalla on olemassa pisteet P, R ja S siten, että $P \in \overrightarrow{FH}$ ja $FP \cong BD$, $R \in \overrightarrow{FE}$ ja $FR \cong BA$ sekä $S \in \overrightarrow{FG}$ ja $FS \cong BC$. Lauseen 2.3.8 mukaan $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{FR} = \overrightarrow{FE}$ ja $\overrightarrow{FS} = \overrightarrow{FG}$, joten $\measuredangle HFE = \measuredangle PFR$ ja $\measuredangle EFG = \measuredangle RFS$. Koska $\measuredangle ABC$ on kulma, niin $\triangle ABC$ on kolmio ja vastaavasti $\triangle RFS$ on kolmio. Oletuksen ja pisteiden R ja S valinnan perusteella voimme soveltaa SKS-sääntöä, jolloin saamme, että $\triangle ABC \cong \triangle RFS$. Erityisesti tällöin (a) $\measuredangle BCA \cong \measuredangle FSR$ ja (b) $AC \cong RS$.

Täydennyskulman määritelmän mukaan $D * B * C$ ja $H * F * G$, jolloin myös $P * F * S$ ja siten $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SP}$, joista edelleen $\measuredangle BCA = \measuredangle DCA$ ja $\measuredangle FSR = \measuredangle PSR$. Nyt (H12):n ja (a):n nojalla (c) $\measuredangle DCA \cong \measuredangle PSR$. Koska nyt siis $D * B * C$ ja $P * F * S$ sekä $DB \cong PF$ ja $BC \cong FS$ (P:n ja S:n valinnan takia), niin aksiooman (H10) nojalla (d) $DC \cong PS$.

Ehdot (b), (c) ja (d) yhdessä SKS-säännön kanssa takaavat, että $\triangle DCA \cong \triangle PSR$. Erityisesti tällöin $\measuredangle ADC \cong \measuredangle RPS$ eli $\measuredangle ADB \cong \measuredangle RPF$ (lause 2.3.8) ja lisäksi $AD \cong RP$. Koska vielä $DB \cong PF$ pisteen P valinnan perusteella, niin SKS-sääntöä saadaan soveltaa myös kolmioihin $\triangle ADB$ ja $\triangle RPF$. Silloin saamme, että ne ovat yhteneviä, jolloin erityisesti $\measuredangle DBA \cong \measuredangle PFR$. Koska $\measuredangle PFR = \measuredangle HFE$, niin väite seuraa aksioomasta (H12). □

Nyt saamme helposti tuloksen, että ”ristikulmat ovat yhtenevät”. Seuraavan lauseen perustelu on sopiva harjoitustehtävä.

LAUSE 2.4.6. *Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma ja $D*B*A$ sekä $E*B*C$. Tällöin $\measuredangle EBD \cong \measuredangle ABC$.*



Kuva 53: Ristikulmat

Huomautus 17. Kuten huomautuksessa 16 totesimme, suoran kulman täydennyskulma on suora. Pätee enemmänkin: jokainen suoran kulman kanssa yhtenevä kulma on suora. Lauseen 2.4.7 käänteinen versio on myös voimassa: Myöhemmin todistettavan lauseen 2.4.14 mukaan kaikki suorat kulmat ovat yhteneviä. Tässä vaiheessa tämä on kuitenkin vaikeampi todistaa kuin lause 2.4.7. Kokeile!

LAUSE 2.4.7. *Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kulmia siten, että $\measuredangle DEF$ on suora ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$. Tällöin myös $\measuredangle ABC$ on suora.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

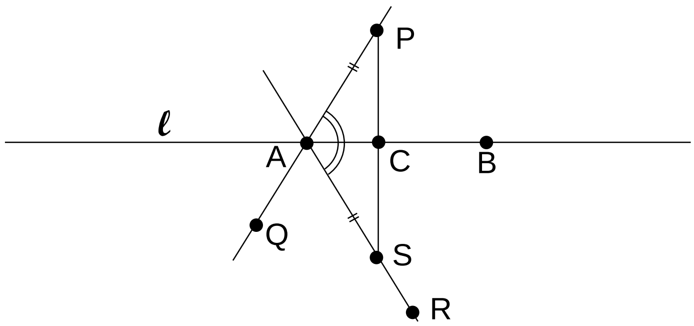
Määritelmä 2.15. Olkoot $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{AC}$ kaksi eri suoraa, jotka leikkaavat pisteessä A siten, että kulma $\measuredangle BAC$ on suora. Tällöin sanomme, että suora $\overleftrightarrow{AC}$ on suoran $\overleftrightarrow{AB}$ *normaali* ja merkitsemme $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

Huomautus 18. Jos suora ℓ on suoran m normaali, niin määritelmän nojalla myös m on suoran ℓ normaali.

Nyt voimme todistaa, että jokaisen pisteen kautta kulkee tietyn suoran normaali.

LAUSE 2.4.8. *Olkoon ℓ suora ja P piste. Tällöin on olemassa suoran ℓ normaali, joka kulkee pisteen P kautta.*

Todistus. On vain kaksi mahdollisuutta: joko ℓ ei kulje pisteen P kautta tai ℓ kulkee P:n kautta. Oletetaan ensin ensimmäinen.



Kuva 54: Normaali suoralle kuulumattoman pisteen kautta

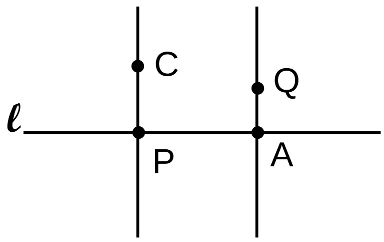
Valitaan ensin suoralta ℓ eri pisteet A ja B, sitten suoralta $\overleftrightarrow{AP}$ piste Q siten, että $P*A*Q$. (H11):n nojalla on olemassa piste R siten, että $QR\ell$ ja $\measuredangle PAB \cong \measuredangle RAB$. Aksiooman (H8) perusteella on olemassa $S \in \overrightarrow{AR} \setminus \{A\}$ siten, että $AP \cong AS$. Nyt $SR\ell$, sillä $\overleftrightarrow{RS}$ voi leikata suoraa ℓ vain pisteessä A ja ei voi olla $A \in RS$ (vrt. lause 2.3.8). Koska $RQ\ell$ niin (H7):n kohdan (i) nojalla $SQ\ell$. Q:n valinnan nojalla $Q\ell P$, joten lauseen 2.3.2 mukaan $S\ell P$. Määritelmän mukaan tällöin janalla SP on jokin suoran ℓ piste C. Nyt joko (i) $C = A$ tai (ii) $C \neq A$.

Tapauksessa (i) $P*A*S$ ja kulmat $\measuredangle PAB$ ja $\measuredangle SAB$ ovat siten toistensa täydennyskulmia. Lauseen 2.3.8 nojalla $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AR}$, joten $\measuredangle SAB = \measuredangle RAB$. Siis $\measuredangle PAB \cong \measuredangle SAB$, eli $\measuredangle PAB$ on yhtenevä täydennyskulmansa kanssa ja siten suora.

Tapauksessa (ii) on $A \neq C$, jolloin $\triangle PAC$ ja $\triangle SAC$ ovat kolmioita. Niissä pätee $AC \cong AC$ ja $AP \cong AS$. Lisäksi on voimassa (a) $\measuredangle PAC \cong \measuredangle SAC$, sillä joko $C \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ jolloin $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ ja (a) seuraa R:n valinnasta ($\measuredangle SAC \cong \measuredangle RAC$) tai sitten $C*A*B$ jolloin (a) seuraa R:n valinnasta (josta saadaan $\measuredangle PAB \cong \measuredangle SAB$) ja lauseesta 2.4.5.

Nyt siis SKS-sääntöä kolmioihin $\triangle PAC$ ja $\triangle SAC$ soveltamalla saamme, että $\triangle PAC \cong \triangle SAC$. Erityisesti $\measuredangle PCA \cong \measuredangle SCA$. Koska $P*C*S$, niin nämä ovat toistensa täydennyskulmia. Koska ne ovat yhteneviä, on $\measuredangle PCA$ suora ja siten $\overleftrightarrow{PC}$ on suoran ℓ normaali.

Oletetaan seuraavaksi, että suora ℓ kulkee pisteen P kautta.

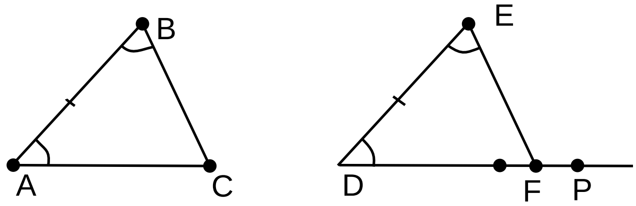


Kuva 55: Normaali suoralle kuuluvan pisteen kautta

Valitaan piste Q siten, että ℓ ei kulje sen kautta. Silloin jo todistetun tapauksen nojalla pisteen Q kautta kulkee jokin suoran ℓ normaali; leikatkoon se suoraa ℓ pisteessä A. Jos $A = P$, on asia selvä. Olkoon siis $A \neq P$. Tällöin kulma $\measuredangle PAQ$ on suora. Aksiooman (H11) nojalla on olemassa piste C, jonka kautta ℓ ei kulje, siten, että $\measuredangle CPA \cong \measuredangle PAQ$. Lauseen 2.4.7 perusteella myös kulma $\measuredangle CPA$ on suora ja siten $\overleftrightarrow{CP}$ on suoran ℓ normaali. $\square$

Huomautus 19. Lauseen 2.4.8 vahvennus väittää, että pisteen P kautta kulkee **vain yksi** suoran ℓ normaali. Tämän osoittaminen on kuitenkin nyt vielä vaikeahkoa, ja niin jätämme sen tehtäväksi vasta myöhemmin kohdassa 2.4.16.

LAUSE 2.4.9 (KSK-sääntö). *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $AB \cong DE$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*



Kuva 56: KSK-sääntö

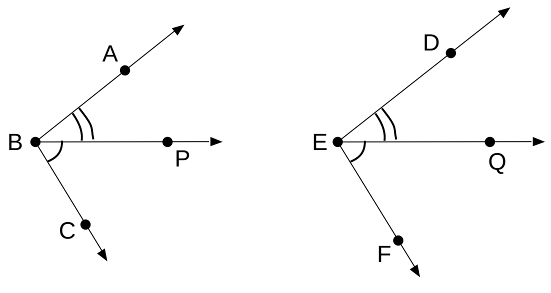
Todistus. Aksiooman (H8) nojalla on olemassa $P \in \overrightarrow{DF} \setminus \{D\}$ siten, että $AC \cong DP$. Osoitetaan, että $P = F$, jolloin $AC \cong AF$ ja väite seuraa SKS-säännöstä.

Koska $\triangle DEP$ on kolmio, saamme soveltaa sivu-kulma-sivu -sääntöä kolmioihin $\triangle BAC$ ja $\triangle EDP$, jolloin ne ovat yhteneviä. Erityisesti $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEP$. Oletuksen mukaan $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, joten $\measuredangle DEF \cong \measuredangle DEP$.

Koska $P \in \overrightarrow{DF} \setminus \{D\}$, niin $FP\overleftrightarrow{DE}$. Tällöin (H11):n yksikäsitteisyysosan nojalla $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EP}$. Siten $\overleftrightarrow{EF} = \overleftrightarrow{EP}$ ja sekä P että F sisältyvät tähän suoraan. Toisaalta P ja F sisältyvät myös suoraan $\overleftrightarrow{DF} \neq \overleftrightarrow{EF}$, joten P ja F ovat suorien $\overleftrightarrow{DF}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ leikkauspisteitä. Koska näitä leikkauspisteitä voi olla vain yksi, niin $P = F$. $\square$

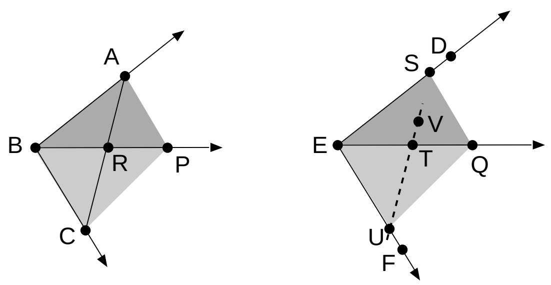
Seuraava tulos on aksiooman (H10) vastine kulmille, katso huomautus 13.

LAUSE 2.4.10. *Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kulmia sekä pisteet P ja Q sellaisia, että puolisuora $\overrightarrow{BP}$ on puolisuorien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ välissä ja vastaavasti puolisuora $\overrightarrow{EQ}$ on* *puolisuorien* $\overrightarrow{ED}$ *ja* $\overrightarrow{EF}$ *välissä. Olkoon vielä* $\measuredangle ABP \cong \measuredangle DEQ$ *ja* $\measuredangle PBC \cong \measuredangle QEF$. *Tällöin* $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$.



Kuva 57: Aksiooman (H10) vastine kulmille

Todistus. Oletuksen ja lauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{BP}$ leikkaa janaa AC jossakin pisteessä R siten, että $A * R * C$. (H8):n nojalla puolisuorilla $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EQ}$ ja $\overrightarrow{EF}$ on pisteet S, T ja U siten, että $ES \cong BA$, $ET \cong BR$ ja $EU \cong BC$. Silloin oletuksen ja SKS-säännön nojalla $\triangle SET \cong \triangle ABR$ ja $\triangle TEU \cong \triangle RBC$. Erityisesti siis $\measuredangle BAR \cong \measuredangle EST$, $\measuredangle BCR \cong \measuredangle EUT$, $AR \cong ST$ ja $RC \cong TU$.



Kuva 58: Lauseen 2.4.10 todistus

Pyrimme päättelemään seuraavaksi (H10):n avulla, että $AC \cong SU$, jolloin KSK-sääntöä voitaisiin soveltaa kolmioihin $\triangle ABC$ ja $\triangle SEU$. Tässä on kuitenkin se vaikeus, että emme tiedä, ovatko S, U ja T samalla suoralla. Kuvassa niin näyttää olevan, mutta todistus tarvitaan.

Valitaan piste V siten, että $V*T*U$, jolloin $\measuredangle VTE$ ja $\measuredangle UTE$ ovat toistensa täydennyskulmia. Samoin, koska $A*R*C$, ovat $\measuredangle CRB$ ja $\measuredangle ARB$ toistensa täydennyskulmia. Koska nyt $\triangle CRB \cong \triangle UTE$, niin $\measuredangle UTE \cong \measuredangle CRB$, jolloin lauseen 2.4.5 nojalla myös $\measuredangle VTE \cong \measuredangle ARB$. Koska $\triangle SET \cong \triangle ARB$, niin $\measuredangle ARB \cong \measuredangle STE$. Siten $\measuredangle VTE \cong \measuredangle STE$.

Koska $T \in \overrightarrow{EQ} \setminus \{E\}$, niin $\overrightarrow{ET} = \overrightarrow{EQ}$. Tällöin oletuksen ja lauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{ET}$ leikkaa janaa SU ja saadaan $\overleftrightarrow{SETU}$. Koska pätee $V * T * U$, niin myös $\overleftrightarrow{VETU}$ ja siten $\overleftrightarrow{VSET}$. Tuo seikka yhdessä kulmien $\measuredangle VTE$ ja $\measuredangle STE$ yhtenevyyden ja (H11):n yksikäsitteisyysosan kanssa antaa, että $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TS}$.

Piste V sisältyy suoraan $\overleftrightarrow{TU}$ ja siten lauseen 2.3.1 kohdan (b) nojalla kaikki puolisuoran $\overrightarrow{TV}$ pisteet sisältyvät suoraan $\overleftrightarrow{TU}$. Siis myös piste $S \in \overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TV}$. Siten pisteet T, U ja S ovat kaikki samalla suoralla $\overleftrightarrow{TU}$. Koska pätee $\overleftrightarrow{SETU}$, niin $S*T*U$. Nyt voidaan päättää todistus suunnitellusti. Koska $A * R * C$, $S * T * U$, $AR \cong ST$

ja $RC \cong TU$, niin (H10):n nojalla $AC \cong SU$, jolloin kulma-sivu-kulma -säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle SEU$. Erityisesti $\measuredangle ABC \cong \measuredangle SEU$. Koska $S \in \overrightarrow{ED} \setminus \{E\}$ ja $U \in \overrightarrow{EF} \setminus \{F\}$, niin $\overrightarrow{ES} = \overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EU} = \overrightarrow{EF}$. Siten $\measuredangle SEU = \measuredangle DEF$, ja lopulta saamme $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$. $\square$

Seuraava tulos on lauseen 2.4.2 vastine kulmille.

LAUSE 2.4.11. *Olkoot puolisuoria $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EQ}$, $\overrightarrow{EF}$ koskevat oletukset kuten lauseessa 2.4.10. Oletetaan lisäksi, että $\measuredangle ABP \cong \measuredangle DEQ$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$. Tällöin $\measuredangle PBC \cong \measuredangle QEF$.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. $\square$

Kuten janoja voidaan myös kulmia vertailla:

Määritelmä 2.16. Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kulmia. Sanomme, että kulma $\measuredangle ABC$ *on pienempi kuin kulma* $\measuredangle DEF$ ja merkitsemme $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$, jos puolisuorien $\overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EF}$ välissä on puolisuora $\overrightarrow{EG}$ siten, että $\measuredangle ABC \cong \measuredangle GEF$.

Lauseen 2.4.4 vastine kulmille on myös voimassa:

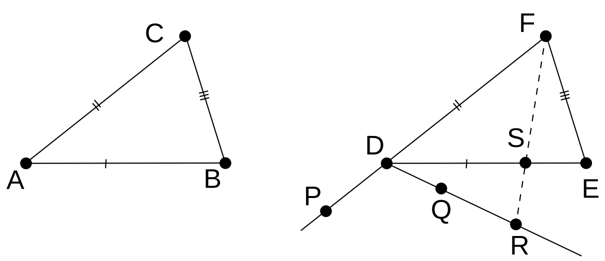
LAUSE 2.4.12. *Olkoot $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ kulmia. Tällöin*

(i) *Jos $\measuredangle A < \measuredangle B$ ja $\measuredangle B \cong \measuredangle C$, niin $\measuredangle A < \measuredangle C$.*
(ii) *Jos $\measuredangle A < \measuredangle B$ ja $\measuredangle B < \measuredangle C$, niin $\measuredangle A < \measuredangle C$.*
(iii) *Tasan yksi seuraavista pätee: $\measuredangle A < \measuredangle B$, $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ tai $\measuredangle B < \measuredangle A$.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. $\square$

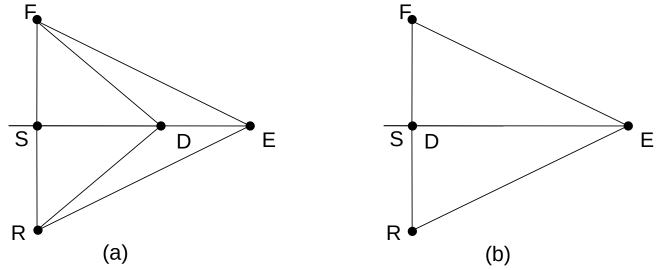
LAUSE 2.4.13 (SSS-sääntö.). *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ ja $CA \cong FD$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Todistus. Valitaan piste P siten, että $P * D * F$ ja edelleen (H11):n nojalla piste Q siten, että $PQ\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle QDE \cong \measuredangle CAB$. Olkoon edelleen (H8):n mukainen piste $R \in \overrightarrow{DQ}$ siten, että $DR \cong AC$. Nyt $P\overleftrightarrow{DE}F$, joten lauseen 2.3.2 nojalla $Q\overleftrightarrow{DE}F$. Koska $R \in \overrightarrow{DQ} \setminus \{D\}$, niin $QR\overleftrightarrow{DE}$ ja lauseen 2.3.2 nojalla myös $R\overleftrightarrow{DE}F$. Siten suora $\overleftrightarrow{DE}$ leikkaa janaa RF jossakin pisteessä S, joka toteuttaa ehdon $R * S * F$.



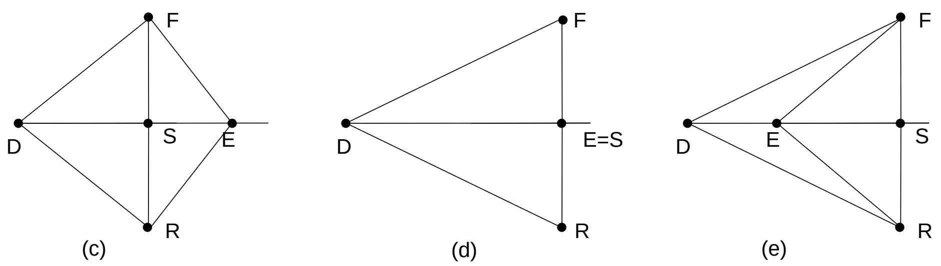
KUVA 59: SSS-SÄÄNTÖ

Nyt on vain viisi mahdollisuutta: (a) $S * D * E$, (b) $S = D$, (c) $D * S * E$, (d) $S = E$ tai (e) $D * E * S$. Kaikissa näissä tapauksissa saamme oletuksen, pisteen R valinnan ja SKS-säännön avulla, että $\triangle ABC \cong \triangle DER$. Erityisesti $BC \cong ER$, jolloin oletuksen ja (H9):n nojalla $EF \cong ER$. Toisaalta oletuksen ja R:n valinnan nojalla $DR \cong AC \cong DF$, joten (H9):n nojalla $DF \cong DR$.



Kuva 60: Tapaukset (a) ja (b)

Tapaus (a) eli $S*D*E$. Nyt $S \neq E$ ja siten $\triangle FRE$ on kolmio. Koska $EF \cong ER$, niin lauseen 2.4.1 nojalla $(*)$ $\measuredangle FRE \cong \measuredangle RFE$. Vastaavasti $S \neq D$, joten $\triangle FRD$ on kolmio, jossa $DF \cong DR$, jolloin lauseen 2.4.1 nojalla $(**)$ $\measuredangle FRD \cong \measuredangle RFD$. Koska $R * S * F$, niin $\measuredangle FRE \cong \measuredangle SRE$. Toisaalta $S * D * E$, joten lauseen 2.3.9 nojalla D on kulman $\measuredangle SRE = \measuredangle FRE$ sisäpuolella eli $\overrightarrow{RD}$ on puolisuorien $\overrightarrow{RF}$ ja $\overrightarrow{RE}$ välissä. Vastaavasti päätellään, että $\overrightarrow{FD}$ on puolisuorien $\overrightarrow{FR}$ ja $\overrightarrow{FE}$ välissä. Nyt seikkojen $(*)$ ja $(**)$ sekä lauseen 2.4.11 nojalla $\measuredangle DFE \cong \measuredangle DRE$. Koska $\triangle ABC \cong \triangle DER$, niin $\measuredangle DRE \cong \measuredangle ACB$ ja siten (H12):n mukaan $\measuredangle ACB \cong \measuredangle DFE$. Nyt oletus yhdessä SKS-säännön avulla antaa, että $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Tapaus (b) eli $S = D$: Nyt $R*D*F$, jolloin $\measuredangle DFE = \measuredangle RFE$ ja $\measuredangle DRE = \measuredangle FRE$. Kuten tapauksessa (a) nähdään, että $\measuredangle RFE \cong \measuredangle FRE$, joten $\measuredangle DFE \cong \measuredangle DRE$. Tästä väite seuraa kuten tapauksessa (a). Tapaus (c) eli $D * S * E$: Samoin kuin tapauksessa (a) saamme, että $\measuredangle FRE \cong \measuredangle RFE$ ja $\measuredangle FRD = \measuredangle RFD$, mutta nyt $\overrightarrow{RF}$ on puolisuorien $\overrightarrow{RD}$ ja $\overrightarrow{RE}$ välissä sekä $\overrightarrow{FR}$ on puolisuorien $\overrightarrow{FD}$ ja $\overrightarrow{FE}$ välissä. Tästä voimme edetä samoin kuin tapauksessa (a) paitsi että lauseen 2.4.11 sijasta käytämme lausetta 2.4.10.



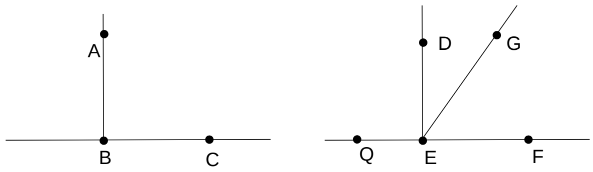
Kuva 61: Tapaukset (c), (d) ja (e)

Tapaus (d) menee kuten tapaus (b); tapaus (e) taasen samoin kuin (a). □

Eukleideen neljäs aksiooma lausui, että kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria. Tämän voimme nyt muotoilla täsmällisesti ja todistaa lauseena (vertaa myös lauseeseen 2.4.7 ja huomautukseen 16 sen jälkeen).

LAUSE 2.4.14. *Olkoot kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ suoria. Tällöin $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$.*

Todistus. Oletetaan antiteesina, että $\measuredangle ABC \ncong \measuredangle DEF$. Tällöin lauseen 2.4.12 kohdan (iii) nojalla joko $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$ tai $\measuredangle DEF < \measuredangle ABC$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla saamme olettaa, että $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$. Valitaan piste Q siten, että $Q * E * F$, jolloin $\measuredangle DEQ$ on kulman DEF täydennyskulma ja siten suoran kulman määritelmän mukaan $\measuredangle DEQ \cong \measuredangle DEF$.

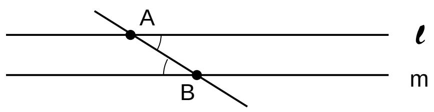


Kuva 62: Suorat kulmat ovat yhtäsuuret

Tällöin puolisuorien $\overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EF}$ välissä on puolisuora $\overrightarrow{EG}$ siten, että $\measuredangle ABC \cong \measuredangle GEF$. Oletuksen ja lauseen 2.4.7 nojalla myös $\measuredangle GEF$ on suora ja siten yhtenevä täydennyskulmansa kanssa. Nyt siis G on kulman $\measuredangle DEF$ sisäpuolella. Koska lisäksi $Q * E * F$, niin lauseen 2.3.10 kohdan (iii) nojalla D on kulman $\measuredangle GEQ$ sisäpuolella eli $\overrightarrow{ED}$ on puolisuorien $\overrightarrow{EQ}$ ja $\overrightarrow{EG}$ välissä. Täten $\measuredangle DEQ < \measuredangle GEQ$.

Tiedämme siis, että $\measuredangle GEF \cong \measuredangle ABC < \measuredangle DEF \cong \measuredangle DEQ < \measuredangle GEQ \cong \measuredangle GEF$, mistä lauseen 2.4.12 kohtien (i) ja (ii) nojalla saamme, että $\measuredangle GEF < \measuredangle GEF$. Koska toisaalta $\measuredangle GEF \cong \measuredangle GEF$, niin lauseen 2.4.12 kohta (iii) antaa ristiriidan. $\square$

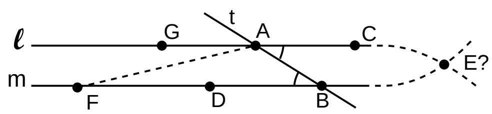
Seuraavassa kuvassa on mielenkiintoinen ongelma:



Kuva 63: "Vuorokulmaongelma"

Jos $\ell \parallel m$, niin onko $\measuredangle A \cong \measuredangle B$? Entä jos $\measuredangle A \cong \measuredangle B$, niin onko $\ell \parallel m$? Voisi luulla, että kumpikin implikaatio pätisi, ja todistammekin jälkimmäisen lauseena 2.4.15, mutta Poincarén malli (luku IV) osoittaa, että ensimmäistä ei voida todistaa pelkästään Hilbertin aksioomien (H1)–(H13) avulla. Euklidisessa geometriassa yhtäpitävyys kuitenkin pätee — katso lause 3.1.4.

LAUSE 2.4.15. (**Vuorokulmalause**) *Olkoot $\ell = \overleftrightarrow{AC}$ ja $m = \overleftrightarrow{BD}$ kaksi eri suoraa, $t = \overleftrightarrow{AB}$, CtD ja $\measuredangle CAB \cong \measuredangle DBA$. Tällöin suorat ℓ ja m ovat yhdensuuntaisia.*



Kuva 64: Riittävä yhdensuuntaisuusehto

Todistus. Oletetaan antiteesina, että $\ell \not\parallel m$. Silloin ℓ ja m leikkaavat jossakin pisteessä E. Leikkauspiste E ei voi olla suoralla $t = \overleftrightarrow{AB}$, joten joko (a) ECt tai (b) EtC.

Tapaus (a): Valitaan $F \in \overrightarrow{BD}$ siten, että $BF \cong AE$. Tällöin $\triangle AEB$ ja $\triangle BFA$ ovat kolmioita, jotka oletuksen ja SKS-säännön nojalla ovat yhteneviä. Siis erityisesti

$$(*) \qquad \measuredangle FAB \cong \measuredangle EBA.$$

Koska ECt ja CtD, niin lauseen 2.3.2 nojalla DtE. Koska D, B ja E ovat suoran m pisteitä, pätee nyt $D * B * E$. Siten $\measuredangle ABE$ on kulman $\measuredangle DBA$ täydennyskulma. Valitaan piste G siten, että $G * A * C$, jolloin $\measuredangle GAB$ on kulman $\measuredangle CAB$ täydennyskulma. Nyt oletuksen ja lauseen 2.4.5 nojalla saamme, että $\measuredangle GAB \cong \measuredangle ABE$. Tällöin seikan $(*)$ nojalla pätee

$$(**) \qquad \measuredangle GAB \cong \measuredangle FAB.$$

Koska nyt $G * A * C$, niin GtC. Toisaalta CtD, joten GDt. Koska $F \in \overrightarrow{BD}$, niin FDt ja tällöin FGt. Mutta nyt $(**)$ voi (H11):n yksikäsitteisyysosan mukaan päteä vain, jos $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AG}$. Siten $F \in \overrightarrow{AG}$, joten F on suoran ℓ piste. Toisaalta $F \in \overrightarrow{AG}$ on myös suoran m piste, joten F on suorien m ja ℓ leikkauspiste. Siten $E = F$ (muuten olisi $\ell = m$), mutta se on mahdotonta, sillä FDt ja EtD.

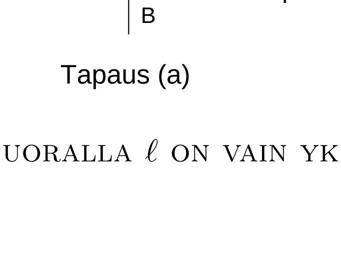
Tapaus (b) eli EtC: Oletuksen nojalla nyt EDt, joten todistus käy kuin tapauksessa (a) vaihtamalla merkintöjä $((\ell, A, C)$ vs. $(m, B, D).)$. □

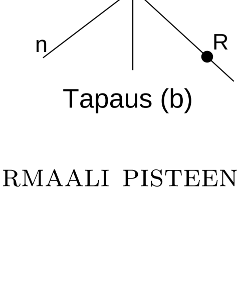
Huomautus 20. Lause 2.4.15 tekee helpohkoksi todistaa seuraavan lauseen normaalin yksikäsitteisyydestä.

LAUSE 2.4.16. *Olkoon ℓ suora ja P piste. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi suoran ℓ normaali, joka kulkee pisteen P kautta.*

Todistus. Lauseen 2.4.8 nojalla normaaleja on olemassa ainakin yksi, joten riittää osoittaa, että enempää niitä ei voi olla. Olkoot siis m ja n pisteen P kautta kulkevia suoran ℓ normaaleja. On näytettävä, että $m = n$. Oletetaan antiteesina, että $m \neq n$.

Olkoon piste A suorien ℓ ja m leikkauspiste ja B suorien ℓ ja n leikkauspiste. Nyt on vain kaksi mahdollisuutta: joko (a) $A \neq B$ tai (b) $A = B$.





Kuva 65: Suoralla ℓ on vain yksi normaali pisteen P kautta

Oletetaan aluksi (a) eli $A \neq B$. Tällöin $A \neq P \neq B$. Valitaan Q siten, että $P * A * Q$, jolloin $P\ell Q$ ja normaalin määritelmän mukaan kulmat $\measuredangle QAB$ ja $\measuredangle PBA$ ovat suoria. Lauseen 2.4.14 mukaan nyt $\measuredangle QAB \cong \measuredangle PBA$. Täten lauseen 2.4.15 oletukset toteutuvat ja niin $m \parallel n$, joten m ja n eivät leikkaa toisiaan, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että m ja n kulkevat pisteen P kautta.

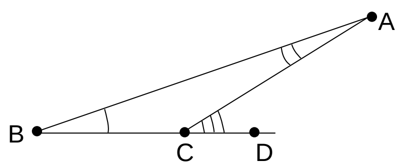
Tapaus (b) eli $A = B$: Nyt $A = B = P$. Valitaan suoran ℓ piste $Q \neq P$ ja suoran m piste $R \neq P$ sekä suoran n piste $S \neq P$ siten, että RSl. (Mieti, miksi tämä onnistuu.) Nyt kulmat $\measuredangle QPR$ ja $\measuredangle QPS$ ovat suoria ja siten lauseen 2.4.14 mukaan yhteneviä. Tämä on aksiooman (H11) yksikäsitteisyysosan nojalla mahdollista vain kun $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$, jolloin $m = \overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{PS} = n$. Ristiriita. □

LAUSE 2.4.17. *Olkoon ℓ suora sekä m ja n sen eri normaaleja. Tällöin $m \parallel n$.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Paralleeliaksiooma sanoo, että suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi tuon suoran suuntainen suora. Tätä ei voi aksioomista (H1)–(H13) todistaa. Sen sijaan saadaan heikompi tulos, joka sanoo, että tuollaisia suoria on ainakin yksi.

LAUSE 2.4.18. *Olkoon ℓ suora ja P piste, jonka kautta ℓ ei kulje. Silloin on olemassa ainakin yksi suora, joka on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa ja joka kulkee pisteen P kautta.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Seuraava lause on hyvin tärkeä. Se kertoo, että kolmion ”ulkokulma on suurempi kuin kumpikaan vastaavista sisäkulmista” eli kuvassa $\measuredangle B < \measuredangle ACD$ ja $\measuredangle A < \measuredangle ACD$, mutta ei aina $\measuredangle C < \measuredangle ACD$.



Kuva 66: Ulkokulmaepäyhtälö

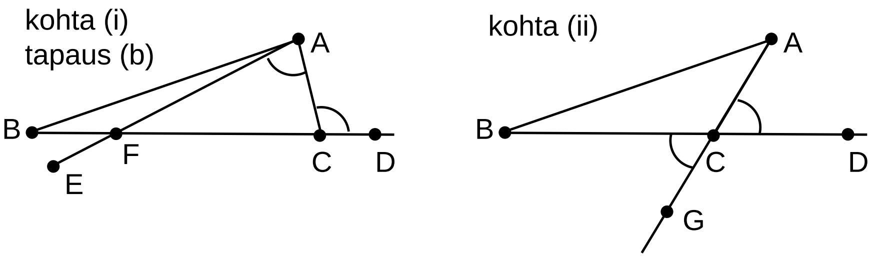
LAUSE 2.4.19 (Ulkokulmaepäyhtälö). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $B * C * D$. Tällöin*

(i) $\measuredangle A < \measuredangle ACD$,
(ii) $\measuredangle B < \measuredangle ACD$.

Todistus. Todistamme ensin kohdan (i). Antiteesi on $\measuredangle A \not< \measuredangle ACD$, jolloin lauseen 2.4.12 kohdan (iii) nojalla pätee joko (a) $\measuredangle A \cong \measuredangle ACD$ tai (b) $\measuredangle ACD < \measuredangle A$.

Olkoon ensin (a) voimassa. Koska lisäksi $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BC}$, $A \neq C$, $B\overleftrightarrow{AC}D$ ja $\measuredangle A = \measuredangle BAC$, niin lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Se on mahdotonta, koska nuo suorat leikkaavat pisteessä B.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta (b), jossa $\measuredangle ACD < \measuredangle BAC$, jolloin puolisuorien $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ välissä on puolisuora $\overrightarrow{AE}$ siten, että $\measuredangle EAC \cong \measuredangle ACD$. Lauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{AE}$ leikkaa janaa BC jossakin pisteessä F, jolloin $B * F * C$ ja $\measuredangle FAC = \measuredangle EAC$. Koska $B * C * D$, niin tällöin lauseen 2.3.4 kohdan (i) nojalla $F * C * D$, joten $F\overleftrightarrow{AC}D$. Koska lisäksi $\overleftrightarrow{AF} \neq \overleftrightarrow{CD}$, $A \neq C$ ja $\measuredangle FAC \cong \measuredangle ACD$, niin lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{AF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, mikä on mahdotonta, koska nuo suorat leikkaavat pisteessä F.



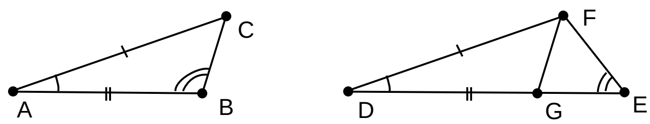
Kuva 67: Ulkokulmaepäyhtälön todistus

Todistamme kohdan (ii). Valitaan piste G siten, että $A * C * G$. Tällöin lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BCG$. Koska kohta (i) on jo todistettu, saamme soveltaa sitä kolmioon $\triangle BAC$. Silloin $\measuredangle B < \measuredangle BCG$. Väite seuraa nyt lauseen 2.4.12 kohdasta (i). $\square$

Lause 2.4.19 antaa helposti seuraavan sivu-kulma-kulma -säännön.

LAUSE 2.4.20 (SKK-sääntö). *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $AC \cong DF$, $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ ja $\measuredangle B \cong \measuredangle E$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Todistus. Riittää osoittaa, että $AB \cong DE$, jolloin väite seuraa KSK- tai SKS-säännöstä. Oletetaan antiteesina, että $AB \not\cong DE$. Nyt lauseen 2.4.4 kohdan (iii) nojalla joko $AB < CD$ tai $CD < AB$. Tarvittaessa merkintöjä muuttamalla $((A, B, C)$ vs. $(D, E, F))$ voidaan olettaa, että $AB < DE$. Tällöin on olemassa piste G siten, että $D * G * E$ ja $AB \cong DG$.



Kuva 68: SKK-säännön todistus

Nyt $\triangle DFG$ on kolmio ja SKS-säännön nojalla kolmiot $\triangle DGF$ ja $\triangle ABC$ ovat yhteneviä. Niin $(*)$ $\measuredangle DGF \cong \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$. Sovelletaan ulkokulmaepäyhtälöä 2.4.19 (ii) kolmioon $\triangle FEG$, jolloin saamme, koska $D * G * E$, että $\measuredangle E < \measuredangle DGF$ eli $(**)$ $\measuredangle DEF < \measuredangle DGF$. Lauseen 2.4.12 kohdan (iii) nojalla $(*)$ ja $(**)$ eivät voi olla yht'aikaa voimassa, joten päädyimme ristiriitaan. $\square$

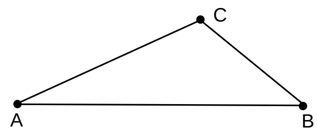
Aksioomana on siis SKS-sääntö ja lauseina olemme todistaneet KSK-, SSS- ja SKK-säännöt. Olisiko vielä muita? Koulutietojen mukaan KKK- ja SSK-säännöt eivät ainakaan näytä pätevän, ainakaan ilman lisäoletuksia.

LAUSE 2.4.21 (SKS-sääntö suorakulmaiselle kolmiolle). *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A$ ja $\measuredangle D$ ovat suoria. Olkoon lisäksi $AB \cong DE$ ja $BC \cong EF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Lauseen 2.4.19 avulla saamme myös seuraavan tärkeän tuloksen, joka sanoo, että kolmiossa suuremman kulman vastainen sivu on suurempi ja kääntäen.

LAUSE 2.4.22. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin $BC < AB$, jos ja vain jos $\measuredangle A < \measuredangle C$.*



Kuva 69: Suurempi kulma ja suurempi sivu

Todistus. Tarkastetaan ensin ehdon riittävyys; olkoon $\measuredangle A < \measuredangle C$. On osoitettava, että $BC < AB$. Oletetaan antiteesina, että $BC \not< AB$. Lauseen 2.4.4 kohdan (iii) nojalla tällöin joko (a) $BC \cong AB$ tai (b) $AB < BC$. Tapauksessa (a) saadaan heti lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle A \cong \measuredangle C$, mikä on oletuksen ja lauseen 2.4.12 kohdan (iii) nojalla mahdotonta.

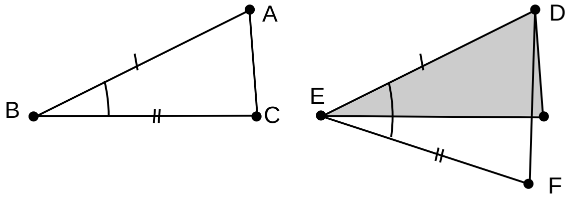
Tapaus (b) eli $AB < BC$: Tällöin on olemassa piste D siten, että $B * D * C$ ja $AB \cong BD$. Koska $B * D * C$, niin $\overrightarrow{AD}$ on puolisuorien $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{AB}$ välissä, joten $\measuredangle DAB < \measuredangle CAB$. Koska $AB \cong DB$, niin lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ADB$. Koska $C * D * B$, niin saadaan soveltaa ulkokulmaepäyhtälöä 2.4.19 (ii) kolmioon ACD, jolloin seuraa, että $\measuredangle C < \measuredangle ADB$.

Nyt siis $\measuredangle C < \measuredangle ADB \cong \measuredangle DAB < \measuredangle CAB = \measuredangle A$. Tästä seuraa lauseen 2.4.12 kohtien (i) ja (ii) sekä oletuksen $\measuredangle A < \measuredangle C$ nojalla ristiriita.

Toiseksi tarkastetaan ehdon välttämättömyys. Oletetaan, että $BC < AB$ ja osoitetaan, että $\measuredangle A < \measuredangle C$. Antiteesi on että $\measuredangle A \not< \measuredangle C$, jolloin lauseen 2.4.12 kohdan (iii) mukaan joko (a) $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ tai (b) $\measuredangle C < \measuredangle A$. Ensimmäisessä tapauksessa seuraa lauseen 2.4.9 kohdan (i) nojalla, että $AB \cong BC$, mikä on vastoin oletusta lauseen 2.4.4 kohdan (iii) mukaan. Tapauksessa (b) saadaan ehdon jo todistetun riittävyyspuolen avulla, että $AB < BC$, mikä on myös vastoin oletusta. □

Seuraava lause on jonkinlainen SKS-säännön yleistys

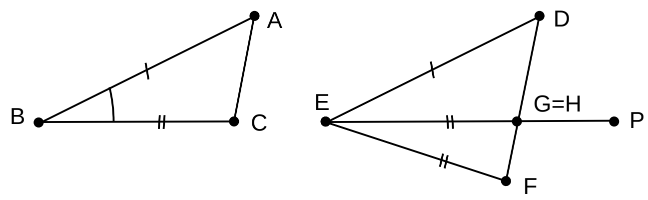
LAUSE 2.4.23. *Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kolmioita siten, että $AB \cong DE$ ja $BC \cong EF$. Tällöin $\measuredangle B < \measuredangle E$, jos ja vain jos $AC < DF$.*



Kuva 70: SKS-säännön yleistys

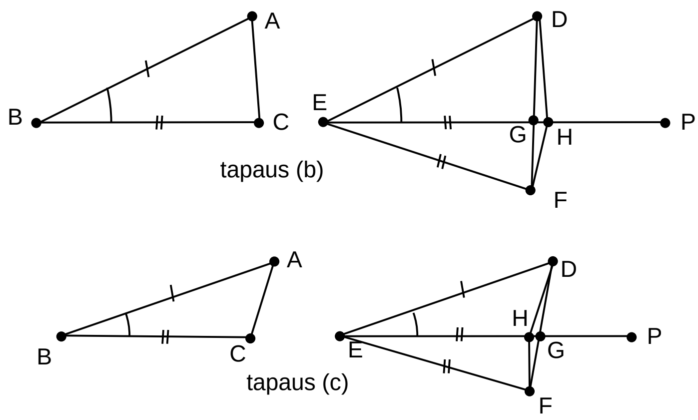
Todistus. "$\Rightarrow$". Olkoon $\measuredangle B < \measuredangle E$. Silloin puolisuorien $\overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EF}$ välissä on jokin puolisuora $\overrightarrow{EP}$ siten, että $\measuredangle B \cong \measuredangle DEP$. Lauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{EP}$ leikkaa janaa DF jossakin pisteessä G siten, että $D * G * F$. Valitaan puolisuoralta $\overrightarrow{EP}$ piste H siten, että $EH \cong BC$. Tällöin $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EH}$ ja joko (a) $G = H$, (b) $E * G * H$ tai (c) $E * H * G$.

Tapauksessa (a) $\measuredangle DEH = \measuredangle DEP \cong \measuredangle ABC$. Koska lisäksi $BC \cong EH$ ja $BA \cong ED$, niin SKS-säännön nojalla $\triangle DEH \cong \triangle ABC$. Erityisesti $DH \cong AC$ ja koska $G = H$, niin $DG \cong AC$. Koska $D * G * F$, niin määritelmän mukaan tällöin $AC < DF$.



Kuva 71: Lauseen 2.4.23 todistus, tapaus a)

Tapaus (b): Pisteen H valinnan nojalla $EH \cong BC$, joten oletuksen avulla saamme, että $EH \cong EF$ ja edelleen lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle EHF \cong \measuredangle EFH$. Koska $E * G * H$, niin $\measuredangle GFH < \measuredangle EFH$. Koska $D * G * F$, niin $\measuredangle DFH = \measuredangle GFH$.



Kuva 72: Lauseen 2.4.23 todistus, tapaukset b) ja c)

Tällöin lauseen 2.4.12 kohdan (i) mukaan $\measuredangle DFH < \measuredangle EHF$. Toisaalta $\measuredangle EHF = \measuredangle GHF$, sillä $E{*}G{*}H$. Siten $\measuredangle EHF < \measuredangle DHF$. Lauseen 2.4.14 kohdan (ii) mukaan nyt $\measuredangle DFH < \measuredangle DHF$. Tällöin lauseen 2.4.22 soveltaminen kolmioon $\triangle DFH$ antaa $DH < DF$. Kuten tapauksessa (a) saamme toisaalta $\triangle DEH \cong \triangle ABC$, joten erityisesti $DH \cong AC$. Tällöin lauseen 2.4.4 kohdan (ii) mukaan $AC < DF$.

Tapaus (c): Kuten tapauksessa (b) saadaan nytkin, että $\measuredangle EFH \cong \measuredangle EHF$ ja $DH \cong AC$. Toisaalta, koska $E * H * G$, niin lausetta 2.4.19 kolmioon $\triangle EHF$ soveltamalla saadaan, että $\measuredangle EFH < \measuredangle FHG$. Vastaavasti samaa lausetta kolmioon $\triangle FGH$ soveltamalla saamme, että $\measuredangle HFG < \measuredangle EHF$. Tällöin lauseen 2.4.12 kohdat (i) ja (ii) antavat, että $\measuredangle HFG < \measuredangle FHG$. Koska $D * G * F$, niin

$\measuredangle HFG = \measuredangle HFD$ ja toisaalta $\measuredangle FHG < \measuredangle FHD$.

Nyt lauseen 2.4.12 kohdan (ii) mukaan $\measuredangle HFD < \measuredangle FHD$. Lause 2.4.22 sovellettuna kolmioon $\triangle FHD$ antaa, että $HD < FD$. Koska $HD \cong AC$, niin $AC < DF$ lauseen 2.4.4 kohdan (i) nojalla.

"$\Leftarrow$" Olkoon $AC < DF$. Oletetaan antiteesina $\measuredangle B \not< \measuredangle E$. Silloin lauseen 2.4.12 kohdan (iii) nojalla joko (a) $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ tai (b) $\measuredangle E < \measuredangle B$. Tapauksessa (a) SKS-säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, joten erityisesti $AC \cong DF$, mikä on ristiriita lauseen 2.4.4 kohdan (iii) mukaan. Tapauksessa (b) saamme jo todistetusta "$\Rightarrow$"-osasta heti, että $DF < AC$. Ristiriita. □

2.5. Arkhimedeen aksiooma.

Kohdassa 2.6. on tarkoituksenamme määritellä käsite *janan pituus*, joka tulee olemaan janaan liittyvä positiivinen reaaliluku. Janan AB *monikerran* $n \cdot AB$ määrittelimme edellisessä luvussa 2.4. (määritelmä 1). Janan pituuden määrittelemme suurin piirtein sanoen siten, että valitsemme ensin jonkin janan OI (mittayksikköjanaksi) ja sovimme, että sen pituus on 1. Jos AB on mielivaltainen jana, arvioimme sen pituutta käyttäen janaa OI mittakeppinä "kokeilemalla", kuinka mones janan OI monikerta ensimmäiseksi peittää janan AB. Voi olla, että vaikkapa $4 \cdot OI < AB < 5 \cdot OI$, jolloin sovimme, että janan AB pituus on jokin reaaliluku väliltä $]4, 5[$. Tarkemman arvion saamme puolittamalla mittakepin OI ja arviomalla mittakepin puolikkaiden monikerroilla janaa AB alhaalta ja ylhäältä. Jos AB ei ole yhtenevä jommankumman monikerran kanssa, puolitetaan mittakepin puolikas ja toistetaan arviointi. Näin saamme janan AB pituudelle arvion tarkkuudella 2^{-n} mille hyvänsä $n \in \mathbb{N}$. Antamalla sitten $n \to \infty$ saamme reaaliluvun janan AB pituudeksi. Se voi olla irrationaalinenkin.

Tämä menettely ei välttämättä onnistu pelkkien aksioomien (H1)–(H13) avulla. Ensimmäinen ongelma tulee heti kun alamme peittää janaa AB janan OI monikerroilla. Onnistuuko se aina — tuleeko äärellisestä määrästä peräkkäin asetettuja mittakeppejä lopulta pitempi kuin mitattava jana? Eipä välttämättä tule! Siksi asetetaan jo Arkhimedeen[15] tarpeelliseksi huomaama aksiooma:

(AA) **Arkhimedeen aksiooma.** Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * D * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$.

Huomautus 22. Arkhimedeen aksiooma lausuu, että annetuille janoille on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $CD < n \cdot AB$.

Huomautus 23. Esimerkki 1 (tason $\mathbb{R}^2$ pisteet ja suorat) toteuttaa Arkhimedeen aksiooman (Totea!).

Ennenkuin määrittelemme janan pituuden Arkhimedeen aksiooman avulla on varmistauduttava, että yksikköjana voidaan yksiselitteisesti puolittaa.

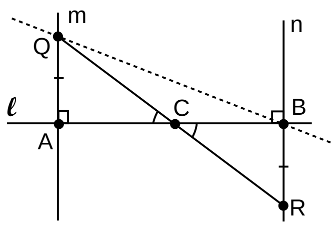
Määritelmä 2.17. Olkoon AB jana. Sanomme, että piste $C \in AB$ on *janan AB keskipiste*, jos $AC \cong CB$.

Keskipiste C siis *puolittaa* janan AB. Onko kaikilla janoilla keskipiste? Voiko niitä olla useampia? Seuraavan lauseen todistukseen ei tarvita Arkhimedeen aksioomaa.

[15] Syrakusan Arkhimedes 287–212 eaa. Kreikkalaisten asuttama Syrakusa oli Sisiliassa.

LAUSE 2.5.1. *Jokaisella janalla on yksi ja vain yksi keskipiste.*

Todistus. Olkoon AB mielivaltainen jana. Lauseen 2.4.8 nojalla suoralla $\ell = \overleftrightarrow{AB}$, $A \neq B$, on normaalit n ja m siten, että m kulkee pisteen A ja n pisteen B kautta. $m \neq n$, sillä muuten olisi $m = n = \ell$. Lauseen 2.4.17 mukaan $n \parallel m$. Olkoon $Q \neq A$ jokin suoran m piste. Valitaan suoralta n piste R siten, että $BR \cong AQ$ ja $AR\overleftrightarrow{QB}$. Tämä onnistuu, sillä $\overleftrightarrow{QB}$ leikkaa suoraa n vain pisteessä B, koska muuten olisi $\overleftrightarrow{QB} = n$ ja siten Q olisi myös suoran n piste vastoin tietoa $m \parallel n$. Edelleen $QA\overleftrightarrow{BR}$, sillä $n = \overleftrightarrow{BR}$ ja $n \parallel m$.



Kuva 73: Janan puolittaminen

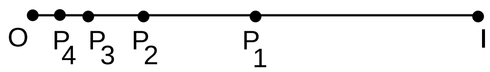
Koska $AR\overleftrightarrow{QB}$ ja $QA\overleftrightarrow{BR}$, niin R on kulman $\measuredangle AQB$ sisäpuolella, jolloin $\overrightarrow{QR}$ on puolisuorien $\overrightarrow{QA}$ ja $\overrightarrow{QB}$ välissä, mistä puomilauseen 2.3.11 nojalla seuraa, että puolisuora $\overrightarrow{QR}$ leikkaa janaa AB jossakin pisteessä C ja $A \neq C \neq B$. $Q \neq C \neq R$, sillä Q ja R eivät ole suoran ℓ pisteitä. Jos pätisi $Q * R * C$, niin $Q\overleftrightarrow{BRC}$, jolloin tiedon $AC\overleftrightarrow{BR}$ nojalla olisi $\overleftrightarrow{ABRQ}$ eli AnQ, mikä on vastoin sitä, että QAn. Näin siis $Q{*}C{*}R$ ja niin C on nimenomaan janojen QR ja AB eikä pelkästään vastaavien suorien leikkauspiste.

Lauseen 2.4.6 nojalla ristikulmat $\measuredangle ACQ$ ja $\measuredangle BCR$ ovat yhtenevät. Kulmat $\measuredangle QAC$ ja $\measuredangle CBR$ ovat normaalin määritelmän nojalla suoria ja siten lauseen 2.4.14 nojalla ne ovat yhteneviä. Lisäksi $QA \cong BR$, joten SKK-säännön eli lauseen 2.4.20 nojalla kolmiot $\triangle ACQ$ ja $\triangle BCR$ ovat yhteneviä. Siten $AC \cong CB$.

Todistetaan vielä pisteen C yksikäsitteisyys. Olkoot $C \in AB \setminus \{A, B\}$ ja $D \in AB \setminus \{A, B\}$ siten, että $AC \cong CB$ ja $AD \cong DB$. Jos olisi $AD < AC$, niin oletusten ja lauseen 2.4.4 i) -kohdan nojalla olisi $DB < CB$, jolloin lauseen 2.4.4 ii) -kohdan mukaan pätisi $AB < AB$, vastoin lauseen 2.4.4 kohtaa (iii), sillä aina $AB \cong AB$. Samoin $AC < AD$ ei käy, joten $AC \cong AD$. (H8):n yksikäsitteisyysosan mukaan $D = C$. □

Janamitan konstruktio.

Valitaan ensin jokin jana OI kiinteäksi yksikköjanaksi. Olkoon sitten AB mielivaltainen jana. Lauseen 2.5.1 mukaan janalla OI on jokin keskipiste $P_1 \in OI$. Olkoon edelleen P_2 janan OP_1 keskipiste ja yleisesti P_{n+1} janan OP_n keskipiste kaikille $n \in \mathbb{N}$.



Kuva 74: Mittajanan paloittelu

Lemma 2.5.1. *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee* $\quad 2^n \cdot OP_n = OI$.

Todistus. Induktiotodistus. Jos $n = 1$, niin janan monikerran määritelmän mukaan $2 \cdot OP_1 = OQ$ jollekin Q siten, että $O * P_1 * Q$ ja $OP_1 \cong P_1Q$. Toisaalta keskipisteen määritelmän mukaan $O * P_1 * I$ ja $OP_1 \cong P_1I$. Aksiooman (H8) yksikäsitteisyysosan nojalla tällöin $I = Q$, joten $2 \cdot OP_1 = OQ = OI$ eli väite pätee.

Tehdään induktio-oletus, että $2^k \cdot OP_k = OI$. Kuten kohdassa $n = 1$ nähdään, että $2 \cdot OP_{k+1} = OP_k$, joten

$$2^{k+1} \cdot OP_{k+1} = (2^k \cdot 2) \cdot OP_{k+1} = 2^k \cdot (2 \cdot OP_{k+1}) = 2^k \cdot OP_k = OI,$$

missä sovellettiin laskusääntöä $(mn) \cdot RS = m \cdot (n \cdot RS)$ jokaisella janalla RS ja $m, n \in \mathbb{N}$. Laskusäännön todistaminen jää harjoitustehtäväksi. Näin induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu. $\square$

Palataan janamitan konstruoimiseen. Valitaan $Q \in \overrightarrow{OI}$ siten, että $OQ \cong AB$. Tällöin Arkhimedeen aksiooman nojalla kaikille $n \in \mathbb{N}$ on olemassa jokin $k \in \mathbb{N}$ siten, että $OQ < k \cdot OP_n$. Siten luvut $k_n \in \mathbb{N}$ ja $m_n \in \mathbb{R}$,

$$k_n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid OQ < k \cdot OP_n\}, \quad m_n = k_n \cdot \frac{1}{2^n},$$

ovat olemassa ja yksikäsitteiset. Suoraan määritelmästä näemme, että $m_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten reaalilukujono (m_n) on alhaalta rajoitettu. Osoitetaan, että se on myös vähenevä, jolloin se tunnetun *reaalilukujen täydellisyysaksiooman* nojalla suppenee.

Koska $2 \cdot OP_{n+1} = OP_n$, niin $k \cdot OP_n = k \cdot (2 \cdot OP_{n+1}) = (2k) \cdot OP_{n+1}$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Erityisesti $k_n \cdot OP_n = (2 \cdot k_n) \cdot OP_{n+1}$ ja koska k_n:n määritelmän mukaan $OQ < k_n \cdot OP_n$, niin $OQ < (2k_n) \cdot OP_{n+1}$, josta edelleen k_n:n määritelmän mukaan saamme $k_{n+1} \leq 2k_n$. Tällöin

$$m_{n+1} = \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} \leq \frac{2k_n}{2^{n+1}} = \frac{k_n}{2^n} = m_n.$$

Näin jono (m_n) on vähenevä ja siten seuraavan määritelmän raja-arvo on olemassa.

Määritelmä 2.18. Janan AB *pituudeksi* sanotaan reaalilukua

$$\overline{AB} = \lim_{n \to \infty} m_n.$$

Huomautus 24. Janan pituuden määrittelyssä ei valittu mielivaltaisesti mitään muuta kuin jana OI: pisteet Q ja $P_1, P_2, \ldots$ määräytyvät yksikäsitteisesti lauseen 2.5.1 ja aksiooman (H8) nojalla. Jos jana OI valitaan toisin, saadaan yleensä eri pituus samalle janalle. Jatkossa emme vaihda yksikköjanaa OI, vaan pidämme sen *pysyvästi valittuna.*

Käytämme jatkossa myös edellisen konstruktion merkintöjä.

LAUSE 2.5.2. *Olkoon AB mielivaltainen jana. Tällöin* $\overline{AB} > 0$.

Todistus. Arkhimedeen aksiooman nojalla on olemassa $q \in \mathbb{N}$ s.e. $OI < q \cdot OQ$. Tällöin

$$2^q OP_q = OI < q\,OQ < 2^q\,OQ,$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa suoraan siitä, että $q < 2^q \quad \forall q \in \mathbb{N}$. Siten $2^q \cdot OP_q < 2^q \cdot OQ$, josta seuraa, että

$$OP_q < OQ.$$

(Tässä päättelyssä käytettiin yleisempää tulosta $k \cdot RS < k \cdot TU \implies RS < TU$, jonka todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi.) Toisaalta kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $2^n OP_{q+n} = OP_q$, minkä voi todistaa induktiolla. Siis

$$2^n OP_{q+n} < OQ \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin $k \cdot OP_{q+n} < OQ$ pätee kaikille $k = 1, 2, \dots, 2^n$ ja kaikille $n \in \mathbb{N}$. Suoraan k_n:n määritelmän nojalla saadaan nyt

$$k_{q+n} \geq 2^n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ja edelleen m_n:n määritelmän mukaan

$$m_{q+n} = \frac{k_{k+n}}{2^{q+n}} \geq \frac{2^n+1}{2^{q+n}} > \frac{2^n}{2^{q+n}} = \frac{1}{2^q} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siten $m_n > \frac{1}{2^q}$ $\forall n \geq q$, joten

$$\overline{AB} = \lim_{n\to\infty} m_n \geq \frac{1}{2^q} > 0.$$

□

LAUSE 2.5.3. $\overline{OI} = 1$.
Todistus. Nyt $Q = I$, ja siten $2^n OP_n = OQ$ $\forall n$. Tällöin

$$\begin{aligned} k \cdot OP_n &< OQ \text{ , kun } k = 1, \dots, 2^n - 1 \text{ ja} \\ k \cdot OP_n &> OQ \text{ , kun } k \geq 2^n + 1. \end{aligned}$$

Luvun k_n määritelmän mukaan tällöin $k_n = 2^n + 1$. Siten

$$m_n = \frac{k_n}{2^n} = \frac{2^n+1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^n},$$

joten

$$\overline{OI} = \lim_n m_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

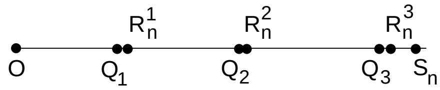
□

LAUSE 2.5.4 (Janamitan additiivisuus). *Olkoot A, B ja C pisteitä siten, että $A * B * C$. Tällöin*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Todistus. Olkoot Q_1, Q_2 ja vastaavasti Q_3 janojen AB, BC ja vast. AC mittakonstruktiossa käytettäviä pisteitä, siis $OQ_1 \cong AB$, $OQ_2 \cong BC$ ja $OQ_3 \cong AC$. Olkoot vastaavasti k_n^1, k_n^2 ja k_n^3 konstruktiossa käytettäviä lukuja. Olkoon edelleen R_n^1, R_n^2 ja $R_n^3 \in \overrightarrow{OI}$ siten, että

$$OR_n^1 \cong k_n^1 \cdot OP_n \ , \quad OR_n^2 \cong k_n^2 \cdot OP_n \quad \text{ja} \quad OR_n^3 \cong k_n^3 \cdot OP_n.$$



Kuva 75: Pituuksien summa

Valitaan vielä S_n siten, että $O * R_n^2 * S_n$ ja $R_n^2 S_n \cong OR_n^1$. Tällöin

$$OS_n \cong (k_n^1 + k_n^2)\, OP_n.$$

Tämän todistaminen jää harjoitustehtäväksi. Koska k_n:n määritelmän mukaan $OQ_1 < OR_n^1$ ja $OQ_2 < OR_n^2$, niin $OQ_3 < OS_n$, minkä voi perustella seuraavasti:

Valitaan apupisteet X ja Y s.e. $O * R_2^n * X$ ja $O * Y * R_2^n$, sekä $R_2^n X \cong OQ_1$ ja $YR_2^n \cong OQ_2$, missä erityisesti Y:n valinta on mahdollista, koska $OQ_2 < OR_n^2$. Tällöin $Y * R_n^2 * X$ ja $YR_n^2 \cong BC$ ja $R_n^2 X \cong AB$. Koska $A * B * C$, niin tällöin $YX \cong AC$; tämä seuraa aksioomasta (H10). Koska $OQ_1 < OR_1$, niin $O * X * S_n$ ja toisaalta $O * Y * X$. Tällöin $YX < OX < OS_n$ ja koska $YX \cong AC \cong OQ_3$ niin $OQ_3 < OS_n$ lauseen 2.4.4. nojalla.

Koska siis $OS_n \cong (k_n^1 + k_n^2)OP_n$ ja $OQ_3 < OS_n$, niin k_n^3:n määritelmän mukaan

$$k_n^3 \leq k_n^1 + k_n^2.$$

Toisaalta, jos valitaan T_n^1 ja $T_n^2 \in \overrightarrow{OI}$ s.e. $OT_n^1 = (k_n^1 - 1)OP_n$ ja $OT_n^2 = (k_n^2 - 1)OP_n$, niin k_n:n määritelmän nojalla $OT_n^1 \overset{\sim}{<} OQ_1$ ja $OT_n^2 \overset{\sim}{<} OQ_2$. (Tässä merkintä "$\overset{\sim}{<}$" tarkoittaa "$<$ tai $\cong$".) Jos valitaan edelleen U_n siten, että $O * T_n^2 * U_n$ ja $T_n^2 U_n \cong OT_n^1$, niin

$$\begin{aligned} &OU_n \cong \big((k_n^1 - 1) + (k_n^2 - 1)\big)OP_n \quad \text{ja} \\ &OU_n \overset{\sim}{<} OQ_3. \end{aligned}$$

(Tämän voi perustella analogisesti edellisen sivun perustelun kanssa. Totea!) Tällöin $k \cdot OP_n \overset{\sim}{<} OQ_3$ kaikille $k = 1, \ldots, (k_n^1 - 1) + (k_n^2 - 1)$, joten taas k_n^3:n määritelmän nojalla

$$k_n^3 \geq (k_n^1 - 1) + (k_n^2 - 1) + 1 = k_n^1 + k_n^2 - 1.$$

Siten

$$(*) \qquad k_n^1 + k_n^2 - 1 \leq k_n^3 \leq k_n^1 + k_n^2.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{BC} &= \lim_{n\to\infty}\frac{k_n^1}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{k_n^2}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{k_n^1}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{k_n^2}{2^n}-\overbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}^{0}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{k_n^1+k_n^2-1}{2^n}\overset{(*)}{\leq}\lim_{n\to\infty}\frac{k_n^3}{2^n}=\overline{AC}=\lim_{n\to\infty}\frac{k_n^3}{2^n}\overset{(*)}{\leq}\lim_{n\to\infty}\frac{k_n^1+k_n^2}{2^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{k_n^1}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{k_n^2}{2^n}=\overline{AB}+\overline{BC}.\end{aligned}$$

Siten $\overline{AB}+\overline{BC}\leq\overline{AC}\leq\overline{AB}+\overline{BC}$, ja väite seuraa. □

LAUSE 2.5.5. *Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin $AB\cong CD$, jos ja vain jos $\overline{AB}=\overline{CD}$.*

Todistus. 1°) Jos $AB\cong CD$, niin mittakonstruktiossa käytettävä piste Q on sama kummallekin janalle, joten k_n:t ja m_n:t ovat samoja ja siten raja-arvokin on sama.

2°) Jos janoilla on sama pituus, niin valitaan Q_1 ja Q_2 siten, että $OQ_1\cong AB$ ja $OQ_2\cong CD$. Riittää osoittaa että $Q_1=Q_2$. Tehdään antiteesi: $Q_1\neq Q_2$. Tällöin joko $O*Q_1*Q_2$ tai $O*Q_2*Q_1$. Tarvittaessa merkintöjä vaihtamalla voidaan olettaa, että $O*Q_1*Q_2$. Tällöin lauseen 2.5.4. nojalla $\overline{OQ_1}+\overline{Q_1Q_2}=\overline{OQ_2}$, jolloin lauseen 2.5.2 nojalla $\overline{OQ_1}<\overline{OQ_2}$. Toisaalta kohdan 1°) nojalla $\overline{AB}=\overline{OQ_1}$ ja $\overline{CD}=\overline{OQ_2}$, joten $\overline{AB}<\overline{CD}$, mikä on mahdotonta. □

Lauseelle 2.5.4. pätee myös käänteinen tulos:

LAUSE 2.5.6. *Olkoot A,B ja C eri pisteitä siten, että $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$. Tällöin $A*B*C$.*

Todistus. Jos ei olisi $A*B*C$, niin olisi kaksi vaihtoehtoa: a) A,B ja C ovat samalla suoralla tai sitten ne eivät ole samalla suoralla.

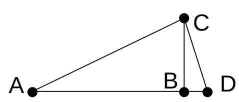
Tapaus a): Joko $A*C*B$ tai $B*A*C$. Lauseen 2.5.4. nojalla joko $\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AB}$ tai $\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{BC}$. Oletuksen nojalla tällöin joko $\overline{BC}=0$ tai $\overline{AB}=0$, mikä on mahdotonta lauseen 2.5.2 nojalla.

Tapaus b): Oletetaan, että A,B ja C eivät ole samalla suoralla. Valitaan $D\in\overrightarrow{AB}$ s.e. $AD\cong AC$, jolloin lauseen 2.5.5. nojalla $\overline{AD}=\overline{AC}$. Tässä on 3 mahdollisuutta i) $A*D*B$, ii) $D=B$ tai iii) $A*B*D$.

Tapaus i): Lauseen 2.5.4. mukaan $\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{AB}$, jolloin lauseen 2.5.2 nojalla $\overline{AD}<\overline{AB}$. Tällöin $\overline{AC}<\overline{AB}$ ja oletuksesta saadaan $\overline{AB}+\overline{BC}<\overline{AB}$, josta edelleen $\overline{BC}<0$, mikä on vastoin lausetta 2.5.2.

Tapaus ii): Tässä $\overline{AD}=\overline{AB}$, joten $\overline{AC}=\overline{AB}$, ja siis $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AB}$ ja on oltava $\overline{BC}=0$ vastoin lausetta 2.5.2.

Tapaus iii): Olkoon siis $A*B*D$.



KUVA 76: TAPAUS iii)

Koska A, B ja C eivät ole samalla suoralla, niin $\triangle ACD$ on kolmio. Pappuksen lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle ACD \cong \measuredangle ADC$ ja lauseen 2.5.4 nojalla $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$. Toisaalta $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AD}$, joten on oltava $\overline{BD} = \overline{BC}$. Tällöin lauseen 2.5.5. mukaan $BC \cong BD$.

Myös $\triangle BCD$ on kolmio ja lauseen 2.4.9.b) -kohdan nojalla $\measuredangle BDC \cong \measuredangle BCD$. Koska $A * B * D$, niin $AB\overleftrightarrow{CD}$ ja aksiooman (H11) yksikäsitteisyyspuolen nojalla $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, joten A, B ja C ovat samalla suoralla vastoin oletusta. □

LAUSE 2.5.7. *Olkoon AB jana ja $k \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\overline{k \cdot AB} = k \cdot \overline{AB}.$$

Todistus. Induktio k:n suhteen: Asia on selvä, jos $k = 1$. Oletetaan, että väite on tosi k:lle ja todistetaan se $k + 1$:lle. Olkoon sitä varten $C \in \overrightarrow{AB}$ s.e. $AC = k \cdot AB$ ja D s.e. $A * C * D$ ja $CD \cong AB$, jolloin monikerran määritelmän mukaan $AD = (k + 1)AB$, lauseen 2.5.4 nojalla $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$ ja lauseen 2.5.5. nojalla $\overline{CD} = \overline{AB}$. Induktio-oletuksen avulla saadaan

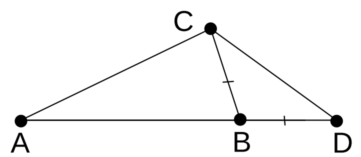
$$\overline{(k+1) \cdot AB} = \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{k \cdot AB} + \overline{AB} = k \cdot \overline{AB} + \overline{AB} = (k+1)\overline{AB}.$$

□

LAUSE 2.5.8. (Kolmioepäyhtälö). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin*

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Todistus. Valitaan piste D siten, että $A * B * D$ ja $BC \cong BD$.



Kuva 77: Kolmioepäyhtälön todistus

Lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle BCD \cong \measuredangle BDC$. Lauseen 2.5.4 nojalla $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$ ja lauseen 2.5.5. nojalla $\overline{BD} = \overline{BC}$, joten $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Koska $A * B * D$, niin $\overrightarrow{CB}$ on kulman $\measuredangle ACD$ sisällä, joten $\measuredangle BCD < \measuredangle ACD$. Tällöin transitiivisuuslauseen 2.4.12 nojalla $\measuredangle BDC < \measuredangle ACD$ ja saadaan, että $\measuredangle ADC < \measuredangle ACD$. Nyt lause 2.4.22. sovellettuna kolmioon $\triangle ACD$ antaa $AC < AD$. Tähän käytetään lausetta 2.5.9, jota tosin ei vielä ole todistettu, mutta joka tulee seuraavaksi, ja jonka todistamiseen **ei käytetä todistettavana olevaa lausetta 2.5.8.** Tulokseksi saadaan $\overline{AC} < \overline{AD}$. Siten $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. □

LAUSE 2.5.9. *Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin $AB < CD$, jos ja vain jos $\overline{AB} < \overline{CD}$.*

Todistus. 1°) Jos $AB < CD$, niin voidaan valita E s.e. $C * E * D$ ja $CE \cong AB$. Tällöin lauseen 2.5.5. nojalla $\overline{CE} = \overline{AB}$ ja lauseen 2.5.4. nojalla $\overline{CE} + \overline{ED} = \overline{CD}$. Lauseen 2.5.2 nojalla saadaan silloin $\overline{AB} = \overline{CE} < \overline{CE} + \overline{ED} = \overline{CD}$.

2°) Oletetaan $\overline{AB} < \overline{CD}$ ja tehdään antiteesi, että ei päde $AB < CD$. Tällöin lauseen 2.4.12 nojalla joko a) $CD < AB$ tai b) $CD \cong AB$. Tapauksessa a) saadaan kohdan 1° nojalla $\overline{CD} < \overline{AB}$ ja tapauksessa b) lauseen 2.5.5. nojalla $\overline{CD} = \overline{AB}$; kumpikin vastoin oletusta. □

Seuraava lause kertoo, että lauseiden 2.5.3, 2.5.5, 2.5.7 ja 2.5.9 antamat janamitan ominaisuudet karakterisoivat sen täysin, toisin sanoen jos jollakin janamitalla on nämä ominaisuudet, sen täytyy olla juuri edelläkonstruoitu mitta:

LAUSE 2.5.10. *Oletetaan, että $\overline{\overline{AB}}$ on janamitta (eli kuvaus janojen joukolta positiivilukujen joukolle), jolla on ominaisuudet:*

a) $\overline{\overline{OI}} = 1$
b) *jos* $AB \cong CD$, *niin* $\overline{\overline{AB}} = \overline{\overline{CD}}$
c) $\overline{\overline{k \cdot AB}} = k \cdot \overline{\overline{AB}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$
d) *jos* $AB < CD$, *niin* $\overline{\overline{AB}} < \overline{\overline{CD}}$.

Tällöin välttämättä $\overline{\overline{AB}} = \overline{AB}$.

Todistus. Olkoot pisteet Q ja P_n sekä luvut k_n kuten janamitan $\overline{AB}$ konstruktiossa. Koska kaikilla n pätee $2^n \cdot OP_n = OI$, niin ehtojen c) ja a) nojalla

$$2^n\, \overline{\overline{OP_n}} = \overline{\overline{2^n\, OP_n}} = \overline{\overline{OI}} = 1,$$

joten $\overline{\overline{OP_n}} = \frac{1}{2^n}$. Tällöin ehdon c) nojalla pätee kaikilla k

$$\overline{\overline{k \cdot OP_n}} = k \cdot \overline{\overline{OP_n}} = \frac{k}{2^n}.$$

Lukujen k_n valinnan nojalla

$$OQ < k_n \cdot OP_n$$

joten ehdon b) mukaan

$$\overline{\overline{OQ}} < \overline{\overline{k_n \cdot OP_n}} = \frac{k_n}{2^n}.$$

Toisaalta $(k_n - 1)OP_n \overset{\sim}{<} OQ$, joten ehtojen b) ja d) nojalla $\overline{\overline{OQ}} < \overline{\overline{k_n \cdot OP_n}} = \frac{k_n - 1}{2^n}$. Siten

$$\frac{k_n}{2^n} - \frac{1}{2^n} \leq \overline{\overline{OQ}} \leq \frac{k_n}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Antamalla tässä $n \to \infty$ saadaan $\overline{AB} \leq \overline{\overline{OQ}} \leq \overline{AB}$ ja väite seuraa. □