Lassi Kurittu, Veli-Matti Hokkanen ja Lauri Kahanpää[1]

GEOMETRIA

Sisällys

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

I Historiaa

Sana *geometria* on peräisin kreikasta, *geo* = maa, *metrein* = mitata. Yksi ensimmäisistä geometrisista ongelmista oli ympyrän kehän pituuden ($2\pi r$) määrittäminen, siis π:n likiarvon arviointi. Babylonialaiset käyttivät kaavaa ”kehä = $3\times$ halkaisija” eli $\pi \approx 3$. Myös muinaiset juutalaiset käyttivät samaa π:n arvoa; se mainitaan jopa Raamatussa (1. Kuningasten kirja 7:28), millä perusteella Rabbi Nehemiahin myöhempi π:n likiarvo $\frac{22}{7} \approx 3.14159$ hylättiin. Muinaiset egyptiäiset käyttivät π:lle arviota $(\frac{16}{9})^2 \approx 3.1604$. Matematiikan kannalta näissä eri likiarvoissa ei ole oleellista arvion tarkkuus vaan se oivallus, että kaiken kokoisissa ympyröissä kehän ja halkaisijan suhde on täsmälleen sama. (Vasta vuonna 1768 Lambert[2] osoitti, että π ei ole rationaaliluku, ja 1882 Lindemann[3] osoitti sen olevan transkendenttiluku.)

Egyptiläisten geometria ei ollut varsinaista matematiikkaa, vaan pikemminkin kokoelma perustelemattomia kaavoja ja laskulakeja. Joskus he arvasivat oikein: he osasivat esimerkiksi laskea puolisuunnikkaan alan ja jopa katkaistun pyramidin tilavuuden aivan oikein. Suoran kulman egyptiläiset virittivät maastoon pingottamalla kolmioksi narulenkin, johon oli merkitty kolmen, neljän ja viiden yksikön pituiset sivut. Kaksoisvirran maan asukkaat olivat egyptiläisiä aikalaisiaan etevämpiä laskijota, mikä osittain johtui heidän käyttämästään erinomaisesta numerojärjestelmästä. Babylonialaiset tunsivat paremmin matematiikkaa, jopa *Pythagoraan teoreeman* ($c^2 = a^2 + b^2$) yleisessä muodossa. Kuitenkin vasta kreikkalaiset astuivat ratkaisevan askelen kohti nykyaikaista matematiikkaa vaatiessaan, että laskulait on jotenkin yleispätevästi **todistettava** sen sijaan, että edettäisiin yrityksen ja erehdyksen tietä. Ensimmäinen tuntemamme tämän perinteen matemaatikko oli myös kreikkalaisen filosofian perustajana pidetty Thales[4], josta tuli kuuluisa ennustettuaan oikein auringonpimennyksen ajankohdan 585 e.a.a. Parin seuraavan vuosisadan johtavia matemaatikkoja oli Pythagoras[5] oppilaineen. Hän oli lähinnä uskonnollinen profeetta, jolle luvun $\sqrt{2}$ osoittautuminen irrationaaliseksi oli suuri järkytys (tätä vaarallista tulosta yritettiin aluksi jopa salata). Pythagoralaisen koulukunnan tuottama systemaattinen tasogeometrian esitys julkaistiin n. 400 e.a.a.

Neljäs vuosisata e.a.a. oli Platonin[6] aikaa. Hän korosti epäsuoran todistuksen merkitystä; itse asiassa Sokrateen dialogit ovat epäsuoraa todistamista: osoitetaan väite oikeaksi lähtemällä liikkeelle päinvastaisesta väitteestä ja päätymällä siitä mahdottomiin tai kelvottomiin johtopäätöksiin. Geometrian kannalta tärkein Platonin oppilas oli *Eukleides*[7], joka noin 300 e.a.a. julkaisi mahtavan 13-osaisen teoksen *Stoikheia* (Alkeet), jossa hän käsitteli kreikkalaista geometriaa ja lukuteoriaa. Eukleideen *aksiomaattinen esitystapa* on nykyaikaisen matematiikan prototyyppi: siinä ei väitteitä perustella millään mittauksilla tai piirroksilla, vaan ne *todistetaan* oikeiksi loogisella päättelyllä tietyistä perusolettamuksista lähtien. Eukleides perusti geometriansa viiteen perusolettamukseen eli *aksioomaan*. Esitämme

---

[2] Johann Heinrich Lambert 1728–1777. Saksa.

[3] Carl Louis Ferdinand von Lindemann 1852–1939. Saksa.

[4] Mileton Thales n.640-546 eaa. Kreikka.

[5] Samoksen Pythagoras n. 569–n. 475 eaa. Kreikka.

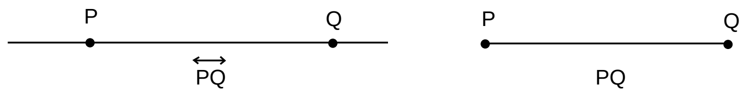
[6] Platon n. 427–347 eaa. Kreikka.

[7] Eukleides Aleksandrialainen n. 325–265 eaa. Egypti.

seuraavaksi niistä neljä ensimmäistä sellaisinaan ja viidennen hieman muutetussa muodossa, (EA1)-(EA4), (PA).

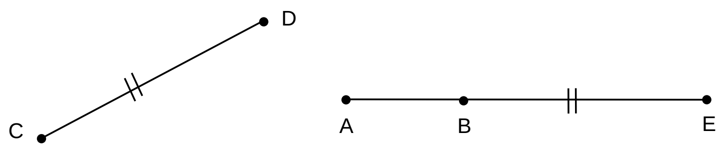
(EA1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin niiden kautta kulkee yksi ja vain yksi suora.

Merkitään pisteiden P ja Q kautta kulkevaa suoraa symbolilla $\overleftrightarrow{PQ}$: tuollaisen suoran olemassaolon ja yksikäsitteisyyden takaa (EA1). Määritellään *jana* PQ niiden suoran $\overleftrightarrow{PQ}$ pisteiden joukkona, jotka ovat pisteiden P ja Q välissä pisteet P ja Q mukaan lukien.



Kuva 1: Suora ja jana

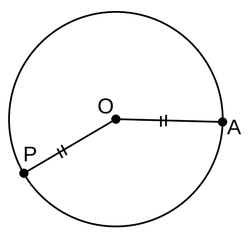
(EA2) Jos AB ja CD ovat kaksi janaa, niin on olemassa yksi ja vain yksi piste E siten, että BE ja CD ovat saman pituisia ja B on janalla AE.



Kuva 2: Janan jatkaminen

Havainnollisesti (EA2) sanoo, että janaa AB voidaan jatkaa janan CD pituisella janalla.

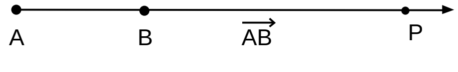
Olkoot O ja P kaksi eri pistettä. Kaikkien niiden pisteiden P joukkoa, joille OP ja OA ovat saman pituisia, sanotaan *ympyräksi*, jonka *keskipiste* on O ja *säde* on janan OA pituus.



Kuva 3: Ympyrä

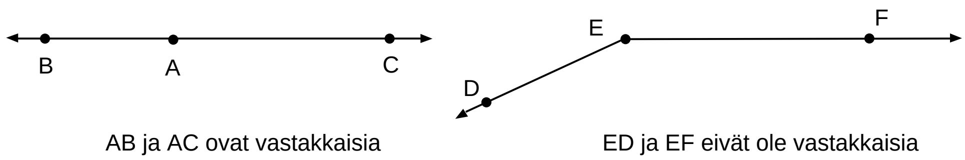
(EA3) Jos O ja A ovat eri pisteitä, niin on olemassa ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde on janan OA pituus.

Muita Eukleideen aksioomia varten tarvitaan lisää määritelmiä. *Puolisuora* $\overrightarrow{AB}$ $(A \neq B)$ on niiden suoran $\overleftrightarrow{AB}$ pisteiden P joukko, jotka kuuluvat janaan AB tai joille B on pisteiden A ja P välissä.



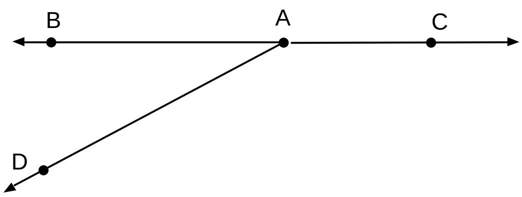
Kuva 4: Puolisuora

Puolisuoria $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ sanotaan *vastakkaisiksi*, jos ne eivät ole samoja ja $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$.



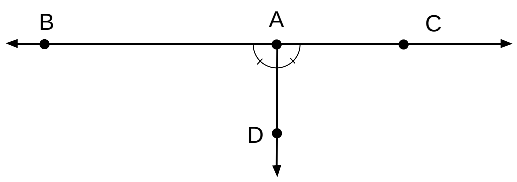
Kuva 5: Vastakkaiset puolisuorat

Seuraavaksi määrittelemme kulman: *Kulma* $\measuredangle BAC$ koostuu kahdesta puolisuorasta $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$, jotka eivät ole samoja eivätkä vastakkaisia. Kulmaa $\measuredangle BAC$ merkitään myös $\measuredangle CAB$ tai lyhyesti $\measuredangle A$. Pistettä A sanotaan kulman $\measuredangle A$ *kärjeksi* ja puolisuoria $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ sen *kyljiksi*. Jos kahdella kulmalla $\measuredangle BAD$ ja $\measuredangle CAD$ on yhteinen kylki $\overrightarrow{AD}$ ja puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ ovat vastakkaisia, niin sanotaan, että $\measuredangle BAD$ ja $\measuredangle CAD$ ovat toistensa *täydennyskulmia*:



Kuva 6: Täydennyskulmat

Kulmaa $\measuredangle BAD$ sanotaan *suoraksi kulmaksi*, jos sillä on täydennyskulma $\measuredangle CAD$, joka on yhtä suuri kuin se itse:

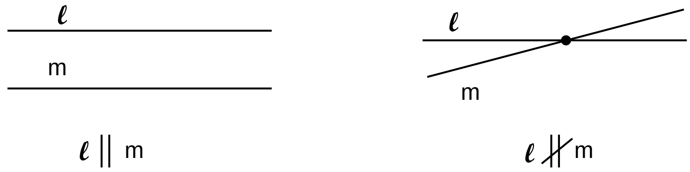


Kuva 7: Suora kulma

Huomaa, että suoran kulman täydennyskulma on sekin suora kulma.

(EA4) Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria.

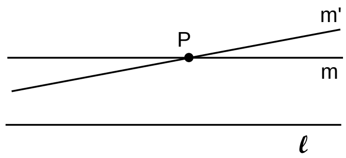
Matemaatikot hyväksyivät kahden vuosituhannen ajan nämä neljä Eukleideen aksioomaa (EA1)-(EA4) välttämättöminä tosiasioina, joita ei voi eikä tarvitse todistaa oikeiksi muiden aksioomien ja loogisten päättelysääntöjen avulla. Sen sijaan viidennestä Eukleideen aksioomasta keskusteltiin vilkkaasti aina 1800-luvulle asti. Emme vielä esitä sitä Eukleideen alkeiden käyttämässä sanamuodossa, koska silloin tarvitsisimme runsaasti lisää määritelmiä, vaan esitämme sen kanssa yhtäpitävän *paralleeliaksiooman* (yhtäpitävyyden todistamme myöhemmin). Eukleides ei itse mainitse paralleeliaksioomaa, vaan sen esitti ensimmäisenä vasta Proclus[8]. Sanomme, että suorat ℓ ja m ovat *yhdensuuntaisia*, jos ne eivät leikkaa toisiaan eli niillä ei ole yhteisiä pisteitä. Merkitsemme silloin $\ell \parallel m$, muulloin $\ell \nparallel m$.



Kuva 8: Yhdensuuntaisuus

Huomaa, että tämän määritelmän mukaan suora ei ole yhdensuuntainen itsensä kanssa. Tämä oudolta tuntuva seikka voitaisiin korjata muuttamalla hieman yhdensuuntaisuuden määritelmää, mutta osoittautuu, että se monimutkaistaisi joitakin muita asioita. Siksi pidämme kiinni tästä historiallisesta määritelmästä.

(PA) *Paralleeliaksiooma.* Olkoon ℓ suora ja P piste, joka ei ole suoralla ℓ. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi suora m, joka kulkee pisteen P kautta ja joka on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa.



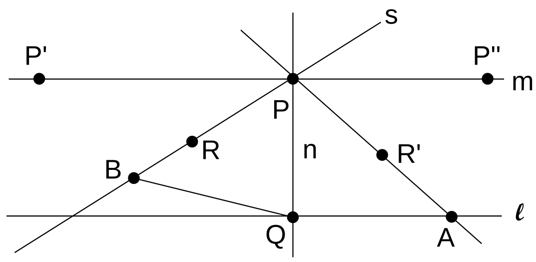
Kuva 9: Paralleeliaksiooma

Paralleeliaksiooma siis takaa, että pisteen P kautta kulkee suora m siten, että $m \parallel \ell$ ja ennen kaikkea myös sen, että toista tällaista suoraa ei ole. Kuvan tilanteessa on siis välttämättä $m' \nparallel \ell$. Paralleeliaksiooma tuntuu luonnolliselta, mutta se ei ole aivan samassa mielessä ilmeinen kuin muut Eukleideen aksioomat: (EA1)-(EA3) voidaan intuitiivisesti nähdä oikeiksi vaikkapa harpilla ja viivottimella; (EA4) on ilmeinen, jos hyväksytään kulman mittaaminen vaikkapa astelevyllä. Paralleeliaksiooma on toista maata: toki voidaan piirtää suora, joka näyttää yhdensuuntaiselta suoran ℓ kanssa, mutta miten todistetaan, että se todella on sellainen? Määritelmän mukaan olisi nähtävä, että ℓ ja m eivät leikkaa toisiaan lainkaan, mutta sitä voidaan tutkia vain paperin laitaan asti. Ehkä ne leikkaavat jossakin kauempana. Toinen ongelma on suoran m yksikäsitteisyys: entäpä, jos kuvan 9 ℓ ja m' eivät sittenkään leikkaa toisiaan, kunhan niiden välinen kulma vain on tarpeeksi pieni. Nämä seikat lienevät olleet syynä siihen, että monet merkittävät matemaatikot asettivat paralleeliaksiooman kyseenalaiseksi: uskottiin, että se pitäisi — ja voitaisiin — todistaa oikeaksi muiden neljän Eukleideen aksiooman avulla. Monia todistusyrityksiä tehtiin. Käymme läpi niistä yhden, jonka on 1700-luvun lopulla esittänyt Adrien-Marie Legendre[9].

Olkoon piste P suoran ℓ ulkopuolella. Piirretään P:n kautta suoralle ℓ normaali, jonka nimi on n ja joka leikkaa suoran ℓ pisteessä Q. Piirretään edelleen n:lle P:n

[8] Proclus Diadochus 411–485. Kreikka
[9] Adrien-Marie Legendre 1752–1833. Ranska.

kautta normali m. Tällöin m ja ℓ ovat yhdensuuntaisia, koska niillä on yhteinen normaali n. On vielä todistettava m:n yksikäsitteisyys.



Kuva 10: Paralleelliaksiooman todistusko?

Olkoon siis s suora, joka kulkee P:n kautta mutta ei ole m. On siis osoitettava, että $s \not\parallel \ell$ eli että s ja ℓ leikkaavat toisensa. Valitaan pisteet P' ja P'' suoralta m siten, että P on niiden välissä. Valitaan vielä piste R suoralta s siten, että se on joko kulman $\measuredangle P'PQ$ tai $\measuredangle P''PQ$ sisällä (kuvassamme siis R valitaan suoran m alapuolelta). Valitaan lopuksi piste R' siten, että R ja R' ovat eri puolilla suoraa n ja lisäksi kulmat $\measuredangle QPR$ ja $\measuredangle R'PQ$ ovat yhtäsuuria, jolloin piste Q on kulman $\measuredangle RPR'$ sisällä. Toisaalta Q kuuluu suoralle ℓ, joten ℓ on osittain kulman $\measuredangle RPR'$ sisällä ja leikkaa siis ainakin toisen kulman $\measuredangle RPR'$ kyljistä $\overrightarrow{PR}$ tai $\overrightarrow{PR'}$.

Jos ℓ leikkaa kyljen $\overrightarrow{PR}$, niin se leikkaa myös suoran s, sillä $s = \overleftrightarrow{PR}$ (EA1):n nojalla, ja asia on tällöin selvä. Voimme siten olettaa, että ℓ leikkaa kyljen $\overrightarrow{PR'}$ jossakin pisteessä A. Valitaan puolisuoralta $\overrightarrow{PR}$ piste B siten, että janat PA ja PB ovat yhtä pitkiä. Osoitetaan nyt, että B kuuluu suoralle ℓ, mistä väite seuraa jälleen (EA1):n nojalla kuten yllä. Tarkastellaan kolmioita $\triangle PBQ$ ja $\triangle PAQ$. Niillä on yhteinen sivu PQ ja sivut PA ja PB ovat yhtä pitkiä. Lisäksi näiden sivujen väliset kulmat $\measuredangle BPQ$ ja $\measuredangle APQ$ ovat yhtä suuria. Silloin kolmioiden muutkin vastinsivut ja -kulmat ovat yhtäsuuria ("sivu-kulma-sivu -sääntö"). Erityisesti tällöin kulmat $\measuredangle BQP$ ja $\measuredangle AQP$ ovat yhtä suuria. Koska n on ℓ:n normaali, niin kulma $\measuredangle AQP$ on suora. Tällöin myös $\measuredangle BQP$ on suora. (Huomaa, että tämä ei suoraan seuraa (EA4):stä). Koska nyt $\measuredangle AQP$ ja $\measuredangle BQP$ ovat molemmat suoria, niin puolisuorat $\overrightarrow{QP}$ ja $\overrightarrow{QA}$ ovat vastakkaisia, joten $\overleftrightarrow{QB} = \overleftrightarrow{QA}$. Koska A kuuluu suoralle ℓ, niin $\overleftrightarrow{QA} = \ell$ ja siten $\overleftrightarrow{QB} = \ell$ ja erityisesti piste B kuuluu suoralle ℓ. M.O.T.

Mikä vikaa tässä todistuksessa on? Siinä on joukko määrittelemättömiä käsitteitä: "normaali", "kulman sisällä", "eri puolilla suoraa"; toki ne voidaan määritellä täsmällisesti. Perustelematta jäi:

(1) Onko suoralla aina normaali, joka kulkee annetun pisteen kautta?
(2) Ovatko suorat yhdensuuntaisia, jos niillä on yhteinen normaali?
(3) Voidaanko P' ja P'' valita aina yllä mainitulla tavalla?
(4) Voidaanko R valita aina yllä mainitulla tavalla?
(5) Voidaanko R' valita aina yllä mainitulla tavalla?
(6) Leikkaako ℓ välttämättä ainakin toista $\measuredangle RPR'$:n kyljistä?
(7) Voidaanko B aina valita yllä mainitulla tavalla?
(8) Päteekö aina sivu-kulma-sivu -sääntö?

(9) Onko $\measuredangle BQP$ välttämättä suora?

(10) Ovatko $\overrightarrow{QB}$ ja $\overrightarrow{QA}$ välttämättä vastakkaisia?

Kehitämme geometrista käsitteistöä niin, että voimme vastata näihin kysymyksiin ja siten tarkastaa, onko Legendre'in todistus pätevä. Osoittautuu, että yhdeksään kysymykseen voidaan vastata myöntävästi, yhteen ei. Se yksi kaataa koko todistuksen. Parhaiden salapoliisitarinoiden perinteiden mukaisesti murhaaja paljastuu vasta lopussa — syyttömiä löytyy pikkuhiljaa tarinan edetessä.

Kommentteja Eukleideen aksioomista.

(EA1) Mikä on piste, suora, jana? Mitä tarkoittaa, että suora kulkee jonkin pisteen kautta tai että yksi piste on kahden muun välissä?

(EA2) Mitä tarkoittaa, että janat ovat saman pituisia?

(EA4) Mitä tarkoittaa kulmien yhtäsuuruus? Mikä on suora kulma?

Nämä asiat kaipaavat lähempää tarkastelua. Todistaessaan teoreemojaan (joita yhteensä on 465 kpl.) Eukleides harhautui toisinaan kuvien johdattelemana pitämään joitakin asioita itsestäänselvinä huomaamatta sitä itse. Kuviohan on usein oikein hyvä apu todistuksen keksimiselle, mutta todistuksessa siihen vetoaminen ei ole matemaattisesti oikea tapa, ja piirretty kuva on sitä paitsi toisinaan harhaanjohtava, sillä se ei aina kata kaikkia mahdollisia tapauksia. Itse asiassa Eukleideen lauseet eivät tarkkaan ottaen seuraa hänen aksioomistaan, vaan Eukleides pitää itsestäänselvinä eräitä muitakin asioita nimeämättä niitä erikseen. Jotta nykyaikaisessa mielessä tiukan matemaattiset todistukset voitaisiin tehdä, täytyy Eukleideen sinänsä tervettä aksioomajärjestelmää laajentaa ja tarkentaa. Parannusesityksiä on lukuisia; seuraavassa tutustumme *Hilbertin aksioomajärjestelmään.* Hilbert[10] esitti aksioomansa laajassa teoksessaan *Grundlagen der Geometrie* vuonna 1902.

[10] DAVID HILBERT 1861–1943. Saksa

II Hilbertin aksioomajärjestelmä

2.1. Aksiomaattisesta menetelmästä.

Mikä on matemaattinen todistus? Kuinka todistetaan, että jokin lause T on tosi? Sovimme, että *T on todistettu oikeaksi*, jos on löydetty yksi tai useampi lause T', jotka tiedetään todeksi, ja jos näistä lauseista T' yhdessä seuraa lause T äärellisellä määrällä loogisia päättelyjä. Kuten matemaatikot yleensäkin (joskaan eivät aina) tyydymme tässä kirjassa intuitioomme siitä, mitkä ovat loogisia päättelyjä eli oikeiden päättelysääntöjen oikein soveltamista. Jotta tosiksi tiedettyjen lauseiden joukko olisi muutakin kuin kokoelma tautologioita (esim. "sataa tai ei sada") seurauksineen, on oletettava joitakin lauseita tosiksi. Niitä sanotaan *aksioomiksi* eli *selviöiksi*. Eukleideelle selviöt olivat itsestäänselvästi tosia, niitä ei tarvinnut perustella. Niiden koettiin myös kuvaavan "todellisuutta". Nyttemmin selviöt eivät olekaan aina itsestäänselviä, vaan saattavat abstraktisuudessaan vaikuttaa intuitiostamme ja kokemuksestamme irrallisilta tai jopa niiden vastaisilta. Hyperbolisen geometrian paralleeliaksiooma on sellainen ("suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee ainakin kaksi sen kanssa yhdensuuntaista suoraa"). Aksioomien pitäminen tosina on myös yhä useammin vain metodologista: halutaan rakentaa teoria, joka perustuu joillekin aksioomille, minkä *jälkeen* sitten arvioidaan valittujen aksioomien hyväksyttävyyttä, hedelmällisyyttä tai totuutta rakennetun teorian perusteella. Jonkin fysiikan teorian muodostaminen ja testaaminen on yksi esimerkki tällaisesta ajattelutavasta: jos jokin seurauslause on vastoin havaintoja, on syytä epäillä ainakin jonkin aksiooman olevan havainnoitavassa maailmassa epätoden. Ajatus aksioomien metodologisesta totuudesta vie vielä pidemmälle: aksioomilla ei tarvitse olla totuusarvoa (tosi, epätosi) lainkaan, on vain joukko lauseita, joista tiettyjen päättelysääntöjen avulla johdetaan toisia lauseita. Jos moraalikäsityksiä esitetään aksiomaattisesti, ollaan tällaisessa tilanteessa, sillä vallitsevan käsityksen mukaan moraaliarvostelmilla ei ole totuusarvoa.

Yksittäisiin aksioomiin ei sinänsä kohdistu mitään erityisvaatimuksia, kunhan peruskäsitteet ("piste", "suora", ...) kirjataan niihin selvästi. Kelvollisia aksioomia ovat esim. "jokaisella suoralla on tasan kaksi pistettä", "on olemassa suora" tai "jokaisella suoralla on äärettömän monta pistettä", mutta näitä kolmea lausetta ei saa ottaa aksioomiksi yhtä aikaa, sillä ne ovat ristiriidassa keskenään ja silloin niistä voitaisiin päätellä loogisesti mikä hyvänsä lause. Teorian kehittely olisi mieletöntä. Aksioomajärjestelmän tulee siis olla *ristiriidaton*. Ristiriidattomuuden osoittaminen ei ole useinkaan kovin helppoa, mutta esittelemme siihen keinon — mallien käyttämisen. Aksioomiksi ei yleensä valita tautologioita, vaan sellaisia lauseita, jotka logiikan kannalta voivat olla joko tosia tai epätosia. Leibniz[11] käytti nimitystä *mahdollinen maailma*. Lause "nyt sataa" on tosi tai epätosi riippuen siitä, olemmeko sellaisessa maailmassa, jossa parhaillaan sataa; jos olisimme hieman toisenlaisessa maailmassa, jossa olisi juuri nyt tarpeeksi enemmän tai vähemmän vesihöyryä ilmassa, olisi lauseen "nyt sataa" totuusarvo toinen. Nykyään ja erityisesti matematiikassa käytetään arkisempaa nimitystä *malli* mahtipontisen "mahdollisen maailman" sijasta. *Jos aksioomajärjestelmällä on edes yksi malli, jossa kaikki sen aksioomat ovat tosia, on järjestelmä ristiriidaton.* Tämän huomion

[11] Gottfried Wilhelm von Leibniz 1646–1716. Saksa

perusteella näytämme pian, että neljä ensimmäistä Eukleideen aksioomaa ovat ristiriidattomia konstruoimalla yhden konkreettisen mallin, jossa ne kaikki ovat tosia. Myöhemmin rakennamme mallin, jossa muutkin aksioomat ovat tosia lauseita.

Loogisessa päättelyssä tosista oletuksista ei voida päätyä epätosiin johtopäätöksiin, joten *teorian jokainen todistettu teoreema on tosi jokaisessa mallissa, jossa teorian aksioomat ovat tosia.* Tämä huomio auttaa toisen aksiomaattisiin järjestelmiin liittyvän kysymyksen ratkaisemisessa: Onko aksioomajärjestelmä kyllin *laaja*, jotta tietty teoreema T voitaisiin siitä todistaa? Jos onnistutaan muodostamaan malli, jossa T on epätosi, vaikka kaikki järjestelmän aksioomat ovat tosia, ei T:tä tässä järjestelmässä voida todistaa oikeaksi.

Aksioomajärjestelmien tulisi mielellään olla *minimaalisia* eli niissä ei yleensä haluta olevan (ainakaan monia) turhia aksioomia: jos jokin aksiooma voidaan päätellä muista aksioomista, on tyylikkäämpää nimetä se teoreemaksi kuin aksioomaksi. Paralleeliaksioomasta käydyssä keskustelussa oli kyse Eukleideen aksioomajärjestelmän minimaalisuudesta ja siis epäeuklidisen, tarkemmin sanoen hyperbolisen, geometrian ristiriidattomuudesta.

Aksioomat sisältävät *peruskäsitteitä* (kuten ”suora”, ”piste”,...), joita ei eksplisiittisesti määritellä. Toisinaan sanotaan, että aksioomajärjestelmä ”määrittelee ne implisiittisesti”. Näiden peruskäsitteiden avulla määritellään kaikki muut tarvittavat käsitteet (esim. suorakulmainen kolmio), jotka loogiselta kannalta ovat vain näppäriä lyhennysmerkintöjä peruskäsitteiden komplekseille.

2.2. Hilbertin aksioomat (H1)–(H3).

Tässä luvussa tarkastelemme kolmea ensimmäistä Hilbertin aksioomajärjestelmän selviötä. Peruskäsitteet ovat *piste*, *suora* ja *suora kulkee pisteen kautta.* Ilmaisulla ”piste P sisältyy suoraan ℓ” tarkoitamme samaa kuin sanoessamme, että suora ℓ kulkee pisteen P kautta. Päinvastaisen ilmaisemme sanomalla, että P on suoran ℓ *ulkopuolella.* Pisteen ja suoran välisen relaation ei tarvitse olla sama kuin joukko-opin $P \in l$. Riittää, että se toteuttaa Hilbertin aksioomat.[12]

Kolme ensimmäistä Hilbertin aksioomaa ovat:

(H1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa yksi ja vain yksi suora, joka kulkee sekä P:n että Q:n kautta.

(H2) Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi pistettä.

(H3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

Ensimmäinen Hilbertin aksiooma on siis aivan sama kuin (EA1). Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin (H1):n nojalla voidaan antaa nimi sille yhdelle ja ainoalle suoralle, joka kulkee niiden kautta. Olkoon se $\overleftrightarrow{PQ}$. Sovitaan lisäksi, että jos kirjoitamme $\overleftrightarrow{PQ}$, niin oletamme silloin samalla että $P \neq Q$.

Kolmannesta Hilbertin aksioomasta seuraa, että on olemassa pisteitä. Tästä seuraa (H1):n nojalla, että on olemassa myös suoria. Tätä päättelyä ei Eukleideen aksioomista voi tehdä.

[12] Aksioomat eivät ollenkaan liity siihen, mitä suorat ja pisteet ”ovat”. Aksioomasysteemimme mallissa voivat pisteet kyllä olla alkioita ja suorat niiden joukkoja — ja usein malli näin tehdäänkin. Esimerkkejä tulee tuonnempana.

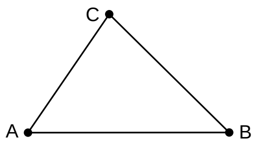
Nyt on aika kysyä, ovatko kolme ensimmäistä Hilbertin aksioomaa keskenään ristiriidattomia. Käytämme malleja. Haemme siis edes yhtä mahdollista maailmaa, jossa (H1)–(H3) ovat tosia. Oletamme tunnetuiksi joukko-opin perusteet ja lukujoukkojen $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^n$ ominaisuudet.

Malli 1. Tarkastellaan kolmen eri alkion joukkoa $\{A, B, C\}$. Sovitaan, että *pisteitä* ovat $P_1 = \{A, B\}$, $P_2 = \{A, C\}$ ja $P_3 = \{B, C\}$ sekä *suoria* $\ell_1 = \{A\}$, $\ell_2 = \{B\}$ ja $\ell_3 = \{C\}$. Sanomme, että *suora ℓ kulkee pisteen P kautta*, jos $\ell \subset P$.

Tällöin (H1) pätee: pisteiden P_1 ja P_2 kautta kulkee suora ℓ_1 ja se on ainoa tällainen suora. Muille pistepareille voidaan tehdä vastaava havainto. Myös (H2) pätee: pisteet P_1 ja P_2 ovat suoralla ℓ_1 ja vastaavasti myös suorilla ℓ_2 ja ℓ_3 on kaksi pistettä. Lopuksi (H3) pätee: mikään suorista ℓ_1,ℓ_2 ja ℓ_3 ei kulje kaikkien kolmen pisteen P_1, P_2 ja P_3 kautta. Näin kaikki kolme Hilbertin aksioomaa toteutuvat, joten olemme onnistuneet konstruoimaan mallin aksioomajärjestelmälle (H1)–(H3). Täten aksioomat (H1)–(H3) ovat ristiriidattomia.

Malli 2. Tarkastellaan yhä mallin 1 joukkoa, mutta sovitaan — ehkä vähän edellistä esimerkkiä tutummalla tavalla — että *pisteitä* ovat $\{A\}$, $\{B\}$ ja $\{C\}$, että *suoria* ovat $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ ja $\{B, C\}$ ja että *suora ℓ kulkee pisteen P kautta*, jos $P \subset l$.

Tällöinkin kolme ensimmäistä Hilbertin aksioomaa toteutuvat (Totea!). Tästä mallista voidaan piirtää kuvakin:



Kuva 11: Malli 2

Malli 3. Tarkastellaan neljän eri pisteen joukkoa $\{A, B, C, D\}$. Sovitaan, että pisteitä ovat $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$ ja $\{D\}$ sekä suoria joukot $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ ja $\{C, D\}$ sekä että suoran kulkeminen pisteen kautta tarkoittaa samaa kuin mallissa 2.

Tällöinkin kolme ensimmäistä Hilbertin aksioomaa pätevät (Totea!).

Malli 4. Kuten malli 3 mutta 5 pisteelle.

Malli 5. (Descartesin koordinaattigeometria) Olkoot *(koordinaattigeometrian) pisteet* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja *(koordinaattigeometrian) suorat*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \lambda \in \mathbb{R}\},\text{, missä}$$

(α, β), $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Suora ℓ *kulkee pisteen P kautta*, jos $P \in l$.

Lineaarialgebran tiedoin osoittautuu, että (H1)–(H3) pätevät (Totea!).

Määritelmä 2.1. Olkoot ℓ ja m suoria. Niitä sanotaan *yhdensuuntaisiksi*, jos ei ole pistettä, jonka kautta ne molemmat kulkevat. Merkitsemme tällöin $\ell \parallel m$, muulloin $\ell \nparallel m$.

Huomaa, että kun kirjoitamme $\ell \parallel m$, niin silloin ilmaisemme myös että $\ell \neq m$. Tämä johtuu aksioomasta (H2).

Tarkastellaan malleissa 1-4 suorien yhdensuuntaisuutta ja edellisessä luvussa mainittua paralleeliaksioomaa (PAR). Mallissa 1 suoran $\ell_1 = \{A\}$ ulkopuolella on vain piste $P_3 = \{B, C\}$. Sen kautta kulkevat vain suorat $\ell_2 = \{B\}$ ja $\ell_3 = \{C\}$. ℓ_2 kulkee suoran ℓ_1 pisteen P_1 kautta; ℓ_3 kulkee suoran ℓ_1 pisteen P_2 kautta. Siten ℓ_1 ei ole yhdensuuntainen ℓ_2:n eikä ℓ_3:n kanssa. Paralleeliaksiooma on mallissa 1 epätosi — mallissa ei ole ollenkaan yhdensuuntaisia suoria. Mallissa 2 käy samoin, siinäkään ei ole yhdensuuntaisia suoria lainkaan (Totea!). Mallissa 3 paralleeliaksiooma pätee (Totea!). Mallissa 4 suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee peräti **kaksi** sen kanssa yhdensuuntaista suoraa (Totea!).

Huomautus 1. Löysimme mallin, jossa paralleeliaksiooma ei päde ja toisen, jossa se pätee. Siten aksioomajärjestelmä (H1)–(H3) on liian suppea, jotta parallelliaksiooma tai sen pätemättömyys voitaisiin siinä todistaa.

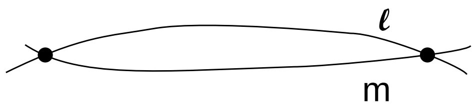
Määritelmä 2.2. Sanomme, että mallilla on

(1) *elliptinen paralleeliominaisuus*, jos siinä ei ole yhdensuuntaisia suoria,
(2) *euklidinen paralleeliominaisuus*, jos siinä paralleeliaksiooma pätee,
(3) *hyperbolinen paralleeliominaisuus*, jos jokaista suoraa ℓ ja sen ulkopuolista pistettä P kohti on olemassa *ainakin kaksi* suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia suoran ℓ kanssa ja kulkevat P:n kautta.

Seuraavat lauseet saadaan välittömästi kolmesta ensimmäisestä Hilbertin aksioomasta. Jätämme niiden todistamisen harjoitustehtäväksi.

LAUSE 2.2.1. *Olkoot ℓ ja m eri suoria, jotka eivät ole yhdensuuntaisia. Silloin on olemassa täsmälleen yksi piste, jonka kautta sekä ℓ että m kulkevat.*

Suorat eivät siis voi olla tämän näköisiä:



KUVA 12: OUDOT SUORAT

LAUSE 2.2.2. *Jokaisen suoran ulkopuolella on ainakin yksi piste.*

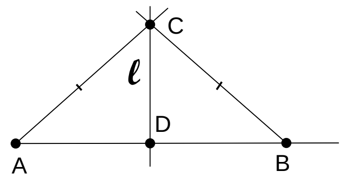
LAUSE 2.2.3. *Jos P on mielivaltainen piste, niin on olemassa ainakin yksi suora, johon P ei sisälly.*

LAUSE 2.2.4. *Jokaisen pisteen kautta kulkee ainakin kaksi eri suoraa.*

2.3. Hilbertin aksioomat (H4)–(H7).

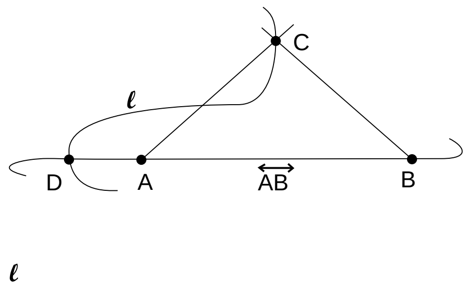
Tarkastellaan seuraavaa "todistusta"', jolla yritetään näyttää, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio siten, että janat AC ja BC ovat yhtäsuuret eli $AC = BC$.
Väite. $\measuredangle A = \measuredangle B$.

Todistus. Valitaan suora ℓ, joka puolittaa kulman $\measuredangle C$. Leikatkoon se suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ pisteessä D. Tällöin kolmioilla $\triangle ACD$ ja $\triangle CDB$ on yhteinen sivu CD, $\measuredangle ACD = \measuredangle DCB$ (kulman puolittajan ominaisuus) ja $AC = CB$ (oletus), joten sivu-kulma-sivu -säännön nojalla kolmioissa kaikki vastinsivut ja -kulmat ovat yhtä suuria, erityisesti $\measuredangle A = \measuredangle B$. □



Kuva 13: "Tasakylkinen kolmio"

Kommentteja. Mikä on kolmio, mikä kulman puolittaja? Nämä voidaan toki määritellä. Onko kulman puolittaja sitten olemassa? Leikkaako se välttämättä suoraa $\overleftrightarrow{AB}$. Onko sivu-kulma-sivu -sääntö voimassa? Näihin kysymyksiin voidaan vastata myönteisesti, kuten myöhemmin teemme, mutta todistuksessa on vielä yksi aukko, joka johtuu kuviosta katsomisesta: mistä tiedämme, että piste D on pisteiden A ja B välissä? Eihän ole mitään tietoa, minkä näköisiä suorat ovat; tilannehan voisi näyttää vaikkapa seuraavalta:



Kuva 14: Tasakylkinen kolmioko?

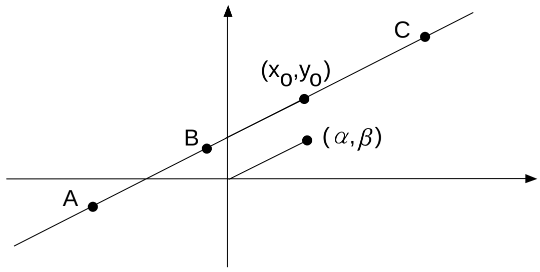
Mikä on nyt kolmio $\triangle ADC$? Tässä joudutaan vaikeuksiin! Aksioomat (H1)–(H3) eivät riitä estämään tämän tapaisten tilanteiden syntymistä, joten tarvitsemme lisää aksioomia ja uuden peruskäsitteen *välissäolo*. Merkitään $A * B * C$ ja luetaan se "*piste B on pisteiden A ja C välissä*". Tämän käsitteen, yhdessä jo käyttöön otettujen käsitteiden (suora, piste, kulkee kautta) kanssa, tulee toteuttaa (H1)–(H3) *ja* seuraavat *välissäoloaksioomat* (H4)–(H7):

(H4) Jos $A * B * C$, niin A, B ja C ovat eri pisteitä, joiden kaikkien kautta kulkee sama suora ja $C * B * A$.

Esimerkki 1. Tarkastellaan vielä mallia 5 eli koordinaattitason pisteitä ja suoria. Sovitaan, että pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ pätee $A * B * C$, jos on olemassa $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ja $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ siten, että $\lambda < \mu < \nu$ tai $\lambda > \mu > \nu$ ja

$$\begin{cases} (a_1, a_2) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \\ (b_1, b_2) = (x_0, y_0) + \mu(\alpha, \beta), \\ (c_1, c_2) = (x_0, y_0) + \nu(\alpha, \beta). \end{cases}$$

Tällöin (H4) on voimassa (Totea!).

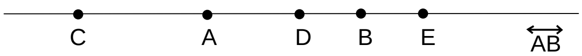


Kuva 15: Suora koordinaattitasossa

Esitämme seuraavaksi kaksi Hilbertin aksioomaa lisää:

(H5) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$.

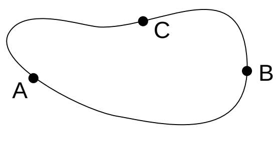
Huomautus 2. Aksiooma (H5) takaa, ettei suora $\overleftrightarrow{AB}$ pääty pisteeseen A tai B eikä ole tyhjä niiden välillä:



Kuva 16: Välissäoloaksiooma (H5)

Aksioomasta (H3) seuraa, että kaikenkaikkiaan on olemassa vähintään kolme pistettä. Aksioomat (H4) ja (H5) takaavat, että jokaisella suoralla on ainakin kolme pistettä (ja yhteensä siis ainakin seitsemän). Siksi mallit 1-4 eivät toteuta aksioomaa (H5), sovittiin välissä oleminen miten tahansa.

Toisaalta aksioomat (H1)–(H5) eivät vielä takaa, että millään suoralla olisi enemmän kuin nuo kolme pistettä. Aksioomassa (H5) pisteet C, D ja E voivat nimittäin olla keskenään samoja. Suoraan aksioomaa (H5) vastaan rikkomatta voi määritellä välissäolon vaikka siten, että $A * B * C$ aina, kun A, B ja C ovat eri pisteitä mallin samalla suoralla. Vasta seuraavana esiteltävä aksiooma (H6) estää suoria olemasta kuvan 17 mukaisia lenkkuja, kun kuvassa välissäolo tulkitaan niin, että kukin piste on kahden muun välissä. Välissäoloaksiooma (H6) tekee siten selvän eron esimerkiksi pallogeometriaan, jossa suorien roolissa ovat isoympyrät.



Kuva 17: Ei suora

(H6) Jos A, B ja C ovat eri pisteitä, jotka kuuluvat samalle suoralle, niin yksi ja vain yksi seuraavista ehdoista on voimassa:

$$A * B * C, \; A * C * B \text{ tai } B * A * C.$$

Esimerkin 5 malli, tavallinen koordinaattigeometria, toteuttaa aksioomat (H5) ja (H6). (Totea!)

Aksioomista (H1)–(H6) seuraa, että jokaisella suoralla on ainakin viisi pistettä, mutta niistäkään ei vielä seuraa, että millään suoralla tai edes koko mallissa tarvitsisi olla äärettömän monta pistettä. On mielenkiintoinen harjoitustehtävä muodostaa äärellinen malli aksioomille (H1)–(H6).

Määritelmä 2.3. Olkoot A ja B eri pisteitä.

(1) Joukkoa

$$AB \colon = \{C \text{ on piste } \bigm| A * C * B \text{ tai } C = A \text{ tai } C = B\}$$

sanotaan *pisteiden A ja B väliseksi janaksi* eli *janaksi AB*.

(2) *Puolisuoraksi pisteestä A pisteen B suuntaan* sanotaan joukkoa

$$\overrightarrow{AB} = AB \cup \{C \text{ on piste } \bigm| A * B * C\}.$$

Kuva 18: Jana ja puolisuora

Huomautus 3. Aksiooman (H4) nojalla $AB = BA$. Kun kirjoitamme AB tai $\overrightarrow{AB}$, sanomme samalla, että A ja B ovat eri pisteitä.

LAUSE 2.3.1. *Olkoot A ja B eri pisteitä. Silloin*

(a) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$

(b) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P \mid \overleftrightarrow{AB}$ *kulkee pisteen P kautta*$\}$.

Huomautus 4. Kohdassa (b) ei voitu kirjoittaa lyhyesti $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$, sillä edellinen on aina pisteiden joukko, mitä suora ei Hilbertin järjestelmän mukaisessa aksiomaattisessa geometriassa ole; vertaa esimerkkiin 1.

Todistus. (a). Puolisuoran määritelmän ja huomautuksen 3 nojalla

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} &= \big(AB \cup \{C \mid A * B * C\}\big) \cap \big(BA \cup \{C \mid C * A * B\}\big) = \\ &= AB \cup \big(\{C \mid A * B * C\} \cap \{C \mid C * A * B\}\big) = \\ &= AB \cup \{C \mid A * B * C \text{ ja } C * A * B\} \overset{(*)}{=} AB \cup \emptyset = AB.\end{aligned}$$

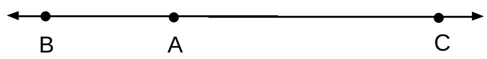
Tässä muut yhtälöt ovat helppoa joukko-oppia paitsi yhtälö $(*)$, joka seuraa siitä, etä (H6):n nojalla ei voi olla sekä $A * B * C$ että $C * A * B$.

(b), "$\subset$". (H1):n nojalla A:n ja B:n kautta kulkee vain suora $\overleftrightarrow{AB}$, jolloin (H4):n ja puolisuoran määritelman mukaan $\overrightarrow{BA} \subset \{P \mid \overleftrightarrow{AB}$ kulkee P:n kautta$\}$. Samoin

$\overrightarrow{AB} \subset \{P \mid \overleftrightarrow{BA}$ kulkee P:n kautta$\}$. Siten $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subset \{P \mid \overleftrightarrow{AB}$ kulkee P:n kautta$\}$.

(b) "$\supset$" Olkoon P piste, jonka kautta suora $\overleftrightarrow{AB}$ kulkee. On osoitettava, että $P \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Jos $P = A$ tai $P = B$, on asia selvä. Jos $P \neq A$ ja $P \neq B$, niin (H6):n nojalla joko $P * A * B$, $A * P * B$ tai $A * B * P$. Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa janan ja puolisuoran määritelmän mukaan $P \in \overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Viimeisessä tapauksessa puolisuoran määritelmän mukaan $P \in \overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.
□

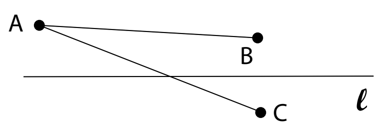
Määritelmä 2.4. Puolisuoria $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ sanotaan *vastakkaisiksi*, jos $B * A * C$.



KUVA 19: VASTAKKAISET PUOLISUORAT $\overrightarrow{AB}$ JA $\overrightarrow{AC}$

Kuvasta katsoen näyttäisi ilmeiseltä, että jokainen suoran $\overleftrightarrow{BC}$ piste kuuluisi joko puolisuoraan $\overrightarrow{AB}$ tai $\overrightarrow{AC}$. Näin ei kuitenkaan vielä aksioomien (H1)–(H6) nojalla tarvitse olla, vaan on olemassa malli, joka toteuttaa aksioomat (H1)–(H6), mutta jossa suoralla $\overleftrightarrow{BC}$ on muitakin pisteitä, kuin puolisuorien $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ pisteet. Mallin konstruoiminen jätetään harjoitustehtäväksi. Tällaisten ihmeellisyyksien välttämiseksi tarvitsemme uuden aksiooman, jonka pitäisi väittää suunnilleen, että "jokainen suoran piste jakaa sen kahteen puolisuoraan". Asetamme tulevia tarpeitamme varten hieman vahvemman aksiooman, joka olennaisesti sanoo, että jokainen suora jakaa tason kahteen puolitasoon.

Määritelmä 2.5. Olkoon ℓ suora ja A ja B pisteitä, joiden kautta ℓ ei kulje. Sanomme, että A ja B *ovat samalla puolella suoraa* ℓ ja merkitsemme $AB\ell$ tai $BA\ell$, jos $A = B$ tai suora ℓ ei sisällä janan AB pisteitä. Muussa tapauksessa sanomme, että A ja B ovat *eri puolilla suoraa* ℓ ja merkitsemme $B\ell A$ tai $A\ell B$.

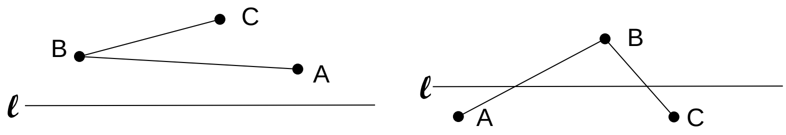


KUVA 20: $AB\ell$ JA $A\ell C$

Huomautus 5. Siis $A\ell B$, jos ja vain jos ℓ leikkaa janaa AB, mutta ei sen päätepisteissä.

(H7) Olkoot ℓ suora sekä A, B ja C pisteitä, joiden kautta suora ℓ ei kulje. Tällöin on voimassa:

(i) jos $AB\ell$ ja $BC\ell$, niin $AC\ell$
(ii) jos $A\ell B$ ja $B\ell C$, niin $AC\ell$.



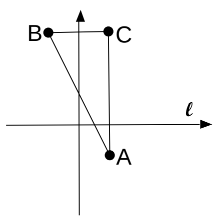
Kuva 21: Aksiooma (H7)

Esimerkki 2. Esimerkin 1 malli (koordinaattitason suorat ja pisteet) toteuttaa aksiooman (H7). Sen toteaminen suoraan laskemalla on kuitenkin hankalaa, mutta lineaarialgebran tiedoilla tason siirroista ja kierroista voidaan mielivaltainen tilanne palauttaa sellaiseksi, että tarkasteltava suora on x-akseli. Toki tässä mallissa (H7) on intuitiivisesti aivan selvä.

Esimerkki 3. Merkitään

$$S = \{\frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}.$$

Joukon S alkiot ovat siis luvut, joiden esittämiseen 2-järjestelmässä tarvitaan vain äärellinen määrä ykkösiä, nollia sekä pilkku. Sovitaan, että *pisteet* ovat tulojoukon $S^2 = S \times S$ alkiot, *suorat* ovat ne joukot $(S \times S) \cap \ell$, joissa on vähintään 2 pistettä ja missä ℓ on koordinaattitason $\mathbb{R}^2$ tavallinen suora (ks. esimerkki 1). Pisteen olo suoralla ja välissäolo määritellään samoin kuin koordinaattitasossa. Nyt (H1)–(H4) ja (H6) ovat ilmeisesti voimassa kuten esimerkin 1 mallissakin. Myös (H5) pätee (Totea!). Mutta **(H7) ei päde!** Jos nimittäin valitaan $\ell = (S \times S) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$, $A = (1, -1)$, $B = (-1, 2)$ ja $C = (1, 2)$,



Kuva 22: Esimerkki 3

niin selvästi $BC\ell$, sillä suora ℓ ei leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{BC}$ eikä siis myöskään janaa BC. Hämmästyttävästi myös $AB\ell$: janan AB ja suoran ℓ ainoa mahdollinen leikkauspiste on $(\frac{1}{3}, 0)$, mutta se ei ole tämän mallin piste, sillä $\frac{1}{3} \notin S$.

Toisaalta $A\ell C$, sillä $(1, 0)$ on sekä suoran ℓ että janan AC piste. Siten $AB\ell$, $BC\ell$, mutta silti $A\ell C$, mikä on vastoin aksioomaa (H7).

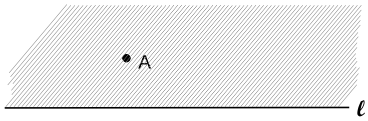
Huomautus 6. Aksiooma (H7) estää sen, että suorissa olisi reikiä, joiden kautta ne voisivat kulkea toistensa läpi toisiaan leikkaamatta; vrt. esimerkki 3. Jääköön harjoitustehtäväksi todistaa, että aksiooman (H7) ansiosta suorilla on äärettömän monta pistettä.

Huomautus 7. Suoran ℓ ulkopuolisten pisteiden oleminen samalla puolella suoraa ℓ eli $AB\ell$ on *ekvivalenssirelaatio,* ts.

(1) Jos $AB\ell$, niin $BA\ell$ (relaatio on symmetrinen).
(2) Aina $AA\ell$ (relaatio on refleksiivinen).
(3) Jos $AB\ell$ ja $BC\ell$, niin $AC\ell$ (relaatio on transitiivinen).

LAUSE 2.3.2. *Olkoon ℓ suora sekä A, B ja C eri pisteitä, jotka eivät sisälly suoraan ℓ. Jos nyt $AB\ell$ ja $B\ell C$, niin $A\ell C$*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Määritelmä 2.6. Olkoon ℓ suora ja A piste, jonka kautta ℓ ei kulje. Joukkoa $\{P \mid AP\ell\}$ sanotaan *suoran ℓ rajoittamaksi pisteen A määräämäksi puolitasoksi.*



Kuva 23: Puolitaso $\{P \mid AP\ell\}$

LAUSE 2.3.3. *Jokainen suora rajoittaa täsmälleen kahta eri puolitasoa H_1 ja H_2. Niille pätee $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.*
Todistus. Olkoon ℓ suora. On olemassa piste A, jonka kautta ℓ ei kulje (lause 2.2.2), ja toisaalta piste B, jonka kautta ℓ kulkee (H2). Edelleen (H5):n nojalla on olemassa piste C siten, että $A * B * C$. Tällöin B sisältyy janaan AC, joten $A\ell C$. Erityisesti ℓ ei kulje C:n kautta, joten voidaan määritellä puolitasot $H_1 =: \{P \mid AP\ell\}$ ja $H_2 : = \{P \mid CP\ell\}$, jotka ovat määritelmän mukaan suoran ℓ rajoittamia. Koska $A \in H_1 \setminus H_2$, niin $H_1 \neq H_2$. Siten ℓ rajoittaa ainakin kahta eri puolitasoa.

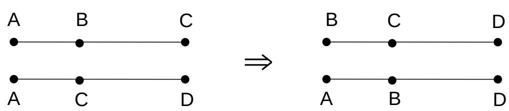
Olkoon H_3 kolmas ℓ:n rajoittama puolitaso. Siis $H_3 = \{P \mid DP\ell\}$, missä D on jokin piste, jonka kautta ℓ ei kulje. Nyt joko $AD\ell$ tai $A\ell D$. Ensimmäisessä tapauksessa aksiooman (H7) kohdasta (i) seuraa, että $H_3 = H_1$. Jälkimmäisessä tapauksessa aksioomasta (H7) kohdasta (ii) seuraa, että $CD\ell$, josta kohdan (i) nojalla saamme, että $H_3 = H_2$. Näin ℓ:n rajoittamia puolitasoja on enintään kaksi.

Jos olisi olemassa $P \in H_1 \cap H_2$, niin pitäisi päteä $AP\ell$ ja $CP\ell$, jolloin suoran samalla puolella olemisen transitiivisuudesta seuraisi, että $AC\ell$. Niin ei ole, joten $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. □

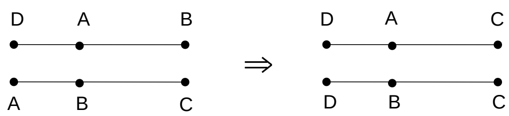
LAUSE 2.3.4.

(i) *Jos $A * B * C$ ja $A * C * D$, niin $B * C * D$ ja $A * B * D$.*
(ii) *Jos $D * A * B$ ja $A * B * C$, niin $D * A * C$ ja $D * B * C$.*

Kuvioina lauseen 2.3.4 sisältö on:

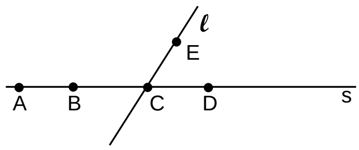


Kuva 24: (i)



Kuva 25: (ii)

Todistus. Osoitetaan kohdasta (i) johtopäätös $B * C * D$. Olkoon siis $A * B * C$ ja $A * C * D$. Välissäolon määritelmän nojalla pisteet A, B ja C ovat eri pisteitä ja myös D eroaa A:sta ja C:stä sekä kaikki neljä ovat samalla suoralla $s = \overleftrightarrow{AC}$. (H3):n nojalla suoran s ulkopuolella on jokin piste E. Merkitään $\ell = \overleftrightarrow{EC}$. Lauseen 2.2.1 nojalla suorat s ja ℓ leikkaavat vain yhdessä pisteessä. C on leikkauspiste, joten mikään muu suoran s piste ei ole suoralla ℓ, erityisesti siis yksikään pisteistä A, B, D ei ole suoralla ℓ. Siis $A\ell D$.



KUVA 26: LAUSE 2.3.4

Jos olisi $A\ell B$, niin jana AB leikkaisi suoraa ℓ. Ainoa mahdollinen leikkauspiste on C. Koska $A \neq C \neq B$, niin olisi $A * C * B$, mikä on vastoin aksioomaa (H6), sillä oletuksen mukaan on $A * B * C$. Täten $AB\ell$.

Lauseen 2.3.2 nojalla $B\ell D$. Siten BD ja ℓ leikkaavat. Ainoa mahdollinen leikkauspiste on C. Koska $B \neq C \neq D$, niin $B * C * D$.

Johtopäätös $A*B*D$ todistetaan samoin; jätetään se harjoitustehtäväksi samoin kuin väitteen (ii) todistaminen. □

Huomautus 8. Välissäolon käsite vastaa siis intuitiivista käsitystämme pisteiden järjestyksestä suoralla. Todistuksessa käytimme lauseen 2.3.2 kautta aksioomaa (H7).

Seuraava lause väittää, että jokainen suora voidaan jakaa kahdeksi puolisuoraksi.

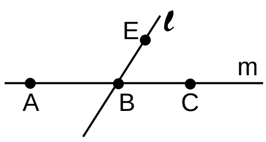
LAUSE 2.3.5. *Olkoot A, B ja C pisteitä siten, että $A*B*C$, jolloin ne erityisesti ovat eri pisteitä ja samalla suoralla m. Tällöin on olemassa toinen suora ℓ, joka kulkee pisteen B kautta ja joka jakaa suoran m kahteen osaan seuraavasti:*

(i) $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = BA \cap BC = \{B\}$,

(ii) $\{P \mid m \text{ kulkee } P\text{:n kautta }\} = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$.

(iii) Jos $P \in \overrightarrow{BA}$ ja $P \neq B$, niin $PA\ell$,

(iv) Jos $P \in \overrightarrow{BC}$ ja $P \neq B$, niin $PC\ell$.



KUVA 27: SUORAN JAKAMINEN

Todistus. Koska $A * B * C$, niin (H4):n nojalla pisteet A, B, C ovat eri pisteitä ja samalla suoralla $m = \overleftrightarrow{AB}$. (H3):n nojalla on m:n ulkopuolella jokin piste E. Siten (H1):n nojalla on olemassa suora $\ell = \overleftrightarrow{BE}$. Lauseen 2.2.1 nojalla se leikkaa suoran

m vain yhdessä pisteessä. Se on B. Täten $A\ell C$.

Osoitetaan (iii). Olkoon $P \in \overrightarrow{BA}$ siten, että $P \neq B$. Niinpä $P = A$, $B * P * A$ tai $B * A * P$. Jos olisi $P\ell A$, niin jana PA leikkaisi suoraa ℓ. Ainoa mahdollinen leikkauspiste on B, joten pätisi $P * B * A$. Niin ei (H6):n ja (H4):n mukaan ole. Siten $PA\ell$. Kohta (iv) osoitetaan samoin.

Selvästi $\{B\} \subset BA \cap BC \subset \overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC}$.

Olkoon $P \in \overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC}$ siten, että $P \neq B$. Nyt kohtien (iii) ja (iv) nojalla $PA\ell$ ja $PC\ell$, jolloin (H7):n mukaan $AC\ell$. Niin ei ole, joten $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} \subset \{B\}$. Kohta (i) on todistettu.

Olkoon P sellainen suoran m piste, että $P \notin \overrightarrow{BA}$ ja $P \notin \overrightarrow{BC}$. Silloin puolisuoran määritelmän mukaan mikään seuraavista ei päde: $P \in \{A, B\}$, $B * P * A$, $B * A * P$, $P \in \{B, C\}$, $B * P * C$, $B * C * P$. (H6):n ja (H4):n nojalla $A * B * P$ ja $P * B * C$. Siten $A\ell P$ ja $P\ell C$. Aksiooman (H7) kohdan (ii) nojalla $AC\ell$. Niin ei ole, joten

$$\{P \mid m \text{ kulkee } P\text{:n kautta}\} \subset \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}.$$

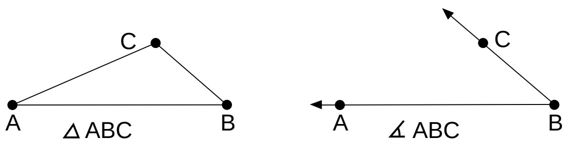
Toisaalta suoran puolisuorat ovat ovat aina suoran pisteiden joukkoja, joten yllä pätee inkluusio myös toiseen suuntaan ja siten yhtäsuuruus. Kohta (ii) on todistettu. □

On aika määritellä geometrian keskeiset käsitteet, kolmio ja kulma.

Määritelmä 2.7.

(1) Järjestettyä pistekolmikkoa (A, B, C), joka ei sisälly mihinkään suoraan, sanotaan *kolmioksi* $\triangle ABC$. Jos $\triangle ABC$ on kolmio, niin sanomme janoja AB, BC ja CB sen *sivuiksi* ja pisteitä A, B ja C sen *kärjiksi*.

(2) Jos $\triangle ABC$ on kolmio, niin *kulma* $\measuredangle ABC$ muodostuu puolisuorista $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$, joita sanotaan *kulman* $\measuredangle ABC$ *kyljiksi*. Kylkien yhteistä päätepistettä B sanotaan kulman $\triangle ABC$ *kärjeksi*.

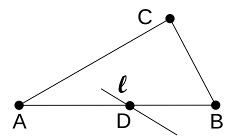


KUVA 28: KOLMION SIVUT JA KÄRJET JA KULMAN KYLJET JA KÄRKI

Huomautus 9. Kun sanomme, että "$\triangle ABC$ on kolmio" tarkoitamme, että pisteet A, B ja C eivät ole samalla suoralla. Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat samat, jos ja vain jos $A = D$, $B = E$ ja $C = F$. Yleensä siis $\triangle ABC \neq \triangle BCA$. Toisaalta $\measuredangle ABC = \measuredangle BCA$. Emme itse asiassa määritelleet "kolmiota" emmekä "kulmaa" konkreettisina kuvioina. Niiden kärjet, sivut ja kyljet ovat pisteitä tai pistejoukkoja.

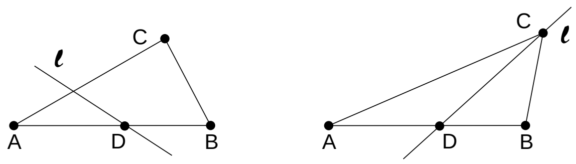
Eukleides käytti ilman todistusta ilmeiseltä näyttävää tulosta, jonka mukaan suora, joka leikkaa jotakin kolmion sivua muualla kuin kärjessä, leikkaa myös jotakin muuta sivua. Tämä voidaan nyt muotoilla ja todistaa täsmällisesti. Tulos on nimeltään *Paschin lause*[13] .

[13] MORITZ PASCH 1843–1930. Saksa. Esitti Paschin lauseen aksioomana 1882.



KUVA 29: PASCHIN LAUSEEN TILANNE

LAUSE 2.3.6 (Pasch). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $\ell \neq \overleftrightarrow{AB}$ suora, joka leikkaa sivua AB pisteessä D, $A \neq D \neq B$. Silloin ℓ leikkaa myös sivua AC tai BC. Jos suora ℓ ei kulje kärjen C kautta, leikkaa ℓ vain toista sivuista AC tai BC.*



KUVA 30: PASCHIN LAUSE

Todistus. Jos ℓ kulkee C:n kautta, niin lause pätee. Älköön siis ℓ kulkeko C:n kautta. Koska $A * D * B$ ja ℓ kulkee D:n kautta, niin $A\ell B$.

Nyt joko $A\ell C$ tai $AC\ell$. Ensimmäisessä tapauksessa ℓ leikkaa janaa AC. Silloin aksiooman (H7) kohdan (ii) nojalla $BC\ell$, joten ℓ ei leikkaa janaa BC ja lause pätee. Jälkimmäisessä tapauksessa ℓ ei leikkaa janaa AC. Lauseen 2.3.2 nojalla $C\ell B$ eli ℓ leikkaa janaa BC. Nytkin lause pätee. □

LAUSE 2.3.7. *Olkoot A, B ja C pisteitä siten, että $A * B * C$. Silloin*

(i) $AC = AB \cup BC$
(ii) $AB \cap BC = \{B\}$.

Todistus. Kohta (ii) on osa lausetta 2.3.5.

Todistetaan kohta (i). Näytetään aluksi $AC \subset AB \cup BC$. Olkoon P janalla AC. Jos $P \in \{A, B, C\}$, on asia selvä. Olkoot siis A, B, C ja P eri pisteitä, jolloin $A * P * C$. (H6):n nojalla joko $P * A * B$, $A * P * B$ tai $A * B * P$. Ensimmäinen ei käy, sillä muutoin lauseen 2.3.4 kohdan (ii) ja oletuksen $A * B * C$ nojalla olisi $P * A * C$, mikä on vastoin tietoa $A * P * C$. Jos $A * P * B$, niin $P \in AB$ ja asia on selvä. Jos $A * B * P$, niin lauseen 2.3.4 kohdan (i) ja tiedon $A * P * C$ nojalla $B * P * C$, joten $P \in BC$ ja asia on selvä.

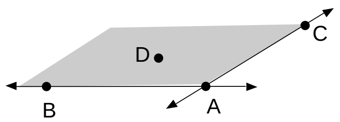
Näytetään, että $AB \cup BC \subset AC$. Olkoon $P \in AB \cup BC$. Jos $P = A$ tai $P = C$, on asia selvä. Jos taas $P = B$, niin oletuksen $A * B * C$ mukaan $P \in AC$. Olkoon siis $P \notin \{A, B, C\}$, jolloin $A * P * B$ tai $B * P * C$. Ensimmäisessä tapauksessa oletuksen $A * B * C$ ja lauseen 2.3.4 kohdan (i) nojalla $A * P * C$, joten $P \in AC$. Toisessa tapauksessa (H4):n ja oletuksen perusteella $C * B * A$ ja $C * P * B$. Lauseen 2.3.4 kohdan (i) mukaan nyt $C * P * A$ eli $P \in CA = AC$. □

LAUSE 2.3.8. *Olkoot A, B ja C eri pisteitä siten, että $A * B * C$. Tällöin $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.*

Todistus. Näytetään ensin, että $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AC}$. Olkoon $P \in \overrightarrow{AB}$. Nyt joko $P \in AB$ tai $A * B * P$. Jos $P \in AB$, niin edellisen lauseen mukaan $P \in AC \subset \overrightarrow{AC}$. Olkoon siis $A * B * P$. Jos $P = C$, on asia selvä. Niinpä oletamme, että $P \neq C$. (H6):n nojalla joko $P * A * C$, $A * P * C$ tai $A * C * P$. Ensimmäinen näistä ei käy, sillä muutoin olisi $C * A * P$, mistä tiedon $C * B * A$ ja lauseen 2.3.4 kohdan (i) nojalla seuraa $B * A * P$, mikä on vastoin oletusta $A * B * P$. Jos taas $A * P * C$, niin $P \in AC \subset \overrightarrow{AC}$. Jos $A * C * P$, niin suoraan $P \in \overrightarrow{AC}$.

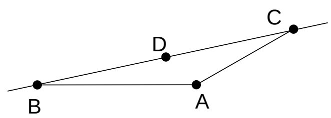
Näytetään, että $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{AB}$. Olkoon $P \in \overrightarrow{AC}$. Jos $P \in \{A, B, C\}$, on asia selvä suoraan tai oletuksen $A * B * C$ nojalla. Olkoon siis $P \notin \{A, B, C\}$. Jälleen on vain kolme mahdollisuutta: $A * B * P$, $A * P * B$ tai $P * A * B$. Kaksi ensimmäistä antavat suoraan $P \in \overrightarrow{AB}$. Jos viimeinen toteutuisi, niin oletuksen $A * B * C$ ja lauseen 2.3.4 kohdan (ii) nojalla $P * A * C$, jolloin $P \notin \overrightarrow{AC}$. Se ei käy. □

Määritelmä 2.8. Olkoot A, B ja C eri pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla. Sanomme, että piste D on *kulman $\angle BAC$ sisäpuolella*, jos $DC\overleftrightarrow{BA}$ ja $DB\overleftrightarrow{AC}$.



Kuva 31: Kulman sisäpuoli

LAUSE 2.3.9. *Olkoot A, B ja C pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla ja kulkekoon suora $\overleftrightarrow{BC}$ pisteen D kautta. Tällöin D on kulman $\angle BAC$ sisäpuolella, jos ja vain jos $B * D * C$.*



Kuva 32: Lause 2.3.9

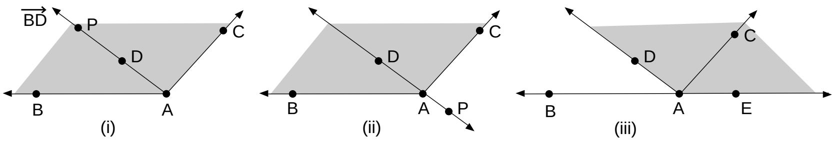
Todistus. "$\Rightarrow$". Olkoon D kulman $\angle BAC$ sisäpuolella, jolloin heti $D \notin \{B, C\}$. Määritelmän mukaan $\overleftrightarrow{BA}$ ei leikkaa janaa DC eikä $\overleftrightarrow{AC}$ leikkaa janaa DB. Siten ei voi olla $D * B * C$ eikä $B * C * D$. (H6):n nojalla on tällöin $B * D * C$.

"$\Leftarrow$". Olkoon $B * D * C$. Pisteet B, A ja C eivät ole samalla suoralla, joten $\overleftrightarrow{BA} \neq \overleftrightarrow{BC}$. Näiden suorien ainoa leikkauspiste on lauseen 2.2.1 nojalla B. Toisaalta (H1):n nojalla $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{CD}$, joten suorien $\overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{BA}$ ainoa leikkauspiste on B. Jos nyt janalla DC olisi jokin suoran $\overleftrightarrow{BA}$ piste, niin se olisi B ja silloin olisi $C * B * D$. Se on vastoin oletusta $B * D * C$, joten janalla DC ei ole suoran $\overleftrightarrow{BA}$ pisteitä. Siten $DC\overleftrightarrow{BA}$. Samoin päätellään, että $DB\overleftrightarrow{AC}$. □

LAUSE 2.3.10. *Olkoon $\angle BAC$ kulma ja D piste sen sisäpuolella. Tällöin:*

(i) *jos $P \in \overrightarrow{AD}$ ja $P \neq A$, niin P on kulman $\angle BAC$ sisäpuolella;*

(ii) *jos $P * A * D$, niin P ei ole kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella;*
(iii) *jos $B * A * E$, niin C on kulman $\measuredangle DAE$ sisäpuolella.*

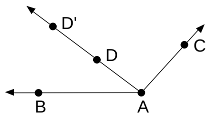


Kuva 33: Lause 2.3.10

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Määritelmä 2.9. Olkoon $\measuredangle BAC$ kulma ja D piste, $D \neq A$. Sanomme, että puolisuora $\overrightarrow{AD}$ on puolisuorien $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ *välissä*, jos D on kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella.

Huomautus 10. Määritelmä on järkevä: Jos olisi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD'}$ jollekin toiselle pisteelle D', niin edellisen lauseen 2.3.10 kohdan (i) nojalla D ja D' olisivat yhtäaikaa kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella. Määrittely ei siis riipu puolisuoran $\overrightarrow{AD}$ pisteen D valinnasta.

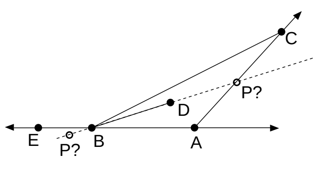


Kuva 34: Puolisuora toisten välissä

LAUSE 2.3.11 (Puomilause). *Olkoon puolisuora $\overrightarrow{BD}$ puolisuorien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ välissä. Tällöin puolisuora $\overrightarrow{BD}$ leikkaa janaa AC.*

Todistus. Tehdään vastaoletus: $\overrightarrow{BD}$ ei leikkaa janaa AC. Tällöin ei edes suora $\overleftrightarrow{BD}$ leikkaa janaa AC, sillä mahdollinen leikkauspiste P ei voisi olla A eikä C, vaan olisi niiden välissä $A * P * C$. Lauseen 2.3.9 mukaan P olisi siis kulman $\measuredangle ABC$ sisäpuolella. Mutta vastaoletuksen mukaan P ei voisi olla puolisuoralla $\overrightarrow{BD}$, vaan lauseen 2.3.5 nojalla $P * B * D$, jolloin lauseen 2.3.10 kohdan (ii) mukaan D ei olisikaan kulman $\measuredangle CBA$ sisäpuolella. Se on vastoin oletusta.

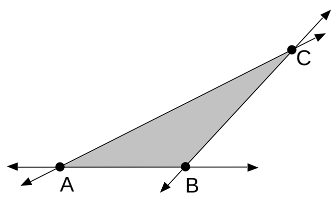
Olemme todistaneet, että suora $\overleftrightarrow{BD}$ ei leikkaa janaa AC, vaan $AC\overleftrightarrow{BD}$. Aksiooman (H5) nojalla valitsemme pisteen E siten, että $E * B * A$.



Kuva 35: Puomilauseen 2.3.11 todistus

Tällöin lauseen 2.3.10 kohdan (iii) nojalla piste C on kulman $\measuredangle EBD$ sisäpuolella. Määritelmän mukaan nyt $EC\overleftrightarrow{BD}$. Koska suoran samalla puolella olo on transitiivinen relaatio, niin $EA\overleftrightarrow{BD}$. Tämä on mahdotonta, sillä $E * B * A$ ja $\overleftrightarrow{BD}$ leikkaa siten janaa EA pisteessä B. Vastaoletus on siis epätosi. $\square$

Määritelmä 2.10. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Merkitsemme sen kulmia lyhyesti $\measuredangle A = \measuredangle BAC$, $\measuredangle B = \measuredangle ABC$ ja $\measuredangle C = \measuredangle ACB$. Sanomme, että piste P on *kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella,* jos P on jokaisen kulman $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ ja $\measuredangle C$ sisäpuolella. Jos piste P ei ole kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella eikä ole minkään sen sivun piste, niin sanomme, että P on kolmion $\triangle ABC$ *ulkopuolella.*



Kuva 36: Kolmion sisäpuoli

Huomautus 11. Seuraava lause sanoo, että kolmion sisäpuolella olevasta pisteestä alkaavat, kärkipisteisiin suuntautuvat puolisuorat jakavat kaikkien pisteiden joukon tyhjentävästi seitsemään erilliseen osaan: kulmien sisäpuolella olevien pisteiden joukkoihin sekä puolisuoriin, joista päätepiste on poistettu ja päätepisteeseen. Otetaan käyttöön merkinnät näille: Jos ℓ on suora ja A, B ja C ovat eri pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla eikä ℓ kulje pisteen A kautta, niin merkitsemme (huomaa sulkeet):

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \{P \mid P \text{ on piste}\},\\
H(\ell, A) &= \{P \in \mathcal{T} \mid \ell \text{ ei kulje } P\text{:n kautta ja } AP\ell\},\\
\measuredangle(ABC) &= \{P \in \mathcal{T} \mid P \text{ on kulman } \measuredangle ABC \text{ sisäpuolella}\},\\
\triangle(ABC) &= \{P \in \mathcal{T} \mid P \text{ on kolmion } \triangle ABC \text{ sisäpuolella}\}.
\end{aligned}$$

Huomaamme lauseen 2.3.3 avulla:

(i) $\measuredangle(ABC) = H(\overleftrightarrow{AB}, C) \cap H(\overleftrightarrow{BC}, A)$.
(ii) Jos $AB\ell$, niin $H(\ell, A) = H(\ell, B)$.
(iii) Jos $A\ell B$, niin $H(\ell, A) \cap H(\ell, B) = \emptyset$ ja

$$H(\ell, A) \cup H(\ell, B) = \mathcal{T} \setminus \{P \in \mathcal{T} \mid \ell \text{ kulkee } P\text{:n kautta}\}.$$

(iv) $\triangle(ABC) = \measuredangle(ABC) \cap \measuredangle(BAC) \cap \measuredangle(ACB)$.

LAUSE 2.3.12. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja P piste sen sisäpuolella. Tällöin joukot $T_1 = \measuredangle(APB)$, $T_2 = \measuredangle(APC)$, $T_3 = \measuredangle(BPC)$, $T_4 = \overrightarrow{PA} \setminus \{P\}$, $T_5 = \overrightarrow{PB} \setminus \{P\}$, $T_6 = \overrightarrow{PC} \setminus \{P\}$ ja $T_7 = \{P\}$ toteuttavat*

$$\mathcal{T} = \cup_{i=1}^{7} T_i \quad \text{ja} \quad T_i \cap T_j = \emptyset \ \text{ kaikilla } i, j = 1, 2, \ldots, 7, \text{ joilla } i \neq j.$$

Todistus.

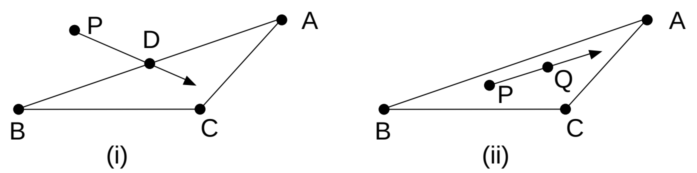
$$T_1 \cap T_2 = \big(H(\overleftrightarrow{AP}, B) \cap H(\overleftrightarrow{PB}, A)\big) \cap \big(H(\overleftrightarrow{AP}, C) \cap H(\overleftrightarrow{PC}, A)\big) = \emptyset,$$

sillä $B\overrightarrow{AP}C$ ja silloin $H(\overleftrightarrow{AP}, B) \cap H(\overleftrightarrow{AP}, C) = \emptyset$. Muut kohdat todistetaan samaan tapaan. (Huomaa muuten, että lauseen väite ei päde, jos P on kolmion $\triangle ABC$ ulkopuolella.) □

Lause 2.3.13. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio.*

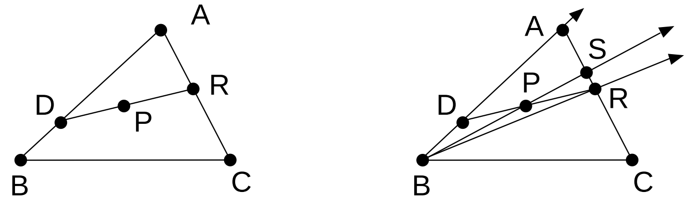
(i) *Jos P on piste kolmion $\triangle ABC$ ulkopuolella, D on sivun AB piste ja $A \neq D \neq B$, niin puolisuora $\overrightarrow{PD}$ leikkaa myös sivua BC tai AC.*

(ii) *Jos piste P on kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella ja Q on jokin toinen piste, niin puolisuora $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa jotakin kolmion $\triangle ABC$ sivua. Jos $\overrightarrow{PQ}$ ei kulje kolmion $\triangle ABC$ minkään kärjen kautta, niin $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa vain yhtä kolmion $\triangle ABC$ sivua.*



Kuva 37: Lause 2.3.13

Todistus. Todistetaan ensin väite (i): Paschin lauseen nojalla suora $\overleftrightarrow{PD}$ leikkaa toista sivuista AC tai BC jossakin pisteessä R. Osoitetaan, että R on puolisuoralla $\overrightarrow{PD}$. Ainakin R sisältyy suoraan $\overleftrightarrow{PD}$. Lisäksi P, D ja R ovat eri pisteitä, sillä jos olisi $D = R$, niin olisi $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ mikä on mahdotonta, koska $\triangle ABC$ on kolmio. Niinpä tasan yksi seuraavista pätee: $P * D * R$, $P * R * D$ tai $D * P * R$. Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa lauseen 2.3.8 nojalla $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PR}$, ja asia on selvä. Osoitetaan, että tapaus $D * P * R$ ei ole mahdollinen. Jo kuvasta arvataan, että tapauksessa $D * P * R$ täytyy pisteen P olla kolmion sisäpuolella — vastoin oletusta! Osoitetaan se.



Kuva 38: Jos $D * P * R$, niin P on kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella

R ei ainakaan ole kumpikaan kärjistä A ja B. Jos olisi $R = C$, niin P olisi lauseen 2.3.9 nojalla kulman $\measuredangle ABC$ sisäpuolella. Oletetaan siksi, että R ei ole mikään kärjistä A, B, C. On siis tutkittava enää vain kaksi tapausta: R on sivulla AC tai BC päätepisteet pois lukien, eli $A * R * C$ tai $B * R * C$.

Olkoon $A * R * C$. Tällöin $\overleftrightarrow{CA} = \overleftrightarrow{CR}$. Koska lisäksi $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AD}$ ja $D * P * R$, niin lauseen 2.3.9 nojalla P on kulmien $\measuredangle BAC$, $\measuredangle DCA$ ja $\measuredangle ABR$ sisäpuolella. Määritelmän 7 nojalla $\overrightarrow{BP}$ on puolisuorien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BR}$ välissä, jolloin puomilauseen 2.3.11 mukaan $\overrightarrow{BP}$ leikkaa janaa AR jossakin pisteessä $S \neq A$. Koska $AR \subset AC$, on nyt $A*S*C$. Lauseen 2.3.9 nojalla S on kulman $\measuredangle ABC$ sisäpuolella, jolloin lauseen 2.3.10 kohdan (i) nojalla myös $P \in \overrightarrow{BS}$ on kulman $\measuredangle ABC$ sisäpuolella. Samoin $\overrightarrow{CP}$ on puolisuorien $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{CA}$ välissä, jolloin $\overrightarrow{CP}$ leikkaa sivua AB jossakin pisteessä $T \neq A$. Siten $B * T * A$, joten T on kulman $\measuredangle BCA$ sisäpuolella, josta lopulta $P \in \overrightarrow{CT}$ on kulman $\measuredangle BCA$ sisäpuolella. Näin P on kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella vastoin oletusta. Tapaus $B * R * C$ suljetaan pois aivan samoin; sen jälkeen (i) on todistettu.

Todistetaan väite (ii): Lauseen 2.3.12 mukaan Q ei voi olla missään muualla kuin suorilla $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$ tai $\overleftrightarrow{CP}$ tai kulmien $\measuredangle APB$, $\measuredangle APC$ tai $\measuredangle BPC$ sisäpuolella.

Olkoon aluksi Q kulman $\measuredangle APC$ sisäpuolella. Määritelmän 7 nojalla $\overrightarrow{PQ}$ on puolisuorien $\overrightarrow{PA}$ ja $\overrightarrow{PC}$ välissä, jolloin lauseen 2.3.11 mukaan $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa sivua AC. Jos Q on kulman $\measuredangle APB$ sisäpuolella, niin $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa vastaavasta syystä sivua AB. Jos taas Q on kulman $\measuredangle BPC$ sisäpuolella, niin $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa sivua BC.

Olkoon Q jokin suoran $\overleftrightarrow{AP}$ piste. Koska P on kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella, niin $\overrightarrow{AP}$ leikkaa sivua BC jossakin pisteessä $S \neq B$. Koska P on kulman $\measuredangle ABC$ sisäpuolella, niin lauseen 2.3.9 nojalla $A * P * S$. Jos $Q \in \overrightarrow{PA}$, niin $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA}$ leikkaa sivuja AB ja AC. Jos $Q \in \overrightarrow{PS}$, niin $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS}$ leikkaa sivua BC. Lauseen 2.3.5 nojalla ei suoralla $\overleftrightarrow{AP}$ ole muita pisteitä. Samoin näytetään, että $\overrightarrow{PQ}$ leikkaa jotakin sivua, jos Q on suoran $\overleftrightarrow{PB}$ tai suoran $\overleftrightarrow{PC}$ piste.

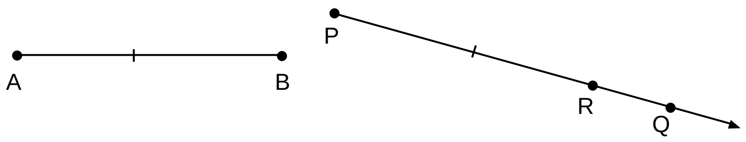
Todistetaan lopuksi väitteen yksikäsitteisyysosa. Ensinnäkin Paschin lauseen ja lauseen 2.2.1 nojalla suora $\overleftrightarrow{PQ}$ leikkaa kolmion $\triangle ABC$ sivuja korkeintaan kahdessa eri pisteessä U ja V. Niille pätee $U*P*V$, sillä P on kolmion sisäpuolella. Lauseen 2.3.8 nojalla pisteistä U ja V vain toinen on puolisuoralla $\overrightarrow{PQ}$. Jos tämä ei ole kolmion kärki, leikkaa $\overrightarrow{PQ}$ siten vain yhtä kolmion sivua. □

2.4. Hilbertin aksioomat (H8)–(H13).

Tähän mennessä olemme käyttäneet peruskäsitteitä *piste, suora, kulkee pisteen kautta* ja *pisteiden välissä.* Nyt on aika ottaa käyttöön vielä kaksi peruskäsitettä. Käytämme niistä samaa nimitystä *yhtenevyys*; ensimmäinen on relaatio kahden janan välillä, jälkimmäinen on relaatio kahden kulman välillä. Merkitsemme ensimmäistä $AB \cong CD$ ja luemme *"janat AB ja CD ovat yhteneviä"*. Jälkimmäistä merkitsemme $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ ja luemme *"kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ ovat yh-*

teneviä". Nämä peruskäsitteet vastaavat joissakin konkreettisissa malleissa juuri janojen pituuksien ja niiden välisten kulmien yhtäsuuruuksia.

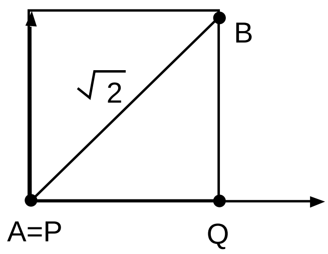
(H8) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on mielivaltainen puolisuora, niin on olemassa **yksi ja vain yksi** piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.



Kuva 39: Hilbertin kahdeksas aksiooma

Esimerkki 4. Palataan luvun 2.3 esimerkkiin 1 (tason tavalliset pisteet ja suorat). Olkoot A, B, C ja D pisteitä siten, että $A \neq B$ ja $C \neq D$. Sovimme, että $AB \cong CD$, jos $\|A - B\| = \|C - D\|$, missä $\|\cdot\|$ on tavallinen tason $\mathbb{R}^2$ normi eli $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tällöin (H8) pätee (Totea!).

Esimerkki 5. Muutetaan edellisen esimerkin mallia siten, että lukusuora $\mathbb{R}$ korvataan rationaalilukujen joukolla $\mathbb{Q}$. Pisteet ovat siis tulojoukon $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ alkioita, suorat joukkoja $\{(x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta) \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}$, missä x_0, y_0, α ja β ovat rationaalisia ja $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Relaatiot määritellään kuten koordinaattigeometriassa. Tällöin aksioomat (H1)–(H7) toteutuvat. (Todista tämä harjoituksena. Vertaa myös luvun 2.3 esimerkkiin 3.) Aksiooma (H8) ei tässä mallissa päde: Jos $A = P = (0,0)$, $B = (1,1)$, $Q = (1,0)$, niin $\|A - B\| = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ja niin ei ole pistettä $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $\|P - R\| = \|A - B\|$.

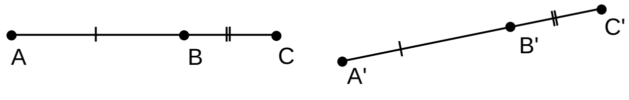


Kuva 40: H8-vastaesimerkki

(H9) Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio eli:

(i) $AB \cong AB$ (relaatio on refleksiivinen).
(ii) Jos $AB \cong CD$, niin $CD \cong AB$ (relaatio on symmetrinen).
(iii) Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB \cong EF$ (relaatio on transitiivinen).

(H10) Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.

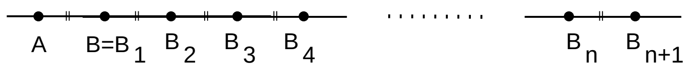


Kuva 41: Hilbertin 10. aksiooma

Esimerkki 6. Esimerkin 4 malli eli Descartesin koordinaattigeometria toteuttaa Hilbertin aksioomat (H9)–(H10).

Huomautus 12. Aksiooma (H10) sanoo, että jos yhteneviä janoja sijoitetaan peräkkäin jollekin suoralle, niin näin saadut "summajanat" ovat yhteneviä. Tämä antaa aiheen seuraavaan määritelmään.

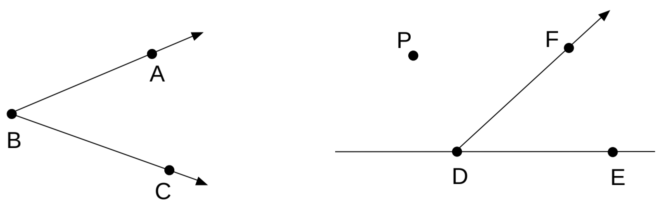
Määritelmä 2.11. Olkoon AB jana ja $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Janan AB *monikerta (suuntaan $\overrightarrow{AB}$)* on jana $n \cdot AB = AB_n$, missä $B_1 = B$ ja B_{n+1} on se yksikäsitteinen piste puolisuoralta $\overrightarrow{AB_n}$, jolle $A * B_n * B_{n+1}$ ja $B_nB_{n+1} \cong AB$.



Kuva 42: Janan monikerrat

Induktioperiaatteen ja (H10):n nojalla $n \cdot AB \cong n \cdot CD$, jos $AB \cong CD$ ja $n \in \mathbb{N}$. (Todista!) Seuraavat aksioomat sanovat kulmien yhtenevyydestä suunnilleen samat asiat, jotka aksioomat sanoivat janojen yhtenevyydestä.

(H11) Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma, $\overrightarrow{DE}$ puolisuora ja P piste, joka ei sisälly suoraan $\overleftrightarrow{DE}$. Silloin on olemassa yksi ja vain yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$.



Kuva 43: Aksiooma (H11)

(H12) Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

Esimerkki 7. Esimerkin 5 malli eli koordinaattigeometria toteuttaa aksioomat (H9) ja (H10). Täydennetään sitä määrittelemällä mallissa kulmien yhtenevyys siten, että $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$, jos

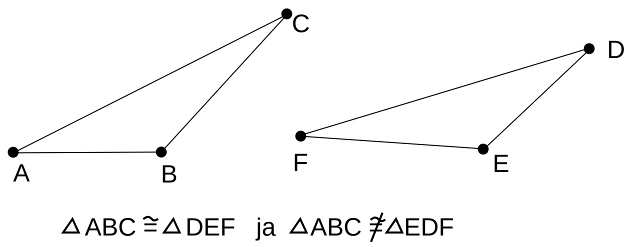
$$\frac{(A - B \mid C - B)}{\|A - B\| \, \|C - B\|} = \frac{(E - D \mid F - D)}{\|E - D\| \, \|F - D\|},$$

missä $(\cdot \mid \cdot)$ on tavallinen tason $\mathbb{R}^2$ sisätulo ja $\| \cdot \|$ on normi, siis $((x, y) \mid (u, v)) = xu + yv$ ja $\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2$. Tällöin myös aksioomat (H11) ja (H12) toteutuvat (Totea!).

Huomautus 13. (H11) vastaa aksioomaa (H8), samoin (H9) ja (H12) vastaavat toisiaan. Kulmille voitaisiin asettaa vielä janoja koskevaa aksioomaa (H10) vastaava aksiooma, mutta osoittautuu, että vastaava väite seuraa muuhun tarkoitukseen vaadittavasta vahvemmasta aksioomasta (H13), jota varten tarvitsemme käsitteen kolmioiden samanlaisuudesta, kolmioiden yhtenevyyden.

Määritelmä 2.12. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita. Sanomme, että ne ovat *yhteneviä kolmioita* ja merkitsemme $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, jos niiden vastaavat sivut ja kulmat ovat yhteneviä eli $AB \cong DE$, $BC \cong EF$, $AC \cong DF$, $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $\measuredangle C \cong \measuredangle F$. Muissa tapauksissa merkitsemme $\triangle ABC \ncong \triangle DEF$.

Huomautus 14. Toisin kuin janojen ja kulmien yhtenevyyden yhteydessä on nyt pisteiden järjestyksellä väliä: voi olla $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ja $\triangle ABC \ncong \triangle EDF$, vaikka vastaavat pistejoukot ovatkin samat. (Samat kärjet, mutta mahdollisesti eri järjestyksessä; samat sisäpuolet.)



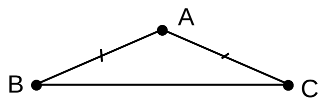
Kuva 44: Kolmioiden yhtenevyys riippuu järjestyksestä

(H13) (**Sivu-kulma-sivu -sääntö, SKS**) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Esimerkki 8. Koordinaattigeometria toteuttaa myös aksiooman (H13). (Totea!)

Huomautus 15. Eukleides esitti sivu-kulma-sivu -säännön lauseena ja yritti todistaa sen aksioomien avulla. Se ei kuitenkaan onnistu, vaan SKS on otettava aksioomaksi. Sen avulla todistetaan helposti Pappuksen[14] mukaan nimetty tulos, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat ovat yhtenevät. Käänteinen implikaatio, jonka mukaan kantakulmien yhtenevyys myös takaa tasakylkisyyden, on myös voimassa samoin ehdoin, mutta käytännössä hankalampi todistaa. Jätämme sen harjoitustehtäväksi, joka on helppo, kunhan käytössä on lause 2.4.9 eli KSK -sääntö.

LAUSE 2.4.1. (**Pappus**) *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio siten, että $AB \cong AC$. Tällöin $\measuredangle B \cong \measuredangle C$.*



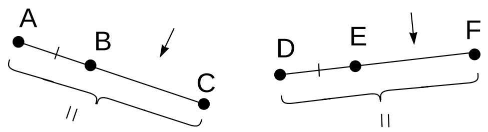
Kuva 45: Tasakylkinen kolmio

[14] Pappus Aleksandrialainen 290– n. 350 Egypti.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita $\triangle ABC$ ja $\triangle ACB$. Koska kulmassa ei ole väliä kylkien järjestyksellä, kulmat $\measuredangle BAC$ ja $\measuredangle CAB$ ovat sama kulma $\measuredangle A$. (H12):n mukaan kulmien yhtenevyys on refleksiivinen relaatio, joten $\measuredangle A \cong \measuredangle A$ kummallekin kolmiolle eli $(\measuredangle A)_1 = (\measuredangle A)_2$, missä alaindeksi 1 viittaa kolmioon $\triangle ABC$ ja 2 kolmioon $\triangle ACB$. Oletuksen nojalla $AB \cong AC$, joten $(AB)_1 \cong (AC)_2$ ja $(AB)_2 \cong (AC)_1$. Koska janojen yhtenevyys on symmetrinen relaatio, niin $(AC)_1 \cong (AB)_2$. Näin kaikki sivu-kulma-sivu -säännön oletukset ovat voimassa, joten $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ ja erityisesti $(\measuredangle B)_1 \cong (\measuredangle C)_2$ eli $\measuredangle B \cong \measuredangle C$. □

Aksiooma (H10) antaa luvan laskea janoja yhteen. Siihen perustuu janojen vertailu ja viime kädessä myös pituuden käsite. Huomataan aluksi, että janoja voidaan vähentää toisistaan seuraavien kahden lauseen merkityksessä.

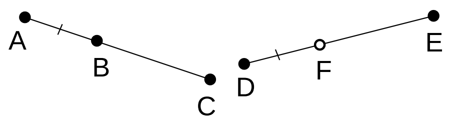
LAUSE 2.4.2. *Olkoot $A * B * C$, $D * E * F$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $BC \cong EF$.*



Kuva 46: Janojen vähennyslasku

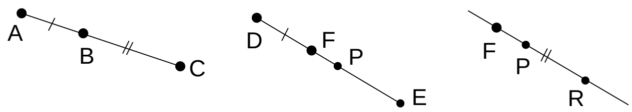
Todistus. Perustelu jää harjoitustehtäväksi. □

LAUSE 2.4.3. *Olkoot $A * B * C$ ja $AC \cong DE$. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi piste F siten, että $D * F * E$ ja $AB \cong DF$.*



Kuva 47: Janan jakaminen

Todistus. Aksiooman (H8) nojalla puolisuoralla $\overrightarrow{DE}$ on yksikäsitteinen piste $F \neq D$ siten, että $AB \cong DF$. Riittää siis osoittaa, että $D * F * E$. Tehdään antiteesi, että näin ei ole. Silloin joko $D * E * F$ tai $F = E$, sillä $F \in \overrightarrow{DE} \setminus \{D\}$. Kummassakin tapauksessa valitaan P siten, että $D * F * P$, ja edelleen aksiooman (H8) nojalla $R \in \overrightarrow{FP} \setminus \{F\}$ siten, että $FR \cong BC$.

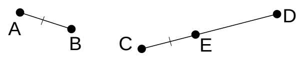


Kuva 48: Lauseen 2.4.3 todistus

Nyt pätee $R \in \overrightarrow{DE} \setminus \{D\}$, minkä päättelemme seuraavasti: Lauseen 2.3.8 nojalla saadaan ensin $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FR}$ ja sitten tiedon $D * F * P$ nojalla $D * F * R$. Nyt voidaan päätellä $D * E * R$ joko suoraan tapauksessa $F = E$ tai lauseen 2.3.4 kohdan (i) nojalla tapauksessa $D * E * F$ ja todellakin $R \in \overrightarrow{DE} \setminus \{D\}$.

Nyt siis $AB \cong DF$ ja $BC \cong FR$. Koska oletuksen mukaan $A * B * C$ ja, kuten yllä todettiin, $D * F * R$, niin aksioomaa (H10) käyttäen saadaan $AC \cong DR$. Koska oletuksen mukaan $AC \cong DE$ ja nyt siis $R \in \overrightarrow{DE} \setminus \{D\}$, niin aksiooman (H8) yksikäsitteisyysväittämän nojalla onkin $R = E$. Tämä on mahdotonta, koska $D * E * R$. Siten $D * F * E$. □

Määritelmä 2.13. Olkoot AB ja CD janoja. Sanomme, että *jana AB on lyhyempi kuin jana CD*, jos on olemassa piste E siten, että $C * E * D$ ja $AB \cong CE$. Tällöin merkitsemme $AB < CD$.



Kuva 49: Lyhyempi jana

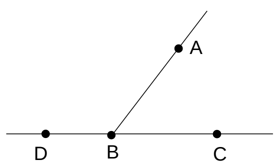
LAUSE 2.4.4. *Olkoot AB, CD ja EF janoja.*

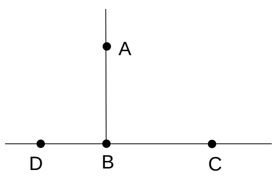
(i) *Jos $AB < CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB < EF$.*
(ii) *Jos $AB \cong CD$ ja $CD < EF$, niin $AB < EF$.*
(iii) *Jos $AB < CD$ ja $CD < EF$, niin $AB < EF$.*
(iv) *Tasan yksi seuraavista on voimassa:*

$$AB < CD, \; AB \cong CD \text{ tai } CD < AB.$$

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Määritelmä 2.14. Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma ja $D * B * C$. Sanomme, että kulma $\measuredangle DBA$ on kulman $\measuredangle ABC$ *täydennyskulma.* Jos lisäksi $\measuredangle DBA \cong \measuredangle ABC$, niin sanomme, että kulma $\measuredangle ABC$ on *suora kulma.*





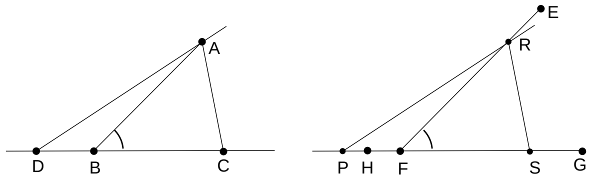
Kuvat 50 ja 51: Täydennyskulma ja suora kulma

Huomautus 16. Täydennyskulman määritelmä on sikäli järkevä, että $\measuredangle DBA$ on myös kulma, sillä A ei voi olla suoralla $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{DB}$.

Määritelmästä näemme heti, että kulma on täydennyskulmansa täydennyskulma, joten voimme sanoa, että kulmat $\measuredangle DBA$ ja $\measuredangle ABC$ ovat *toistensa täydennyskulmia.* Aksiooman (H12) perusteella suoran kulman täydennyskulma on suora kulma.

Seuraava lause sanoo, että yhtenevien kulmien täydennyskulmat ovat yhtenevät.

LAUSE 2.4.5. *Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle EFG$ kulmia sekä $\measuredangle DBA$ ja $\measuredangle HFE$ vastaavia täydennyskulmia ja olkoon lisäksi $\measuredangle ABC \cong \measuredangle EFG$. Tällöin myös $\measuredangle DBA \cong \measuredangle HFE$.*



KUVA 52: YHTENEVIEN KULMIEN TÄYDENNYSKULMAT

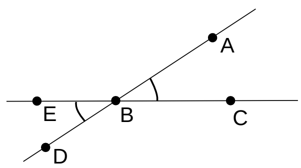
Todistus. Aksiooman (H8) nojalla on olemassa pisteet P, R ja S siten, että $P \in \overrightarrow{FH}$ ja $FP \cong BD$, $R \in \overrightarrow{FE}$ ja $FR \cong BA$ sekä $S \in \overrightarrow{FG}$ ja $FS \cong BC$. Lauseen 2.3.8 mukaan $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{FR} = \overrightarrow{FE}$ ja $\overrightarrow{FS} = \overrightarrow{FG}$, joten $\measuredangle HFE = \measuredangle PFR$ ja $\measuredangle EFG = \measuredangle RFS$. Koska $\measuredangle ABC$ on kulma, niin $\triangle ABC$ on kolmio ja vastaavasti $\triangle RFS$ on kolmio. Oletuksen ja pisteiden R ja S valinnan perusteella voimme soveltaa SKS-sääntöä, jolloin saamme, että $\triangle ABC \cong \triangle RFS$. Erityisesti tällöin (a) $\measuredangle BCA \cong \measuredangle FSR$ ja (b) $AC \cong RS$.

Täydennyskulman määritelmän mukaan $D * B * C$ ja $H * F * G$, jolloin myös $P * F * S$ ja siten $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SP}$, joista edelleen $\measuredangle BCA = \measuredangle DCA$ ja $\measuredangle FSR = \measuredangle PSR$. Nyt (H12):n ja (a):n nojalla (c) $\measuredangle DCA \cong \measuredangle PSR$. Koska nyt siis $D * B * C$ ja $P * F * S$ sekä $DB \cong PF$ ja $BC \cong FS$ (P:n ja S:n valinnan takia), niin aksiooman (H10) nojalla (d) $DC \cong PS$.

Ehdot (b), (c) ja (d) yhdessä SKS-säännön kanssa takaavat, että $\triangle DCA \cong \triangle PSR$. Erityisesti tällöin $\measuredangle ADC \cong \measuredangle RPS$ eli $\measuredangle ADB \cong \measuredangle RPF$ (lause 2.3.8) ja lisäksi $AD \cong RP$. Koska vielä $DB \cong PF$ pisteen P valinnan perusteella, niin SKS-sääntöä saadaan soveltaa myös kolmioihin $\triangle ADB$ ja $\triangle RPF$. Silloin saamme, että ne ovat yhteneviä, jolloin erityisesti $\measuredangle DBA \cong \measuredangle PFR$. Koska $\measuredangle PFR = \measuredangle HFE$, niin väite seuraa aksioomasta (H12). $\square$

Nyt saamme helposti tuloksen, että ”ristikulmat ovat yhtenevät”. Seuraavan lauseen perustelu on helppo harjoitustehtävä.

LAUSE 2.4.6. *Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma ja $D*B*A$ sekä $E*B*C$. Tällöin $\measuredangle EBD \cong \measuredangle ABC$.*



KUVA 53: RISTIKULMAT

Huomautus 17. Kuten huomautuksessa 16 totesimme, suoran kulman täydennyskulma on suora. Pätee enemmänkin: Lauseen 2.4.7 mukaan jokainen suoran kulman kanssa yhtenevä kulma on suora. Lauseen 2.4.7 käänteinen versio on lause 2.4.14, jonka mukaan kaikki suorat kulmat ovat yhteneviä. Tässä vaiheessa tämä on kuitenkin vaikeampi todistaa kuin lause 2.4.7. Kokeile!

LAUSE 2.4.7. *Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kulmia siten, että $\measuredangle DEF$ on suora ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$. Tällöin myös $\measuredangle ABC$ on suora.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

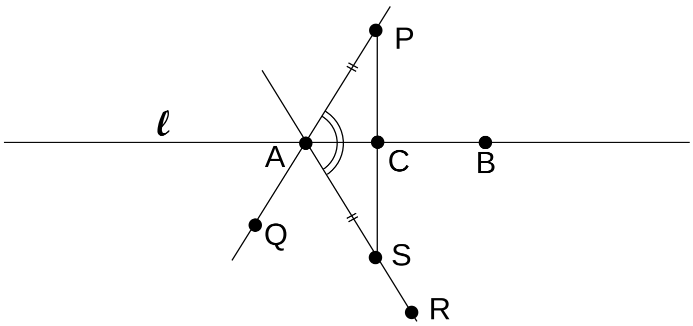
Määritelmä 2.15. Olkoot $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{AC}$ kaksi eri suoraa, jotka leikkaavat pisteessä A siten, että kulma $\measuredangle BAC$ on suora. Tällöin sanomme, että suora $\overleftrightarrow{AC}$ on suoran $\overleftrightarrow{AB}$ *normaali* ja merkitsemme $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

Huomautus 18. Jos suora ℓ on suoran m normaali, niin määritelmän nojalla myös m on suoran ℓ normaali.

Nyt voimme todistaa, että pisteen kautta kulkee annetun suoran normaali.

LAUSE 2.4.8. *Olkoon ℓ suora ja P piste. Tällöin on olemassa suoran ℓ normaali, joka kulkee pisteen P kautta.*

Todistus. On vain kaksi mahdollisuutta: joko ℓ ei kulje pisteen P kautta tai ℓ kulkee P:n kautta. Oletetaan ensin ensimmäinen.



KUVA 54: NORMAALI SUORALLE KUULUMATTOMAN PISTEEN KAUTTA

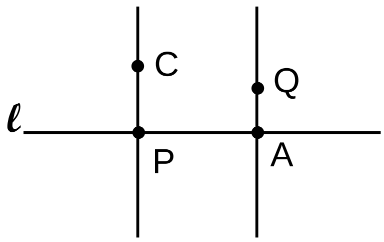
Valitaan ensin suoralta ℓ eri pisteet A ja B, sitten suoralta $\overleftrightarrow{AP}$ piste Q siten, että $P*A*Q$. (H11):n nojalla on olemassa piste R siten, että $QR\ell$ ja $\measuredangle PAB \cong \measuredangle RAB$. Aksiooman (H8) perusteella on olemassa $S \in \overrightarrow{AR} \setminus \{A\}$ siten, että $AP \cong AS$. Nyt $SR\ell$, sillä $\overleftrightarrow{RS}$ voi leikata suoraa ℓ vain pisteessä A ja ei voi olla $A \in RS$ (vrt. lause 2.3.8). Koska $RQ\ell$ niin (H7):n kohdan (i) nojalla $SQ\ell$. Q:n valinnan nojalla $Q\ell P$, joten lauseen 2.3.2 mukaan $S\ell P$. Määritelmän mukaan tällöin janalla SP on jokin suoran ℓ piste C. Nyt joko (i) $C = A$ tai (ii) $C \neq A$.

Tapauksessa (i) $P * A * S$ ja kulmat $\measuredangle PAB$ ja $\measuredangle SAB$ ovat siten toistensa täydennyskulmia. Lauseen 2.3.8 nojalla $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AR}$, joten $\measuredangle SAB = \measuredangle RAB$. Siis $\measuredangle PAB \cong \measuredangle SAB$, eli $\measuredangle PAB$ on yhtenevä täydennyskulmansa kanssa ja siten suora.

Tapauksessa (ii) on $A \neq C$, jolloin $\triangle PAC$ ja $\triangle SAC$ ovat kolmioita. Niissä pätee $AC \cong AC$ ja $AP \cong AS$. Lisäksi on voimassa (a) $\measuredangle PAC \cong \measuredangle SAC$, sillä joko $C \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ jolloin $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ ja (a) seuraa R:n valinnasta ($\measuredangle SAC \cong \measuredangle RAC$) tai sitten $C * A * B$ jolloin (a) seuraa R:n valinnasta (josta saadaan $\measuredangle PAB \cong \measuredangle SAB$) ja lauseesta 2.4.5.

Nyt siis SKS-sääntöä kolmioihin $\triangle PAC$ ja $\triangle SAC$ soveltamalla saamme, että $\triangle PAC \cong \triangle SAC$. Erityisesti $\measuredangle PCA \cong \measuredangle SCA$. Koska $P * C * S$, niin nämä ovat toistensa täydennyskulmia. Koska ne ovat yhteneviä, on $\measuredangle PCA$ suora ja siten $\overleftrightarrow{PC}$ on suoran ℓ normaali.

Oletetaan seuraavaksi, että suora ℓ kulkee pisteen P kautta.

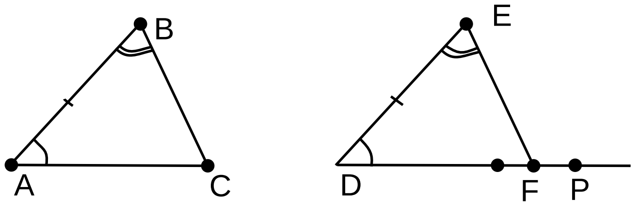


Kuva 55: Normaali suoralle kuuluvan pisteen kautta

Valitaan piste Q siten, että ℓ ei kulje sen kautta. Silloin jo todistetun tapauksen nojalla pisteen Q kautta kulkee jokin suoran ℓ normaali; leikatkoon se suoraa ℓ pisteessä A. Jos $A = P$, on asia selvä. Olkoon siis $A \neq P$. Tällöin kulma $\measuredangle PAQ$ on suora. Aksiooman (H11) nojalla on olemassa piste C, jonka kautta ℓ ei kulje, siten, että $\measuredangle CPA \cong \measuredangle PAQ$. Lauseen 2.4.7 perusteella myös kulma $\measuredangle CPA$ on suora ja siten $\overleftrightarrow{CP}$ on suoran ℓ normaali. □

Huomautus 19. Lauseen 2.4.8 vahvennus väittää, että pisteen P kautta kulkee **vain yksi** suoran ℓ normaali. Tämän osoittaminen on kuitenkin nyt vielä vaikeahkoa, ja niin jätämme sen tehtäväksi vasta myöhemmin kohdassa 2.4.16.

LAUSE 2.4.9 (KSK-sääntö). *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $AB \cong DE$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*



Kuva 56: KSK-sääntö

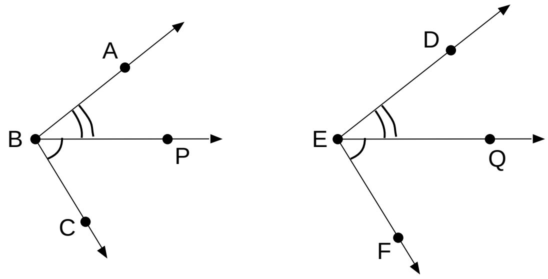
Todistus. Aksiooman (H8) nojalla on olemassa $P \in \overrightarrow{DF} \setminus \{D\}$ siten, että $AC \cong DP$. Osoitetaan, että $P = F$, jolloin $AC \cong AF$ ja väite seuraa SKS-säännöstä.

Koska $\triangle DEP$ on kolmio, saamme soveltaa sivu-kulma-sivu -sääntöä kolmioihin $\triangle BAC$ ja $\triangle EDP$, jolloin ne ovat yhteneviä. Erityisesti $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEP$. Oletuksen mukaan $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, joten $\measuredangle DEF \cong \measuredangle DEP$.

Koska $P \in \overrightarrow{DF} \setminus \{D\}$, niin $FP\overleftrightarrow{DE}$. Tällöin (H11):n yksikäsitteisyysosan nojalla $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EP}$. Siten $\overleftrightarrow{EF} = \overleftrightarrow{EP}$ ja sekä P että F sisältyvät tähän suoraan. Toisaalta P ja F sisältyvät myös suoraan $\overleftrightarrow{DF} \neq \overleftrightarrow{EF}$, joten P ja F ovat suorien $\overleftrightarrow{DF}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ leikkauspisteitä. Koska näitä leikkauspisteitä voi olla vain yksi, niin $P = F$. □

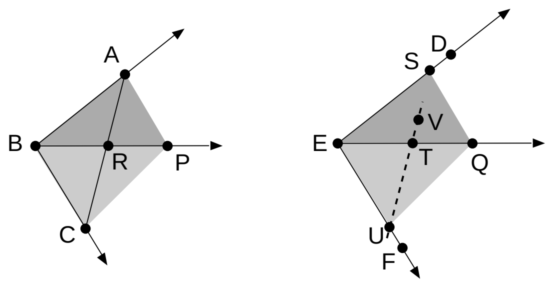
Seuraava tulos on aksiooman (H10) vastine kulmille, katso huomautus 13.

LAUSE 2.4.10. *Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kulmia sekä pisteet P ja Q sellaisia, että puolisuora $\overrightarrow{BP}$ on puolisuorien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ välissä ja vastaavasti puolisuora $\overrightarrow{EQ}$ on puolisuorien $\overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EF}$ välissä. Olkoon vielä $\measuredangle ABP \cong \measuredangle DEQ$ ja $\measuredangle PBC \cong \measuredangle QEF$. Tällöin $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$.*



KUVA 57: AKSIOOMAN (H10) VASTINE KULMILLE

Todistus. Oletuksen ja lauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{BP}$ leikkaa janaa AC jossakin pisteessä R siten, että $A * R * C$. (H8):n nojalla puolisuorilla $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EQ}$ ja $\overrightarrow{EF}$ on pisteet S, T ja U siten, että $ES \cong BA$, $ET \cong BR$ ja $EU \cong BC$. Silloin oletuksen ja SKS-säännön nojalla $\triangle SET \cong \triangle ABR$ ja $\triangle TEU \cong \triangle RBC$. Erityisesti siis $\measuredangle BAR \cong \measuredangle EST$, $\measuredangle BCR \cong \measuredangle EUT$, $AR \cong ST$ ja $RC \cong TU$.



KUVA 58: LAUSEEN 2.4.10 TODISTUS

Pyrimme päättelemään seuraavaksi (H10):n avulla, että $AC \cong SU$, jolloin KSK-sääntöä voitaisiin soveltaa kolmioihin $\triangle ABC$ ja $\triangle SEU$. Tässä on kuitenkin se vaikeus, että emme tiedä, ovatko S, U ja T samalla suoralla. Kuvassa niin näyttää olevan, mutta todistus tarvitaan.

Valitaan piste V siten, että $V * T * U$, jolloin $\measuredangle VTE$ ja $\measuredangle UTE$ ovat toistensa täydennyskulmia. Samoin, koska $A * R * C$, ovat $\measuredangle CRB$ ja $\measuredangle ARB$ toistensa täydennyskulmia. Koska nyt $\triangle CRB \cong \triangle UTE$, niin $\measuredangle UTE \cong \measuredangle CRB$, jolloin lauseen 2.4.5 nojalla myös $\measuredangle VTE \cong \measuredangle ARB$. Koska $\triangle SET \cong \triangle ARB$, niin $\measuredangle ARB \cong \measuredangle STE$. Siten $\measuredangle VTE \cong \measuredangle STE$.

Koska $T \in \overrightarrow{EQ} \setminus \{E\}$, niin $\overrightarrow{ET} = \overrightarrow{EQ}$. Tällöin oletuksen ja lauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{ET}$ leikkaa janaa SU ja saadaan $\overleftrightarrow{SETU}$. Koska pätee $V * T * U$, niin myös $\overleftrightarrow{VETU}$ ja siten $\overleftrightarrow{VSET}$. Tuo seikka yhdessä kulmien $\measuredangle VTE$ ja $\measuredangle STE$ yhtenevyyden ja (H11):n yksikäsitteisyysosan kanssa antaa, että $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TS}$.

Piste V sisältyy suoraan $\overleftrightarrow{TU}$ ja siten lauseen 2.3.1 kohdan (b) nojalla kaikki puolisuoran $\overrightarrow{TV}$ pisteet sisältyvät suoraan $\overleftrightarrow{TU}$. Siis myös piste $S \in \overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TV}$. Siten pisteet T, U ja S ovat kaikki samalla suoralla $\overleftrightarrow{TU}$. Koska pätee $\overleftrightarrow{SETU}$, niin $S*T*U$. Nyt voidaan päättää todistus suunnitellusti. Koska $A * R * C$, $S * T * U$, $AR \cong ST$

ja $RC \cong TU$, niin (H10):n nojalla $AC \cong SU$, jolloin kulma-sivu-kulma -säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle SEU$. Erityisesti $\measuredangle ABC \cong \measuredangle SEU$. Koska $S \in \overrightarrow{ED} \setminus \{E\}$ ja $U \in \overrightarrow{EF} \setminus \{F\}$, niin $\overrightarrow{ES} = \overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EU} = \overrightarrow{EF}$. Siten $\measuredangle SEU = \measuredangle DEF$, ja lopulta saamme $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$. □

Seuraava tulos on lauseen 2.4.2 vastine kulmille.

LAUSE 2.4.11. *Olkoot puolisuoria $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EQ}$, $\overrightarrow{EF}$ koskevat oletukset kuten lauseessa 2.4.10. Oletetaan lisäksi, että $\measuredangle ABP \cong \measuredangle DEQ$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$. Tällöin $\measuredangle PBC \cong \measuredangle QEF$.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Kuten janoja voidaan myös kulmia vertailla:

Määritelmä 2.16. Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kulmia. Sanomme, että kulma $\measuredangle ABC$ *on pienempi kuin kulma* $\measuredangle DEF$ ja merkitsemme $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$, jos puolisuorien $\overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EF}$ välissä on puolisuora $\overrightarrow{EG}$ siten, että $\measuredangle ABC \cong \measuredangle GEF$.

Lauseen 2.4.4 vastine kulmille on myös voimassa:

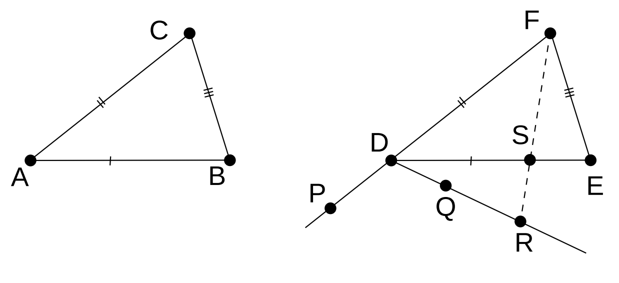
LAUSE 2.4.12. *Olkoot $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ kulmia. Tällöin*

(i) *Jos $\measuredangle A < \measuredangle B$ ja $\measuredangle B \cong \measuredangle C$, niin $\measuredangle A < \measuredangle C$.*
(ii) *Jos $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ ja $\measuredangle B < \measuredangle C$, niin $\measuredangle A < \measuredangle C$.*
(iii) *Jos $\measuredangle A < \measuredangle B$ ja $\measuredangle B < \measuredangle C$, niin $\measuredangle A < \measuredangle C$.*
(iv) *Tasan yksi seuraavista pätee: $\measuredangle A < \measuredangle B$, $\quad \measuredangle A \cong \measuredangle B \quad$ tai $\quad \measuredangle B < \measuredangle A$.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

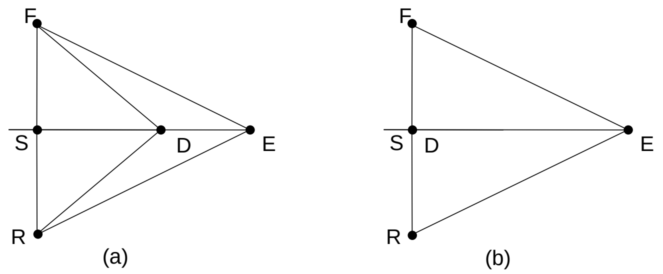
LAUSE 2.4.13 (SSS-sääntö.). *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ ja $CA \cong FD$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Todistus. Valitaan piste P siten, että $P * D * F$ ja edelleen (H11):n nojalla piste Q siten, että $PQ\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle QDE \cong \measuredangle CAB$. Olkoon edelleen (H8):n mukainen piste $R \in \overrightarrow{DQ}$ siten, että $DR \cong AC$. Nyt $P\overleftrightarrow{DE}F$, joten lauseen 2.3.2 nojalla $Q\overleftrightarrow{DE}F$. Koska $R \in \overrightarrow{DQ} \setminus \{D\}$, niin $QR\overleftrightarrow{DE}$ ja lauseen 2.3.2 nojalla myös $R\overleftrightarrow{DE}F$. Siten suora $\overleftrightarrow{DE}$ leikkaa janaa RF jossakin pisteessä S, joka toteuttaa ehdon $R * S * F$.



KUVA 59: SSS-SÄÄNTÖ

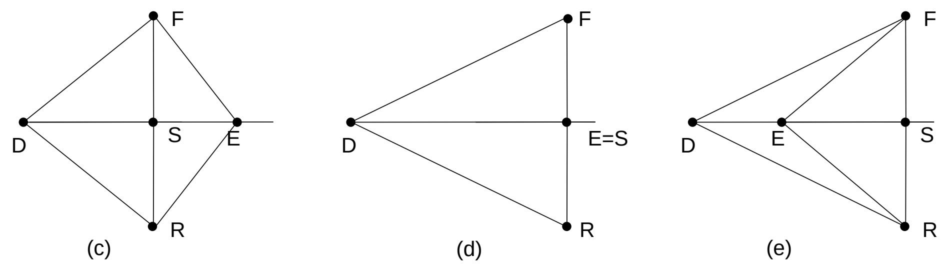
Nyt on vain viisi mahdollisuutta: (a) $S * D * E$, (b) $S = D$, (c) $D * S * E$, (d) $S = E$ tai (e) $D * E * S$. Kaikissa näissä tapauksissa saamme oletuksen, pisteen R valinnan ja SKS-säännön avulla, että $\triangle ABC \cong \triangle DER$. Erityisesti $BC \cong ER$, jolloin oletuksen ja (H9):n nojalla $EF \cong ER$. Toisaalta oletuksen ja R:n valinnan nojalla $DR \cong AC \cong DF$, joten (H9):n nojalla $DF \cong DR$.



Kuva 60: Tapaukset (a) ja (b)

Tapaus (a) eli $S*D*E$. Nyt $S \neq E$ ja siten $\triangle FRE$ on kolmio. Koska $EF \cong ER$, niin lauseen 2.4.1 nojalla $(*)$ $\measuredangle FRE \cong \measuredangle RFE$. Vastaavasti $S \neq D$, joten $\triangle FRD$ on kolmio, jossa $DF \cong DR$, jolloin lauseen 2.4.1 nojalla $(**)$ $\measuredangle FRD \cong \measuredangle RFD$. Koska $R*S*F$, niin $\measuredangle FRE \cong \measuredangle SRE$. Toisaalta $S*D*E$, joten lauseen 2.3.9 nojalla D on kulman $\measuredangle SRE = \measuredangle FRE$ sisäpuolella eli $\overrightarrow{RD}$ on puolisuorien $\overrightarrow{RF}$ ja $\overrightarrow{RE}$ välissä. Vastaavasti päätellään, että $\overrightarrow{FD}$ on puolisuorien $\overrightarrow{FR}$ ja $\overrightarrow{FE}$ välissä. Nyt seikkojen $(*)$ ja $(**)$ sekä lauseen 2.4.11 nojalla $\measuredangle DFE \cong \measuredangle DRE$. Koska $\triangle ABC \cong \triangle DER$, niin $\measuredangle DRE \cong \measuredangle ACB$ ja siten (H12):n mukaan $\measuredangle ACB \cong \measuredangle DFE$. Nyt oletus yhdessä SKS-säännön avulla antaa, että $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Tapaus (b) eli $S = D$: Nyt $R * D * F$, jolloin $\measuredangle DFE = \measuredangle RFE$ ja $\measuredangle DRE = \measuredangle FRE$. Kuten tapauksessa (a) nähdään, että $\measuredangle RFE \cong \measuredangle FRE$, joten $\measuredangle DFE \cong \measuredangle DRE$. Tästä väite seuraa kuten tapauksessa (a). Tapaus (c) eli $D*S*E$: Samoin kuin tapauksessa (a) saamme, että $\measuredangle FRE \cong \measuredangle RFE$ ja $\measuredangle FRD = \measuredangle RFD$, mutta nyt $\overrightarrow{RF}$ on puolisuorien $\overrightarrow{RD}$ ja $\overrightarrow{RE}$ välissä sekä $\overrightarrow{FR}$ on puolisuorien $\overrightarrow{FD}$ ja $\overrightarrow{FE}$ välissä. Tästä voimme edetä samoin kuin tapauksessa (a) paitsi että lauseen 2.4.11 sijasta käytämme lausetta 2.4.10.



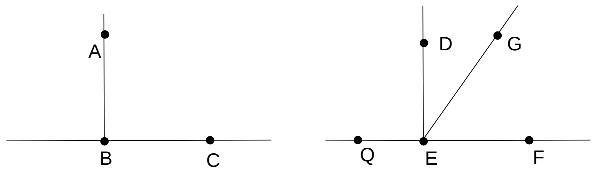
Kuva 61: Tapaukset (c), (d) ja (e)

Tapaus (d) menee kuten tapaus (b); tapaus (e) taasen samoin kuin (a). □

Eukleideen neljäs aksiooma lausui, että kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria. Tämän voimme nyt muotoilla täsmällisesti ja todistaa lauseena (vertaa myös lauseeseen 2.4.7 ja huomautukseen 16 sen jälkeen).

LAUSE 2.4.14. *Olkoot kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ suoria. Tällöin $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$.*

Todistus. Oletetaan antiteesina, että $\measuredangle ABC \ncong \measuredangle DEF$. Tällöin lauseen 2.4.12 kohdan (iii) nojalla joko $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$ tai $\measuredangle DEF < \measuredangle ABC$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla saamme olettaa, että $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$. Valitaan piste Q siten, että $Q * E * F$, jolloin $\measuredangle DEQ$ on kulman DEF täydennyskulma ja siten suoran kulman määritelmän mukaan $\measuredangle DEQ \cong \measuredangle DEF$.

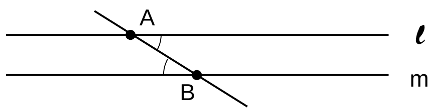


KUVA 62: SUORAT KULMAT OVAT YHTÄSUURET

Tällöin puolisuorien $\overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EF}$ välissä on puolisuora $\overrightarrow{EG}$ siten, että $\measuredangle ABC \cong \measuredangle GEF$. Oletuksen ja lauseen 2.4.7 nojalla myös $\measuredangle GEF$ on suora ja siten yhtenevä täydennyskulmansa kanssa. Nyt siis G on kulman $\measuredangle DEF$ sisäpuolella. Koska lisäksi $Q * E * F$, niin lauseen 2.3.10 kohdan (iii) nojalla D on kulman $\measuredangle GEQ$ sisäpuolella eli $\overrightarrow{ED}$ on puolisuorien $\overrightarrow{EQ}$ ja $\overrightarrow{EG}$ välissä. Täten $\measuredangle DEQ < \measuredangle GEQ$.

Tiedämme siis, että $\measuredangle GEF \cong \measuredangle ABC < \measuredangle DEF \cong \measuredangle DEQ < \measuredangle GEQ \cong \measuredangle GEF$, mistä lauseen 2.4.12 kohtien (i) ja (ii) nojalla saamme, että $\measuredangle GEF < \measuredangle GEF$. Koska toisaalta $\measuredangle GEF \cong \measuredangle GEF$, niin lauseen 2.4.12 kohta (iii) antaa ristiriidan. □

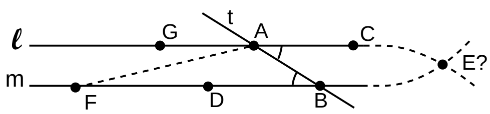
Seuraavassa kuvassa on mielenkiintoinen ongelma:



KUVA 63: "VUOROKULMAONGELMA"

Jos $\ell \parallel m$, niin onko $\measuredangle A \cong \measuredangle B$? Entä jos $\measuredangle A \cong \measuredangle B$, niin onko $\ell \parallel m$? Voisi luulla, että kumpikin implikaatio pätisi, ja todistammekin jälkimmäisen lauseena 2.4.15, mutta Poincarén malli (luku IV) osoittaa, että ensimmäistä ei voida todistaa pelkästään Hilbertin aksioomien (H1)–(H13) avulla. Euklidisessa geometriassa yhtäpitävyys kuitenkin pätee — katso lause 3.1.4.

LAUSE 2.4.15. (**Vuorokulmalause**) *Olkoot $\ell = \overleftrightarrow{AC}$ ja $m = \overleftrightarrow{BD}$ kaksi eri suoraa, $t = \overleftrightarrow{AB}$, CtD ja $\measuredangle CAB \cong \measuredangle DBA$. Tällöin suorat ℓ ja m ovat yhdensuuntaisia.*



KUVA 64: RIITTÄVÄ YHDENSUUNTAISUUSEHTO

Todistus. Oletetaan antiteesina, että $\ell \nparallel m$. Silloin ℓ ja m leikkaavat jossakin pisteessä E. Leikkauspiste E ei voi olla suoralla $t = \overleftrightarrow{AB}$, joten joko (a) ECt tai (b) EtC.

Tapaus (a): Valitaan $F \in \overrightarrow{BD}$ siten, että $BF \cong AE$. Tällöin $\triangle AEB$ ja $\triangle BFA$ ovat kolmioita, jotka oletuksen ja SKS-säännön nojalla ovat yhteneviä. Siis erityisesti

$$(*) \qquad \measuredangle FAB \cong \measuredangle EBA.$$

Koska ECt ja CtD, niin lauseen 2.3.2 nojalla DtE. Koska D, B ja E ovat suoran m pisteitä, pätee nyt $D * B * E$. Siten $\measuredangle ABE$ on kulman $\measuredangle DBA$ täydennyskulma. Valitaan piste G siten, että $G * A * C$, jolloin $\measuredangle GAB$ on kulman $\measuredangle CAB$ täydennyskulma. Nyt oletuksen ja lauseen 2.4.5 nojalla saamme, että $\measuredangle GAB \cong \measuredangle ABE$. Tällöin seikan $(*)$ nojalla pätee

$$(**) \qquad \measuredangle GAB \cong \measuredangle FAB.$$

Koska nyt $G * A * C$, niin GtC. Toisaalta CtD, joten GDt. Koska $F \in \overrightarrow{BD}$, niin FDt ja tällöin FGt. Mutta nyt $(**)$ voi (H11):n yksikäsitteisyysosan mukaan päteä vain, jos $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AG}$. Siten $F \in \overrightarrow{AG}$, joten F on suoran ℓ piste. Toisaalta $F \in \overrightarrow{AG}$ on myös suoran m piste, joten F on suorien m ja ℓ leikkauspiste. Siten $E = F$ (muuten olisi $\ell = m$), mutta se on mahdotonta, sillä FDt ja EtD.

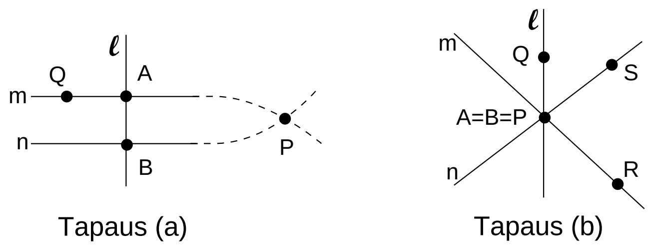
Tapaus (b) eli EtC: Oletuksen nojalla nyt EDt, joten todistus käy kuin tapauksessa (a) vaihtamalla merkintöjä $((\ell, A, C)$ vs. $(m, B, D).)$. □

Huomautus 20. Lause 2.4.15 tekee helpohkoksi todistaa seuraavan lauseen normaalin yksikäsitteisyydestä.

LAUSE 2.4.16. *Olkoon ℓ suora ja P piste. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi suoran ℓ normaali, joka kulkee pisteen P kautta.*

Todistus. Lauseen 2.4.8 nojalla normaaleja on olemassa ainakin yksi, joten riittää osoittaa, että enempää niitä ei voi olla. Olkoot siis m ja n pisteen P kautta kulkevia suoran ℓ normaaleja. On näytettävä, että $m = n$. Oletetaan antiteesina, että $m \neq n$.

Olkoon piste A suorien ℓ ja m leikkauspiste ja B suorien ℓ ja n leikkauspiste. Nyt on vain kaksi mahdollisuutta: joko (a) $A \neq B$ tai (b) $A = B$.



Kuva 65: Suoralla ℓ on vain yksi normaali pisteen P kautta

Oletetaan aluksi (a) eli $A \neq B$. Tällöin $A \neq P \neq B$. Valitaan Q siten, että $P * A * Q$, jolloin $P\ell Q$ ja normaalin määritelmän mukaan kulmat $\measuredangle QAB$ ja $\measuredangle PBA$ ovat suoria. Lauseen 2.4.14 mukaan nyt $\measuredangle QAB \cong \measuredangle PBA$. Täten lauseen 2.4.15 oletukset toteutuvat ja niin $m \parallel n$, joten m ja n eivät leikkaa toisiaan, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että m ja n kulkevat pisteen P kautta.

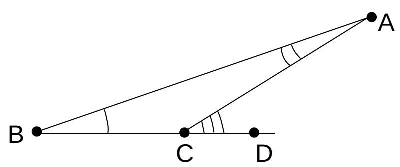
Tapaus (b) eli $A = B$: Nyt $A = B = P$. Valitaan suoran ℓ piste $Q \neq P$ ja suoran m piste $R \neq P$ sekä suoran n piste $S \neq P$ siten, että RSl. (Mieti, miksi tämä onnistuu.) Nyt kulmat $\measuredangle QPR$ ja $\measuredangle QPS$ ovat suoria ja siten lauseen 2.4.14 mukaan yhteneviä. Tämä on aksiooman (H11) yksikäsitteisyysosan nojalla mahdollista vain kun $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$, jolloin $m = \overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{PS} = n$. Ristiriita. □

LAUSE 2.4.17. *Olkoon ℓ suora sekä m ja n sen eri normaaleja. Tällöin $m \parallel n$.*
Todistus. Perustelu on helppo harjoitustehtävä. □

Paralleeliaksiooma sanoo, että suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi tuon suoran suuntainen suora. Tätä ei voi aksioomista (H1)–(H13) todistaa. Sen sijaan saadaan heikompi tulos, joka sanoo, että tuollaisia suoria on ainakin yksi.

LAUSE 2.4.18. *Olkoon ℓ suora ja P piste, jonka kautta ℓ ei kulje. Silloin on olemassa ainakin yksi suora, joka on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa ja joka kulkee pisteen P kautta.*
Todistus. Perustelu lauseen 2.4.17 avulla on sopiva harjoitustehtävä. □

Seuraava lause on hyvin tärkeä. Se kertoo, että kolmion "ulkokulma on suurempi kuin kumpikaan vastaavista sisäkulmista" eli kuvassa $\measuredangle B < \measuredangle ACD$ ja $\measuredangle A < \measuredangle ACD$. Huomaa, että ei (välttämättä) päde $\measuredangle C < \measuredangle ACD$.



KUVA 66: ULKOKULMAEPÄYHTÄLÖ

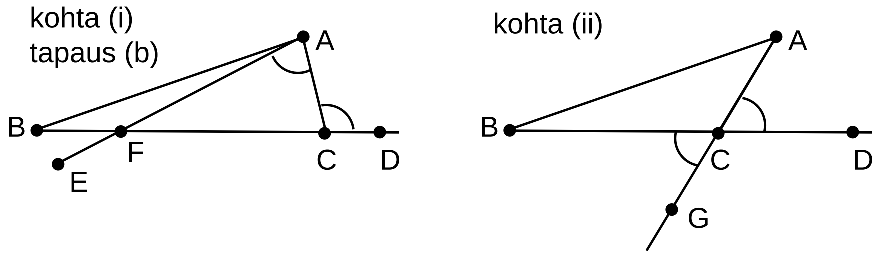
LAUSE 2.4.19 (Ulkokulmaepäyhtälö). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $B * C * D$. Tällöin*

(i) $\measuredangle A < \measuredangle ACD$,
(ii) $\measuredangle B < \measuredangle ACD$.

Todistus. Todistamme ensin kohdan (i). Antiteesi on $\measuredangle A \not< \measuredangle ACD$, jolloin lauseen 2.4.12 kohdan (iii) nojalla pätee joko (a) $\measuredangle A \cong \measuredangle ACD$ tai (b) $\measuredangle ACD < \measuredangle A$.

Olkoon ensin (a) voimassa. Koska lisäksi $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BC}$, $A \neq C$, $B\overleftrightarrow{AC}D$ ja $\measuredangle A = \measuredangle BAC$, niin lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Se on mahdotonta, koska nuo suorat leikkaavat pisteessä B.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta (b), jossa $\measuredangle ACD < \measuredangle BAC$, jolloin puolisuorien $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ välissä on puolisuora $\overrightarrow{AE}$ siten, että $\measuredangle EAC \cong \measuredangle ACD$. Lauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{AE}$ leikkaa janaa BC jossakin pisteessä F, jolloin $B * F * C$ ja $\measuredangle FAC = \measuredangle EAC$. Koska $B * C * D$, niin tällöin lauseen 2.3.4 kohdan (i) nojalla $F * C * D$, joten $F\overleftrightarrow{AC}D$. Koska lisäksi $\overleftrightarrow{AF} \neq \overleftrightarrow{CD}$, $A \neq C$ ja $\measuredangle FAC \cong \measuredangle ACD$, niin lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{AF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, mikä on mahdotonta, koska nuo suorat leikkaavat pisteessä F.



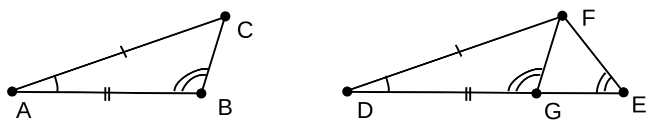
Kuva 67: Ulkokulmaepäyhtälön todistus

Todistamme kohdan (ii). Valitaan piste G siten, että $A * C * G$. Tällöin lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BCG$. Koska kohta (i) on jo todistettu, saamme soveltaa sitä kolmioon $\triangle BAC$. Silloin $\measuredangle B < \measuredangle BCG$. Väite seuraa nyt lauseen 2.4.12 kohdasta (i). □

Lause 2.4.19 antaa helposti seuraavan sivu-kulma-kulma -säännön.

LAUSE 2.4.20 (SKK-sääntö). *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $AC \cong DF$, $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ ja $\measuredangle B \cong \measuredangle E$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Todistus. Riittää osoittaa, että $AB \cong DE$, jolloin väite seuraa KSK- tai SKS-säännöstä. Oletetaan antiteesina, että $AB \not\cong DE$. Nyt lauseen 2.4.4 kohdan (iii) nojalla joko $AB < CD$ tai $CD < AB$. Tarvittaessa merkintöjä muuttamalla $((A, B, C)$ vs. $(D, E, F))$ voidaan olettaa, että $AB < DE$. Tällöin on olemassa piste G siten, että $D * G * E$ ja $AB \cong DG$.



Kuva 68: SKK-säännön todistus

Nyt $\triangle DFG$ on kolmio ja SKS-säännön nojalla kolmiot $\triangle DGF$ ja $\triangle ABC$ ovat yhteneviä. Niin $(*)$ $\measuredangle DGF \cong \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$. Sovelletaan ulkokulmaepäyhtälöä 2.4.19 (ii) kolmioon $\triangle FEG$, jolloin saamme, koska $D * G * E$, että $\measuredangle E < \measuredangle DGF$ eli $(**)$ $\measuredangle DEF < \measuredangle DGF$. Lauseen 2.4.12 kohdan (iii) nojalla $(*)$ ja $(**)$ eivät voi olla yht'aikaa voimassa, joten päädyimme ristiriitaan. □

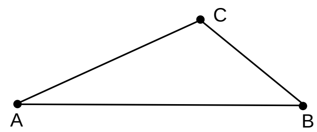
Aksioomana on siis SKS-sääntö ja lauseina olemme todistaneet KSK-, SSS- ja SKK-säännöt. Olisiko vielä muita? Koulutietojen mukaan KKK- ja SSK-säännöt eivät ainakaan näytä pätevän, ainakaan ilman lisäoletuksia.

LAUSE 2.4.21 (SSK-sääntö suorakulmaiselle kolmiolle). *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A$ ja $\measuredangle D$ ovat suoria. Olkoon lisäksi $AB \cong DE$ ja $BC \cong EF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Lauseen 2.4.19 avulla saamme myös seuraavan tärkeän tuloksen, joka sanoo, että kolmiossa suuremman kulman vastainen sivu on suurempi ja kääntäen.

LAUSE 2.4.22. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin $BC < AB$, jos ja vain jos $\measuredangle A < \measuredangle C$.*



Kuva 69: Suurempi kulma ja suurempi sivu

Todistus. Tarkastetaan ensin ehdon riittävyys; olkoon $\measuredangle A < \measuredangle C$. On osoitettava, että $BC < AB$. Oletetaan antiteesina, että $BC \not< AB$. Lauseen 2.4.4 kohdan (iii) nojalla tällöin joko (a) $BC \cong AB$ tai (b) $AB < BC$. Tapauksessa (a) saadaan heti lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle A \cong \measuredangle C$, mikä on oletuksen ja lauseen 2.4.12 kohdan (iii) nojalla mahdotonta.

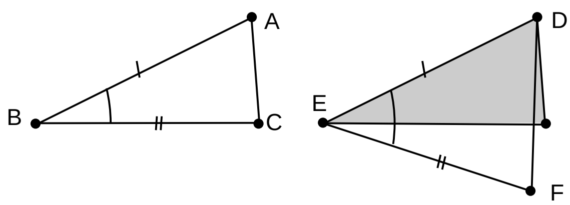
Tapaus (b) eli $AB < BC$: Tällöin on olemassa piste D siten, että $B * D * C$ ja $AB \cong BD$. Koska $B * D * C$, niin $\overrightarrow{AD}$ on puolisuorien $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{AB}$ välissä, joten $\measuredangle DAB < \measuredangle CAB$. Koska $AB \cong DB$, niin lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ADB$. Koska $C * D * B$, niin saadaan soveltaa ulkokulmaepäyhtälöä 2.4.19 (ii) kolmioon ACD, jolloin seuraa, että $\measuredangle C < \measuredangle ADB$.

Nyt siis $\measuredangle C < \measuredangle ADB \cong \measuredangle DAB < \measuredangle CAB = \measuredangle A$. Tästä seuraa lauseen 2.4.12 kohtien (i) ja (ii) sekä oletuksen $\measuredangle A < \measuredangle C$ nojalla ristiriita.

Toiseksi tarkastetaan ehdon välttämättömyys. Oletetaan, että $BC < AB$ ja osoitetaan, että $\measuredangle A < \measuredangle C$. Antiteesi on että $\measuredangle A \not< \measuredangle C$, jolloin lauseen 2.4.12 kohdan (iii) mukaan joko (a) $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ tai (b) $\measuredangle C < \measuredangle A$. Ensimmäisessä tapauksessa seuraa lauseen 2.4.9 kohdan (i) nojalla, että $AB \cong BC$, mikä on vastoin oletusta lauseen 2.4.4 kohdan (iii) mukaan. Tapauksessa (b) saadaan ehdon jo todistetun riittävyyspuolen avulla, että $AB < BC$, mikä on myös vastoin oletusta. □

Seuraava lause on jonkinlainen SKS-säännön yleistys

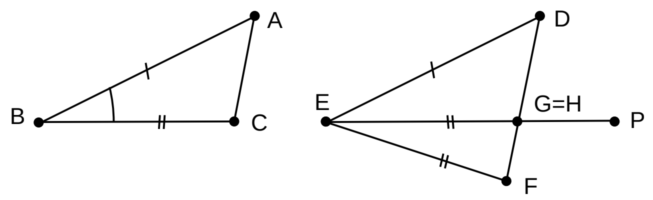
LAUSE 2.4.23. *Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kolmioita siten, että $AB \cong DE$ ja $BC \cong EF$. Tällöin $\measuredangle B < \measuredangle E$, jos ja vain jos $AC < DF$.*



Kuva 70: SKS-säännön yleistys

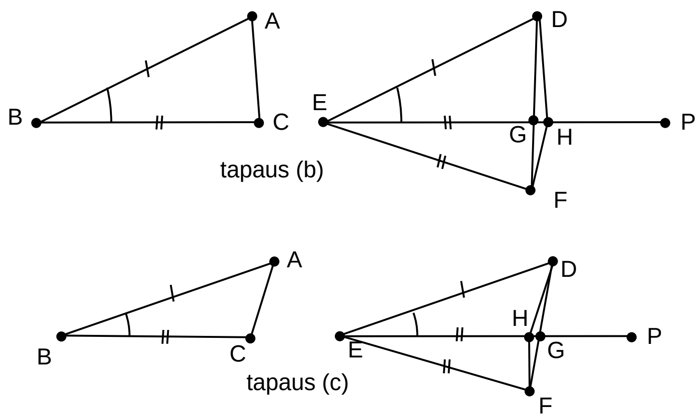
Todistus. "$\Rightarrow$". Olkoon $\measuredangle B < \measuredangle E$. Silloin puolisuorien $\overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EF}$ välissä on jokin puolisuora $\overrightarrow{EP}$ siten, että $\measuredangle B \cong \measuredangle DEP$. Lauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{EP}$ leikkaa janaa DF jossakin pisteessä G siten, että $D * G * F$. Valitaan puolisuoralta $\overrightarrow{EP}$ piste H siten, että $EH \cong BC$. Tällöin $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EH}$ ja joko (a) $G = H$, (b) $E * G * H$ tai (c) $E * H * G$.

Tapauksessa (a) $\measuredangle DEH = \measuredangle DEP \cong \measuredangle ABC$. Koska lisäksi $BC \cong EH$ ja $BA \cong ED$, niin SKS-säännön nojalla $\triangle DEH \cong \triangle ABC$. Erityisesti $DH \cong AC$ ja koska $G = H$, niin $DG \cong AC$. Koska $D * G * F$, niin määritelmän mukaan tällöin $AC < DF$.



Kuva 71: Lauseen 2.4.23 todistus, tapaus a)

Tapaus (b): Pisteen H valinnan nojalla $EH \cong BC$, joten oletuksen avulla saamme, että $EH \cong EF$ ja edelleen lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle EHF \cong \measuredangle EFH$. Koska $E * G * H$, niin $\measuredangle GFH < \measuredangle EFH$. Koska $D * G * F$, niin $\measuredangle DFH = \measuredangle GFH$.



Kuva 72: Lauseen 2.4.23 todistus, tapaukset b) ja c)

Tällöin lauseen 2.4.12 kohdan (i) mukaan $\measuredangle DFH < \measuredangle EHF$. Toisaalta $\measuredangle EHF = \measuredangle GHF$, sillä $E * G * H$. Siten $\measuredangle EHF < \measuredangle DHF$. Lauseen 2.4.14 kohdan (ii) mukaan nyt $\measuredangle DFH < \measuredangle DHF$. Tällöin lauseen 2.4.22 soveltaminen kolmioon $\triangle DFH$ antaa $DH < DF$. Kuten tapauksessa (a) saamme toisaalta $\triangle DEH \cong \triangle ABC$, joten erityisesti $DH \cong AC$. Tällöin lauseen 2.4.4 kohdan (ii) mukaan $AC < DF$.

Tapaus (c): Kuten tapauksessa (b) saadaan nytkin, että $\measuredangle EFH \cong \measuredangle EHF$ ja $DH \cong AC$. Toisaalta, koska $E * H * G$, niin lausetta 2.4.19 kolmioon $\triangle EHF$ soveltamalla saadaan, että $\measuredangle EFH < \measuredangle FHG$. Vastaavasti samaa lausetta kolmioon $\triangle FGH$ soveltamalla saamme, että $\measuredangle HFG < \measuredangle EHF$. Tällöin lauseen 2.4.12 kohdat (i) ja (ii) antavat, että $\measuredangle HFG < \measuredangle FHG$. Koska $D * G * F$, niin

$\measuredangle HFG = \measuredangle HFD$ ja toisaalta $\measuredangle FHG < \measuredangle FHD$.

Nyt lauseen 2.4.12 kohdan (ii) mukaan $\measuredangle HFD < \measuredangle FHD$. Lause 2.4.22 sovellettuna kolmioon $\triangle FHD$ antaa, että $HD < FD$. Koska $HD \cong AC$, niin $AC < DF$ lauseen 2.4.4 kohdan (i) nojalla.

"$\Leftarrow$" Olkoon $AC < DF$. Oletetaan antiteesina $\measuredangle B \not< \measuredangle E$. Silloin lauseen 2.4.12 kohdan (iii) nojalla joko (a) $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ tai (b) $\measuredangle E < \measuredangle B$. Tapauksessa (a) SKS-säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, joten erityisesti $AC \cong DF$, mikä on ristiriita lauseen 2.4.4 kohdan (iii) mukaan. Tapauksessa (b) saamme jo todistetusta "$\Rightarrow$"-osasta heti, että $DF < AC$. Ristiriita. □

2.5. Arkhimedeen aksiooma.

Kohdassa 2.6. on tarkoituksenamme määritellä käsite *janan pituus*, joka tulee olemaan janaan liittyvä positiivinen reaaliluku. Janan AB *monikerran* $n \cdot AB$ määrittelimme edellisessä luvussa 2.4. (määritelmä 2.11). Janan pituuden määrittelemme suurin piirtein sanoen siten, että valitsemme ensin jonkin janan OI (mittayksikköjanaksi) ja sovimme, että sen pituus on 1. Jos AB on mielivaltainen jana, arvioimme sen pituutta käyttäen janaa OI mittakeppinä "kokeilemalla", kuinka mones janan OI monikerta ensimmäiseksi peittää janan AB. Voi olla, että vaikkapa $4 \cdot OI < AB < 5 \cdot OI$, jolloin sovimme, että janan AB pituus on jokin reaaliluku väliltä $]4, 5[$. Tarkemman arvion saamme puolittamalla mittakepin OI ja arviomalla mittakepin puolikkaiden monikerroilla janaa AB alhaalta ja ylhäältä. Jos AB ei ole yhtenevä jommankumman monikerran kanssa, puolitetaan mittakepin puolikas ja toistetaan arviointi. Näin saamme janan AB pituudelle arvion tarkkuudella 2^{-n} mille hyvänsä $n \in \mathbb{N}$. Antamalla sitten $n \to \infty$ saamme reaaliluvun janan AB pituudeksi. Se voi olla irrationaalinenkin.

Tämä menettely ei välttämättä onnistu pelkkien aksioomien (H1)–(H13) avulla. Ensimmäinen ongelma tulee heti kun alamme peittää janaa AB janan OI monikerroilla. Onnistuuko se aina — tuleeko äärellisestä määrästä peräkkäin asetettuja mittakeppejä lopulta pitempi kuin mitattava jana? Eipä välttämättä tule! Siksi asetetaan jo Arkhimedeen[15] tarpeelliseksi huomaama aksiooma:

(AA) **Arkhimedeen aksiooma.** Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * D * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$.

Huomautus 22. Arkhimedeen aksiooma lausuu, että annetuille janoille AB ja CD on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $CD < n \cdot AB$.

Huomautus 23. Esimerkki 1 (tason $\mathbb{R}^2$ pisteet ja suorat) toteuttaa Arkhimedeen aksiooman (Totea!).

Ennenkuin määrittelemme janan pituuden Arkhimedeen aksiooman avulla on varmistauduttava, että yksikköjana voidaan yksiselitteisesti puolittaa.

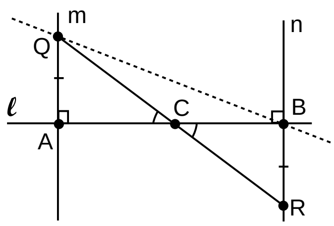
Määritelmä 2.17. Olkoon AB jana. Sanomme, että piste $C \in AB$ on *janan AB keskipiste*, jos $AC \cong CB$.

Keskipiste C siis *puolittaa* janan AB. Onko kaikilla janoilla keskipiste? Voiko niitä olla useampia? Seuraavan lauseen todistukseen ei tarvita Arkhimedeen aksioomaa.

[15] Syrakusan Arkhimedes 287–212 eaa. Kreikkalaisten asuttama Syrakusa oli Sisiliassa.

LAUSE 2.5.1. *Jokaisella janalla on yksi ja vain yksi keskipiste.*

Todistus. Olkoon AB mielivaltainen jana. Lauseen 2.4.8 nojalla suoralla $\ell = \overleftrightarrow{AB}$, $A \neq B$, on normaalit n ja m siten, että m kulkee pisteen A ja n pisteen B kautta. $m \neq n$, sillä muuten olisi $m = n = \ell$. Lauseen 2.4.17 mukaan $n \parallel m$. Olkoon $Q \neq A$ jokin suoran m piste. Valitaan suoralta n piste R siten, että $BR \cong AQ$ ja $AR\overleftrightarrow{QB}$. Tämä onnistuu, sillä $\overleftrightarrow{QB}$ leikkaa suoraa n vain pisteessä B, koska muuten olisi $\overleftrightarrow{QB} = n$ ja siten Q olisi myös suoran n piste vastoin tietoa $m \parallel n$. Edelleen $QA\overleftrightarrow{BR}$, sillä $n = \overleftrightarrow{BR}$ ja $n \parallel m$.



KUVA 73: JANAN PUOLITTAMINEN

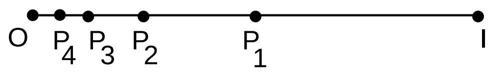
Koska $AR\overleftrightarrow{QB}$ ja $QA\overleftrightarrow{BR}$, niin R on kulman $\measuredangle AQB$ sisäpuolella, jolloin $\overrightarrow{QR}$ on puolisuorien $\overrightarrow{QA}$ ja $\overrightarrow{QB}$ välissä, mistä puomilauseen 2.3.11 nojalla seuraa, että puolisuora $\overrightarrow{QR}$ leikkaa janaa AB jossakin pisteessä C ja $A \neq C \neq B$. $Q \neq C \neq R$, sillä Q ja R eivät ole suoran ℓ pisteitä. Jos pätisi $Q * R * C$, niin $Q\overleftrightarrow{BRC}$, jolloin tiedon $AC\overleftrightarrow{BR}$ nojalla olisi $A\overleftrightarrow{BR}Q$ eli AnQ, mikä on vastoin sitä, että QAn. Näin siis $Q*C*R$ ja niin C on nimenomaan janojen QR ja AB eikä pelkästään vastaavien suorien leikkauspiste.

Lauseen 2.4.6 nojalla ristikulmat $\measuredangle ACQ$ ja $\measuredangle BCR$ ovat yhtenevät. Kulmat $\measuredangle QAC$ ja $\measuredangle CBR$ ovat normaalin määritelmän nojalla suoria ja siten lauseen 2.4.14 nojalla ne ovat yhteneviä. Lisäksi $QA \cong BR$, joten SKK-säännön eli lauseen 2.4.20 nojalla kolmiot $\triangle ACQ$ ja $\triangle BCR$ ovat yhteneviä. Siten $AC \cong CB$.

Todistetaan vielä pisteen C yksikäsitteisyys. Olkoot $C \in AB \setminus \{A, B\}$ ja $D \in AB \setminus \{A, B\}$ siten, että $AC \cong CB$ ja $AD \cong DB$. Jos olisi $AD < AC$, niin oletusten ja lauseen 2.4.4 i) -kohdan nojalla olisi $DB < CB$, jolloin lauseen 2.4.4 ii) -kohdan mukaan pätisi $AB < AB$, vastoin lauseen 2.4.4 kohtaa (iii), sillä aina $AB \cong AB$. Samoin $AC < AD$ ei käy, joten $AC \cong AD$. (H8):n yksikäsitteisyysosan mukaan $D = C$. □

Janamitan konstruktio.

Valitaan ensin jokin jana OI kiinteäksi yksikköjanaksi. Olkoon sitten AB mielivaltainen jana. Lauseen 2.5.1 mukaan janalla OI on jokin keskipiste $P_1 \in OI$. Olkoon edelleen P_2 janan OP_1 keskipiste ja yleisesti P_{n+1} janan OP_n keskipiste kaikille $n \in \mathbb{N}$.



KUVA 74: MITTAJANAN PALOITTELU

Lemma 2.5.1. *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee* $\quad 2^n \cdot OP_n = OI$.

Todistus. Induktiotodistus. Jos $n = 1$, niin janan monikerran määritelmän mukaan $2 \cdot OP_1 = OQ$ jollekin Q siten, että $O * P_1 * Q$ ja $OP_1 \cong P_1Q$. Toisaalta keskipisteen määritelmän mukaan $O * P_1 * I$ ja $OP_1 \cong P_1 I$. Aksiooman (H8) yksikäsitteisyysosan nojalla tällöin $I = Q$, joten $2 \cdot OP_1 = OQ = OI$ eli väite pätee.

Tehdään induktio-oletus, että $2^k \cdot OP_k = OI$. Kuten kohdassa $n = 1$ nähdään, että $2 \cdot OP_{k+1} = OP_k$, joten

$$2^{k+1} \cdot OP_{k+1} = (2^k \cdot 2) \cdot OP_{k+1} = 2^k \cdot (2 \cdot OP_{k+1}) = 2^k \cdot OP_k = OI,$$

missä sovellettiin laskusääntöä $(mn) \cdot RS = m \cdot (n \cdot RS)$ jokaisella janalla RS ja $m, n \in \mathbb{N}$. Laskusäännön todistaminen jää harjoitustehtäväksi. Näin induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu. □

Palataan janamitan konstruoimiseen. Valitaan $Q \in \overrightarrow{OI}$ siten, että $OQ \cong AB$. Tällöin Arkhimedeen aksiooman nojalla kaikille $n \in \mathbb{N}$ on olemassa jokin $k \in \mathbb{N}$ siten, että $OQ < k \cdot OP_n$. Siten luvut $k_n \in \mathbb{N}$ ja $m_n \in \mathbb{R}$,

$$k_n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid OQ < k \cdot OP_n\}, \quad m_n = k_n \cdot \frac{1}{2^n},$$

ovat olemassa ja yksikäsitteiset. Suoraan määritelmästä näemme, että $m_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten reaalilukujono (m_n) on alhaalta rajoitettu. Osoitetaan, että se on myös vähenevä, jolloin se tunnetun *reaalilukujen täydellisyysaksiooman* nojalla suppenee.

Koska $2 \cdot OP_{n+1} = OP_n$, niin $k \cdot OP_n = k \cdot (2 \cdot OP_{n+1}) = (2k) \cdot OP_{n+1}$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Erityisesti $k_n \cdot OP_n = (2 \cdot k_n) \cdot OP_{n+1}$ ja koska k_n:n määritelmän mukaan $OQ < k_n \cdot OP_n$, niin $OQ < (2k_n) \cdot OP_{n+1}$, josta edelleen k_n:n määritelmän mukaan saamme $k_{n+1} \leq 2k_n$. Tällöin

$$m_{n+1} = \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} \leq \frac{2k_n}{2^{n+1}} = \frac{k_n}{2^n} = m_n.$$

Näin jono (m_n) on vähenevä ja siten seuraavan määritelmän raja-arvo on olemassa.

Määritelmä 2.18. Janan AB *pituudeksi* sanotaan reaalilukua

$$\overline{AB} = \lim_{n \to \infty} m_n.$$

Huomautus 24. Janan pituuden määrittelyssä ei valittu mielivaltaisesti mitään muuta kuin jana OI: pisteet Q ja $P_1, P_2, \ldots$ määräytyvät yksikäsitteisesti lauseen 2.5.1 ja aksiooman (H8) nojalla. Jos jana OI valitaan toisin, saadaan yleensä eri pituus samalle janalle. Jatkossa emme vaihda yksikköjanaa OI, vaan pidämme sen *pysyvästi valittuna.*

Käytämme jatkossa myös edellisen konstruktion merkintöjä.

LAUSE 2.5.2. *Olkoon AB mielivaltainen jana. Tällöin* $\overline{AB} > 0$.

Todistus. Arkhimedeen aksiooman nojalla on olemassa $q \in \mathbb{N}$ s.e. $OI < q \cdot OQ$. Tällöin

$$2^q OP_q = OI < q\, OQ < 2^q\, OQ,$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa suoraan siitä, että $q < 2^q \quad \forall q \in \mathbb{N}$. Siten $2^q \cdot OP_q < 2^q \cdot OQ$, josta seuraa, että

$$OP_q < OQ.$$

(Tässä päättelyssä käytettiin yleisempää tulosta $k \cdot RS < k \cdot TU \implies RS < TU$, jonka todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi.) Toisaalta kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $2^n\ cdotOP_{q+n} = OP_q$, minkä voi todistaa induktiolla. Siis

$$2^n \cdot OP_{q+n} < OQ \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin $k \cdot OP_{q+n} < OQ$ pätee kaikille $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ ja kaikille $n \in \mathbb{N}$. Suoraan k_n:n määritelmän nojalla saadaan nyt

$$k_{q+n} \geq 2^n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ja edelleen m_n:n määritelmän mukaan

$$m_{q+n} = \frac{k_{q+n}}{2^{q+n}} \geq \frac{2^n + 1}{2^{q+n}} > \frac{2^n}{2^{q+n}} = \frac{1}{2^q} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siten $m_n > \frac{1}{2^q}\ \forall n \geq q$, joten

$$\overline{AB} = \lim_{n \to \infty} m_n \geq \frac{1}{2^q} > 0.$$

□

LAUSE 2.5.3. $\overline{OI} = 1$.

Todistus. Nyt $Q = I$, ja siten $2^n OP_n = OQ\ \forall n$. Tällöin

$$k \cdot OP_n < OQ \text{ , kun } k = 1, \ldots, 2^n - 1 \text{ ja}$$
$$k \cdot OP_n > OQ \text{ , kun } k \geq 2^n + 1.$$

Luvun k_n määritelmän mukaan tällöin $k_n = 2^n + 1$. Siten

$$m_n = \frac{k_n}{2^n} = \frac{2^n + 1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^n},$$

joten

$$\overline{OI} = \lim_{n \to \infty} m_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

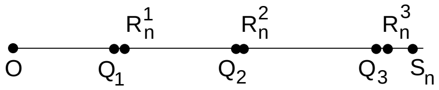
□

LAUSE 2.5.4 (Janamitan additiivisuus). *Olkoot A, B ja C pisteitä siten, että $A * B * C$. Tällöin*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Todistus. Olkoot Q_1, Q_2 ja vastaavasti Q_3 janojen AB, BC ja vast. AC mittakonstruktiossa käytettäviä pisteitä, siis $OQ_1 \cong AB$, $OQ_2 \cong BC$ ja $OQ_3 \cong AC$. Olkoot vastaavasti k_n^1, k_n^2 ja k_n^3 konstruktiossa käytettäviä lukuja. Olkoon edelleen R_n^1, R_n^2 ja $R_n^3 \in \overrightarrow{OI}$ siten, että

$$OR_n^1 \cong k_n^1 \cdot OP_n \ , \quad OR_n^2 \cong k_n^2 \cdot OP_n \quad \text{ja} \quad OR_n^3 \cong k_n^3 \cdot OP_n.$$



Kuva 75: Pituuksien summa

Valitaan vielä S_n siten, että $O * R_n^2 * S_n$ ja $R_n^2 S_n \cong OR_n^1$. Tällöin

$$OS_n \cong (k_n^1 + k_n^2)\, OP_n.$$

Tämän todistaminen jää harjoitustehtäväksi. Koska k_n:n määritelmän mukaan $OQ_1 < OR_n^1$ ja $OQ_2 < OR_n^2$, niin $OQ_3 < OS_n$, minkä voi perustella seuraavasti:

Valitaan apupisteet X ja Y s.e. $O * R_2^n * X$ ja $O * Y * R_2^n$, sekä $R_2^n X \cong OQ_1$ ja $YR_2^n \cong OQ_2$, missä erityisesti Y:n valinta on mahdollista, koska $OQ_2 < OR_n^2$. Tällöin $Y * R_n^2 * X$ ja $YR_n^2 \cong BC$ ja $R_n^2 X \cong AB$. Koska $A * B * C$, niin tällöin $YX \cong AC$; tämä seuraa aksioomasta (H10). Koska $OQ_1 < OR_1$, niin $O * X * S_n$ ja toisaalta $O * Y * X$. Tällöin $YX < OX < OS_n$ ja koska $YX \cong AC \cong OQ_3$ niin $OQ_3 < OS_n$ lauseen 2.4.4. nojalla.

Koska siis $OS_n \cong (k_n^1 + k_n^2)OP_n$ ja $OQ_3 < OS_n$, niin k_n^3:n määritelmän mukaan

$$k_n^3 \le k_n^1 + k_n^2.$$

Toisaalta, jos valitaan T_n^1 ja $T_n^2 \in \overrightarrow{OI}$ s.e. $OT_n^1 = (k_n^1 - 1)OP_n$ ja $OT_n^2 = (k_n^2 - 1)OP_n$, niin k_n:n määritelmän nojalla $OT_n^1 \overset{\sim}{<} OQ_1$ ja $OT_n^2 \overset{\sim}{<} OQ_2$. (Tässä merkintä "$\overset{\sim}{<}$" tarkoittaa "$<$ tai $\cong$".) Jos valitaan edelleen U_n siten, että $O * T_n^2 * U_n$ ja $T_n^2 U_n \cong OT_n^1$, niin

$$\begin{aligned} &OU_n \cong \big((k_n^1 - 1) + (k_n^2 - 1)\big)OP_n \quad \text{ja} \\ &OU_n \overset{\sim}{<} OQ_3. \end{aligned}$$

(Tämän voi perustella analogisesti edellisen sivun perustelun kanssa. Totea!) Tällöin $k \cdot OP_n \overset{\sim}{<} OQ_3$ kaikille $k = 1, \ldots, (k_n^1 - 1) + (k_n^2 - 1)$, joten taas k_n^3:n määritelmän nojalla

$$k_n^3 \ge (k_n^1 - 1) + (k_n^2 - 1) + 1 = k_n^1 + k_n^2 - 1.$$

Siten

$$(*) \qquad k_n^1 + k_n^2 - 1 \le k_n^3 \le k_n^1 + k_n^2.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{BC} &= \lim_{n\to\infty}\frac{k_n^1}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{k_n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{k_n^1}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{k_n^2}{2^n} - \overbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}^{0}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{k_n^1+k_n^2-1}{2^n} \overset{(*)}{\leq} \lim_{n\to\infty}\frac{k_n^3}{2^n} = \overline{AC} = \lim_{n\to\infty}\frac{k_n^3}{2^n} \overset{(*)}{\leq} \lim_{n\to\infty}\frac{k_n^1+k_n^2}{2^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{k_n^1}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{k_n^2}{2^n} = \overline{AB}+\overline{BC}.\end{aligned}$$

Siten $\overline{AB}+\overline{BC} \leq \overline{AC} \leq \overline{AB}+\overline{BC}$, ja väite seuraa. □

LAUSE 2.5.5. *Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin $AB \cong CD$, jos ja vain jos $\overline{AB} = \overline{CD}$.*

Todistus. 1°) Jos $AB \cong CD$, niin mittakonstruktiossa käytettävä piste Q on sama kummallekin janalle, joten k_n:t ja m_n:t ovat samoja ja siten raja-arvokin on sama.

2°) Jos janoilla on sama pituus, niin valitaan Q_1 ja Q_2 siten, että $OQ_1 \cong AB$ ja $OQ_2 \cong CD$. Riittää osoittaa että $Q_1 = Q_2$. Tehdään antiteesi: $Q_1 \neq Q_2$. Tällöin joko $O * Q_1 * Q_2$ tai $O * Q_2 * Q_1$. Tarvittaessa merkintöjä vaihtamalla voidaan olettaa, että $O*Q_1*Q_2$. Tällöin lauseen 2.5.4. nojalla $\overline{OQ_1}+\overline{Q_1Q_2} = \overline{OQ_2}$, jolloin lauseen 2.5.2 nojalla $\overline{OQ_1} < \overline{OQ_2}$. Toisaalta kohdan 1°) nojalla $\overline{AB} = \overline{OQ_1}$ ja $\overline{CD} = \overline{OQ_2}$, joten $\overline{AB} < \overline{CD}$, mikä on mahdotonta. □

Lauseelle 2.5.4. pätee myös käänteinen tulos:

LAUSE 2.5.6. *Olkoot A, B ja C eri pisteitä siten, että $\overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AC}$. Tällöin $A * B * C$.*

Todistus. Jos ei olisi $A*B*C$, niin olisi kaksi vaihtoehtoa: a) A, B ja C ovat samalla suoralla tai sitten ne eivät ole samalla suoralla.

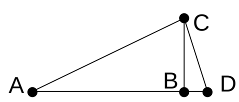
Tapaus a): Joko $A*C*B$ tai $B*A*C$. Lauseen 2.5.4. nojalla joko $\overline{AC}+\overline{BC} = \overline{AB}$ tai $\overline{AB}+\overline{AC} = \overline{BC}$. Oletuksen nojalla tällöin joko $\overline{BC} = 0$ tai $\overline{AB} = 0$, mikä on mahdotonta lauseen 2.5.2 nojalla.

Tapaus b): Oletetaan, että A, B ja C eivät ole samalla suoralla. Valitaan $D \in \overrightarrow{AB}$ s.e. $AD \cong AC$, jolloin lauseen 2.5.5. nojalla $\overline{AD} = \overline{AC}$. Tässä on 3 mahdollisuutta i) $A * D * B$, ii) $D = B$ tai iii) $A * B * D$.

Tapaus i): Lauseen 2.5.4. mukaan $\overline{AD}+\overline{DB} = \overline{AB}$, jolloin lauseen 2.5.2 nojalla $\overline{AD} < \overline{AB}$. Tällöin $\overline{AC} < \overline{AB}$ ja oletuksesta saadaan $\overline{AB}+\overline{BC} < \overline{AB}$, josta edelleen $\overline{BC} < 0$, mikä on vastoin lausetta 2.5.2.

Tapaus ii): Tässä $\overline{AD} = \overline{AB}$, joten $\overline{AC} = \overline{AB}$, ja siis $\overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AB}$ ja on oltava $\overline{BC} = 0$ vastoin lausetta 2.5.2.

Tapaus iii): Olkoon siis $A * B * D$.



Kuva 76: Tapaus iii)

Koska A, B ja C eivät ole samalla suoralla, niin $\triangle ACD$ on kolmio. Pappuksen lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle ACD \cong \measuredangle ADC$ ja lauseen 2.5.4 nojalla $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$. Toisaalta $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AD}$, joten on oltava $\overline{BD} = \overline{BC}$. Tällöin lauseen 2.5.5. mukaan $BC \cong BD$.

Myös $\triangle BCD$ on kolmio ja lauseen 2.4.9. nojalla $\measuredangle BDC \cong \measuredangle BCD$. Koska $A*B*D$, niin $\overleftrightarrow{ABCD}$ ja aksiooman (H11) yksikäsitteisyyspuolen nojalla $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, joten A, B ja C ovat samalla suoralla vastoin oletusta. □

LAUSE 2.5.7. *Olkoon AB jana ja $k \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\overline{k \cdot AB} = k \cdot \overline{AB}.$$

Todistus. Induktio k:n suhteen: Asia on selvä, jos $k = 1$. Oletetaan, että väite on tosi k:lle ja todistetaan se $k+1$:lle. Olkoon sitä varten $C \in \overrightarrow{AB}$ s.e. $AC = k \cdot AB$ ja D s.e. $A * C * D$ ja $CD \cong AB$, jolloin monikerran määritelmän mukaan $AD = (k+1)AB$, lauseen 2.5.4 nojalla $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$ ja lauseen 2.5.5. nojalla $\overline{CD} = \overline{AB}$. Induktio-oletuksen avulla saadaan

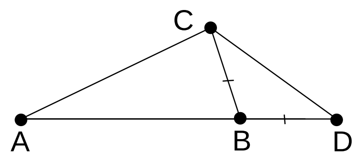
$$\overline{(k+1) \cdot AB} = \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{k \cdot AB} + \overline{AB} = k \cdot \overline{AB} + \overline{AB} = (k+1)\overline{AB}.$$

□

LAUSE 2.5.8. (Kolmioepäyhtälö). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin*

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Todistus. Valitaan piste D siten, että $A * B * D$ ja $BC \cong BD$.



Kuva 77: Kolmioepäyhtälön todistus

Lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle BCD \cong \measuredangle BDC$. Lauseen 2.5.4 nojalla $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$ ja lauseen 2.5.5. nojalla $\overline{BD} = \overline{BC}$, joten $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Koska $A * B * D$, niin $\overrightarrow{CB}$ on kulman $\measuredangle ACD$ sisällä, joten $\measuredangle BCD < \measuredangle ACD$. Tällöin transitiivisuuslauseen 2.4.12 nojalla $\measuredangle BDC < \measuredangle ACD$ ja saadaan, että $\measuredangle ADC < \measuredangle ACD$. Nyt lause 2.4.22. sovellettuna kolmioon $\triangle ACD$ antaa $AC < AD$. Tähän käytetään lausetta 2.5.9, jota tosin ei vielä ole todistettu, mutta joka tulee seuraavaksi, ja jonka todistamiseen **ei käytetä todistettavana olevaa lausetta 2.5.8.** Tulokseksi saadaan $\overline{AC} < \overline{AD}$. Siten $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. □

LAUSE 2.5.9. *Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin $AB < CD$, jos ja vain jos $\overline{AB} < \overline{CD}$.*

Todistus. 1°) Jos $AB < CD$, niin voidaan valita E s.e. $C * E * D$ ja $CE \cong AB$. Tällöin lauseen 2.5.5. nojalla $\overline{CE} = \overline{AB}$ ja lauseen 2.5.4. nojalla $\overline{CE} + \overline{ED} = \overline{CD}$. Lauseen 2.5.2 nojalla saadaan silloin $\overline{AB} = \overline{CE} < \overline{CE} + \overline{ED} = \overline{CD}$.

2°) Oletetaan $\overline{AB} < \overline{CD}$ ja tehdään antiteesi, että ei päde $AB < CD$. Tällöin lauseen 2.4.12 nojalla joko a) $CD < AB$ tai b) $CD \cong AB$. Tapauksessa a) saadaan kohdan 1° nojalla $\overline{CD} < \overline{AB}$ ja tapauksessa b) lauseen 2.5.5. nojalla $\overline{CD} = \overline{AB}$; kumpikin vastoin oletusta. □

Seuraava lause kertoo, että lauseiden 2.5.3, 2.5.5, 2.5.7 ja 2.5.9 antamat janamitan ominaisuudet karakterisoivat sen täysin, toisin sanoen jos jollakin janamitalla on nämä ominaisuudet, sen täytyy olla juuri edelläkonstruoitu mitta:

LAUSE 2.5.10. *Oletetaan, että $\overline{\overline{AB}}$ on janamitta (eli kuvaus janojen joukolta positiivilukujen joukolle), jolla on ominaisuudet:*

a) $\overline{\overline{OI}} = 1$
b) *jos $AB \cong CD$, niin $\overline{\overline{AB}} = \overline{\overline{CD}}$*
c) $\overline{\overline{k \cdot AB}} = k \cdot \overline{\overline{AB}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$
d) *jos $AB < CD$, niin $\overline{\overline{AB}} < \overline{\overline{CD}}$.*

Tällöin välttämättä $\overline{\overline{AB}} = \overline{AB}$.

Todistus. Olkoot pisteet Q ja P_n sekä luvut k_n kuten janamitan $\overline{AB}$ konstruktiossa, jolloin erityisesti $OQ \cong AB$ ja siten $\overline{\overline{OQ}} = \overline{\overline{AB}}$ oletuksen b) nojalla. Koska kaikilla n pätee $2^n \cdot OP_n = OI$, niin ehtojen c) ja a) nojalla

$$2^n\, \overline{\overline{OP_n}} = \overline{\overline{2^n\, OP_n}} = \overline{\overline{OI}} = 1,$$

joten $\overline{\overline{OP_n}} = \frac{1}{2^n}$. Tällöin ehdon c) nojalla pätee kaikilla k

$$\overline{\overline{k \cdot OP_n}} = k \cdot \overline{\overline{OP_n}} = \frac{k}{2^n}.$$

Lukujen k_n valinnan nojalla

$$OQ < k_n \cdot OP_n$$

joten ehdon b) mukaan

$$\overline{\overline{OQ}} < \overline{\overline{k_n \cdot OP_n}} = \frac{k_n}{2^n}.$$

Toisaalta $(k_n - 1)OP_n \overset{\sim}{<} OQ$, joten ehtojen b) ja d) nojalla $\overline{\overline{OQ}} < \overline{\overline{k_n \cdot OP_n}} = \frac{k_n - 1}{2^n}$. Siten

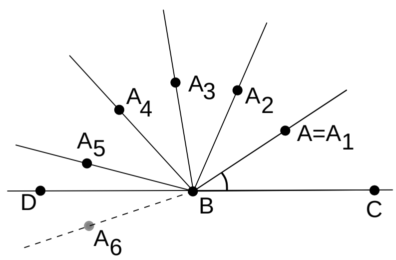
$$\frac{k_n}{2^n} - \frac{1}{2^n} \le \overline{\overline{OQ}} \le \frac{k_n}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Antamalla tässä $n \to \infty$ saadaan $\overline{AB} \le \overline{\overline{OQ}} \le \overline{AB}$ ja väite seuraa. □

Kulmamitan konstruktio.

Seuraavaksi konstruoidaan kulmamitta. Konstruktio muistuttaa paljolti janamitan konstruktiota. Tässä ideana on käyttää ”yksikkökulmana” suoraa kulmaa — sovitaan, että sen astemitta on $90°$. Puolittamalla toistuvasti suora kulma saadaan yhä pienempiä ja pienempiä apukulmia, joilla voidaan sitten approksimoida annettua kulmaa ja saada raja-arvona tällekin mitta. Konstruktiota varten tarvitaan kulman monikerran ja puolittajan käsitteet.

Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma. Konstruoidaan pisteet $A_1, A_2, A_3, \ldots$ seuraavasti: Valitaan ensin $A_1 = A$. Sitten valitaan D siten, että $D * B * C$ ja tämän jälkeen, olettaen että A_{n-1} on jo valittu, valitaan kulman $\measuredangle DBA_{n-1}$ sisältä piste A_n s.e. $\measuredangle A_nBA_{n-1} \cong \measuredangle ABC$. Sovitaan sitten, että *kulman $\measuredangle ABC$ n:s monikerta* on kulma $\measuredangle A_nBC$, ja merkitään sitä $n \cdot (\measuredangle ABC)$ tai lyhemmin $n\measuredangle ABC$. Tässä on heti sanottava, että pisteen A_n valinta ei välttämättä onnistu (Syy näkyy kuvasta, jossa A_6:n valinta ei enää onnistu.) ja monikerran määrittely loppuu siihen.

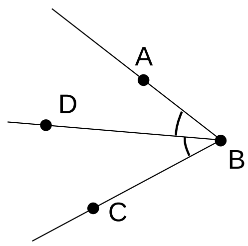


Kuva 78: Kulman monikerta

Jos A_n:n valinta onnistuu, niin syntyvä kulma $\measuredangle A_nBC$ on (H11):n yksikäsitteisyyspuolen nojalla yksikäsitteinen, ja määrittely on järkevää, kunhan se siis vain onnistuu.

Määritellään sitten kulman puolittaja.

Määritelmä 2.19. Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma. Puolisuora $\overrightarrow{BD}$ on *kulman $\measuredangle ABC$ puolittaja*, jos $\overrightarrow{BD}$ on $\overrightarrow{BA}$:n ja $\overrightarrow{BC}$:n välissä ja $\measuredangle ABD \cong \measuredangle DBC$.



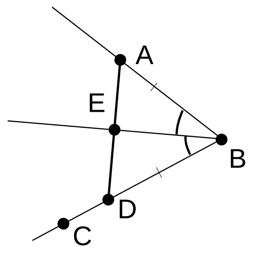
Kuva 79: Kulman puolittaja

LAUSE 2.5.11. *Olkoon $\overrightarrow{BD}$ kulman $\measuredangle ABC$ puolittaja. Tällöin monikerta $2 \cdot (\measuredangle DBC)$ on määritelty ja $2 \cdot (\measuredangle DBC) \cong \measuredangle ABC$.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

LAUSE 2.5.12. *Jokaisella kulmalla on yksikäsitteinen puolittaja.*

Todistus. Olkoon $\measuredangle ABC$ mielivaltainen kulma. Osoitetaan sen puolittajan olemassaolo konstruoimalla sellainen. Valitaan piste $D \in \overrightarrow{BC}$ s.e. $BA \cong BD$.



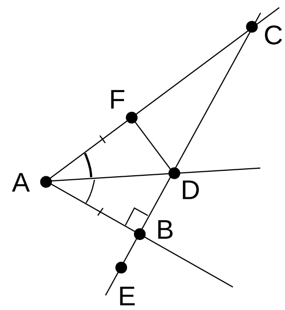
KUVA 80: KULMAN PUOLITUS

Lauseen 2.5.1 nojalla janalla AD on keskipiste, olkoon se E. Tällöin $A * E * D$, joten lauseen 2.3.9 nojalla $\overrightarrow{BE}$ on puolisuorien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BD}$ välissä. Janan keskipisteen määritelmän mukaan $AE \cong ED$, joten SSS-säännön nojalla saadaan $\triangle ABE \cong \triangle DBE$. Erityisesti $\measuredangle ABE \cong \measuredangle DBE = \measuredangle EBC$, joten $\overrightarrow{BE}$ on $\measuredangle ABC$:n puolittaja.

Yksikäsitteisyyden osoittamiseksi oletetaan, että myös $\overrightarrow{BF}$ on kulman $\measuredangle ABC$ puolittaja ja näytetään, että $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE}$. Puomilauseen 2.3.11 mukaan $\overrightarrow{BF}$ leikkaa janaa AD jossakin pisteessä G. SKS-säännön nojalla $\triangle ABG \cong \triangle DBG$, joten $AG \cong DG$. Tällöin G on janan AD keskipiste ja lauseen 2.5.1 yksikäsitteisyypuolen nojalla on oltava $G = E$. Koska $G \in \overrightarrow{BF}$, niin silloin $E \in \overrightarrow{BF}$, joten $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BF}$.
□

Ennen kulmamitan konstruktiota tarvitaan vielä yksi aputulos.

LAUSE 2.5.13. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa $\measuredangle B$ on suora. Olkoon $\overrightarrow{AD}$ kulman $\measuredangle A$ puolittaja siten, että $B * D * C$. Tällöin $BD < DC$.*
Todistus. Valitaan piste E siten, että $C * B * E$.

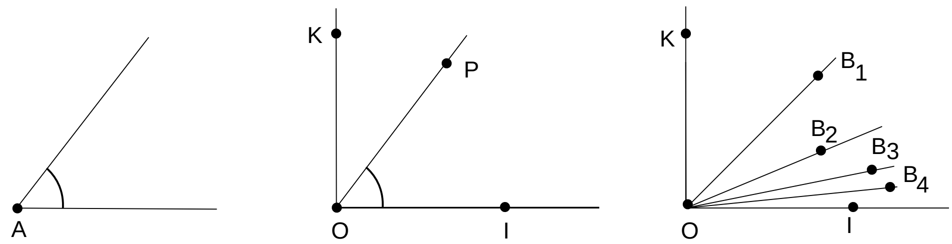


KUVA 81: KULMAN PUOLITTAJA JAKAA SIVUN NÄIN

Ulkokulmaepäyhtälö 2.4.19 sovellettuna kolmioon $\triangle ABC$ antaa $\measuredangle C < \measuredangle ABE$. Tässä $\measuredangle ABE$ on suoran kulman $\measuredangle ABC$ täydennyskulma ja siis $\measuredangle ABE \cong \measuredangle ABC$. Siten $\measuredangle C < \measuredangle ABC$. Lause 2.4.22 sovellettuna kolmioon $\triangle ABC$ antaa tällöin $AB < AC$. Tämän perusteella voidaan valita F siten, että $A * F * C$ ja $AF \cong AB$. Koska $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\measuredangle FAB$ puolittaja, on $\measuredangle FAD \cong \measuredangle DAB$. Tällöin SKS-sääntö antaa $\triangle FAD \cong \triangle BAD$. Erityisesti $\measuredangle AFD \cong \measuredangle ABD$ ja $BD \cong FD$ $(*)$. Koska oletuksen mukaan $\measuredangle ABD$ on suora, niin lauseen 2.4.7 nojalla myös $\measuredangle AFD$ on suora ja siis myös sen täydennyskulma $\measuredangle CFD$ on suora ja lauseen 2.4.14 nojalla $\measuredangle CFD \cong$

$\measuredangle ABC$. Koska, kuten yllä todettiin, $\measuredangle C < \measuredangle ABC$, niin saadaan $\measuredangle C < \measuredangle CFD$. Sovelletaan nyt uudelleen lausetta 2.4.22, tällä kertaa kolmioon $\triangle FCD$ ja saadaan $FD < DC$. Tällöin on $(*)$:n nojalla $BD < CD$. □

Varsinainen kulmamitan konstruktio: Valitaan ensin jokin kiinteä suora kulma $\measuredangle KOI$, jossa lisäksi $KO \cong OI$. Tällainen on olemassa lauseen 2.4.16 nojalla. Olkoon sitten $\measuredangle A$ mielivaltainen kulma. Valitaan P siten, että $K\overleftrightarrow{PO}I$ ja $\measuredangle A \cong \measuredangle POI$. Lauseen 2.5.12 nojalla $\measuredangle KOI$:lla on puolittaja, olkoon se $\overrightarrow{OB_1}$. Edelleen $\measuredangle B_1OI$:lla on puolittaja, olkoon se $\overrightarrow{OB_2}$ jne.



Kuva 82: Kulma ja kulman mittauspalaset

Induktiolla voi todistaa, että $2^n \cdot (\measuredangle B_nOI) = \measuredangle KOI$. Tämän jätämme harjoitustehtäväksi; vertaa vastaavaan konstruktioon janamitan osalta. Edelleen induktiolla voidaan todeta, että monikertaa $2^{n+1} \cdot (\measuredangle B_nOI)$ ei voi enää määritellä (vaan tulos olisi "oikokulma"), mutta kaikki alemmat monikerrat saadaan määritellyksi, siis $k \cdot (\measuredangle B_nOI)$ on määritelty, jos ja vain jos $k = 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$. Määritellään nyt kaikille $n \in \mathbb{N}$

$$k_n = \begin{cases} 0, & \text{jos } \measuredangle B_nOI \not< \measuredangle POI \\ \max\{k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n+1} - 1\} \mid k \cdot (\measuredangle B_nOI) < \measuredangle POI\} & \text{muuten.} \end{cases}$$

Asetetaan edellen $m_n = k_n/2^n \in \mathbb{R}$. (Vertaa vastaaviin määrittelyihin janamitan konstruktiossa, tässä siis luku k_n kertoo kuinka monta kertaa $\measuredangle B_nOI$ mahtuu kulman POI sisälle.) Osoitetaan, että näin määritelty reaalilukujono $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee. Tunnetusti tätä varten riittää osoittaa, että se on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Suoraan määritelmästä näkyykin, että $k_n \leq 2^{n+1} - 1$ kaikilla n, joten

$$m_n = \frac{k_n}{2^n} \leq \frac{2^{n+1} - 1}{2} < 2 \quad \forall n$$

ja siis (m_n) on ylhäältä rajoitettu, joten riittää tarkastaa sen kasvavuus.

Lauseen 2.5.11 mukaan $2(\measuredangle B_{n+1}OI) = \measuredangle B_nOI$, ja induktiolla nähdään, että

$$2k(\measuredangle B_{n+1}OI) = k(\measuredangle B_nOI) \quad \forall\, k = 1, \ldots, 2^{n+1} - 1.$$

Luvun k_n määritelmän mukaan tällöin $k_{n+1} \geq 2k_n$ ja edelleen

$$m_{n+1} = \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} \geq \frac{2k_n}{2^{n+1}} = \frac{k_n}{2^n} = m_n,$$

joten (m_n) on kasvava.

Näin ollen (m_n) suppenee kohti jotakin reaalilukua $\lim_n m_n \in \mathbb{R}$. Sanomme, että luku

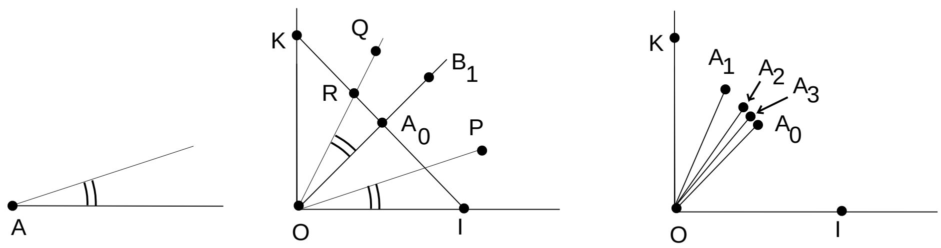
$$(\measuredangle A)^\circ = 90 \cdot \lim_n m_n$$

on *kulman* $\measuredangle A$ *astemitta.* Tämä määritelmä on järkevä samoista syistä kuin janamitan määritelmäkin.

LAUSE 2.5.14. *Olkoon* $\measuredangle A$ *mielivaltainen kulma. Tällöin* $(\measuredangle A)^\circ > 0$.

Todistus. Todistuksen juoni on sama kuin janamitan tapauksessa. Pientä lisähankaluutta tulee kuitenkin siitä, että Arhkhimedeen aksiooma ei puhu kulmista vaan janoista ja kulmat joudutaan ennen sen käyttöä korvaamaan janoilla.

Nimetään aluksi apupisteet ja -luvut kuten edellä kulmamitan konstruktiossa. Koska (m_n) on kasvava jono ja $(m_n) \geq 0$, niin riittää osoittaa, että jokin luvuista m_n eroaa nollasta, mihin riittää se, että jokin k_n on nollasta eroava, mikä taas pätee, kunhan $\measuredangle B_nOI < \measuredangle POI$ jollekin n. Jos $\measuredangle B_1OI < \measuredangle POI$, niin asia on selvä. Jos $\measuredangle B_1OI \cong \measuredangle POI$, niin $\measuredangle B_2OI < \measuredangle POI$ ja asia on taas selvä. Voidaan siis olettaa, että $\measuredangle POI < \measuredangle B_1OI$. Koska $\overrightarrow{OB_1}$ on $\measuredangle KOI$:n puolittaja, niin $\measuredangle KOB_1 \cong \measuredangle B_1OI$ ja tällöin $\measuredangle POI < \measuredangle KOB_1$. Siten kulman $\measuredangle KOB_1$ sisällä on puolisuora $\overrightarrow{OQ}$ s. e. $\measuredangle QOB_1 \cong \measuredangle POI$.



Kuva 83: Kulmamitan positiivisuus

Puomilauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{OB_1}$ leikkaa janaa KI. Olkoon leikkauspiste A_0. Vastaavasti $\overrightarrow{OQ}$ leikkaa janaa KA_0; olkoon leikkauspiste R. Olkoon edelleen

kulman $\measuredangle KOA_0$ puolittajan ja KA_0:n leikkauspiste A_1
kulman $\measuredangle A_1OA_0$ puolittajan ja A_1A_0:n leikkauspiste A_2
kulman $\measuredangle A_2OA_0$ puolittajan ja A_2A_0:n leikkauspiste A_3
... ja yleisesti
kulman $\measuredangle A_{n-1}OA_0$ puolittajan ja $A_{n-1}A_0$:n leikkauspiste A_n.

Selvästi $A_{n-1} * A_n * A_0$ kaikilla n. Nyt $\measuredangle KOA_0 \cong \measuredangle B_1OI$, sillä $\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OB_1}$ on kulman $\measuredangle KOI$ puolittaja, joten näiden "puolitetut kulmat" $\measuredangle A_10A_0$ ja $\measuredangle B_2OI$ ovat myös yhtenevät. Tämän perustelu on sopiva harjoitustehtävä. Edelleen näidenkin "puolikkaat" ovat yhtenevät keskenään jne. Induktiolla saadaan:

$$(*) \qquad \measuredangle A_nOA_0 \cong \measuredangle B_{n+1}OI \quad \forall n$$

Koska alunperin lähdettiin siitä, että $OK \cong OI$, niin SKS-säännön avulla saadaan $\triangle KOA_0 \cong \triangle IOA_0$. Erityisesti $\measuredangle KA_0O \cong \measuredangle IA_0O$. Koska $K * A_0 * I$, niin nämä ovat toistensa täydennyskulmia ja siten $\measuredangle KA_0O$ on suora. Sovelletaan nyt lausetta

2.5.13 kolmioon $\triangle OA_0K$ ja saadaan $A_0A_1 < A_1K$. Vastaavasti kolmiosta $\triangle OA_0A_1$ saadaan $A_0A_2 < A_2A_1$ jne. Yleisesti

$$A_0A_n < A_nA_{n-1} \quad \forall\, n = 2, 3, \ldots$$

Tällöin lauseen 2.5.9 nojalla $\overline{A_0A_1} < \overline{A_1K}$ ja $\overline{A_0A_n} < \overline{A_nA_{n-1}} \quad \forall\, n = 2, 3, \ldots$ Siksi lauseen 2.5.4 nojalla $2\overline{A_0A_1} < \overline{A_0A_1} + \overline{A_1K} = \overline{A_0K}$ ja yleisesti $2\overline{A_0A_n} < \overline{A_0A_n} + \overline{A_nA_{n-1}} = \overline{A_0A_{n-1}} \quad \forall\, n = 2, 3, \ldots$ Tästä saadaan induktiolla

$$2^nA_0A_n < A_0K \quad \forall\, n = 2, 3, \ldots$$

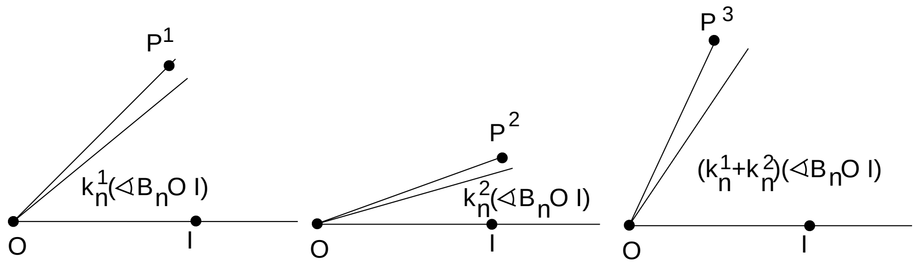
Palataan tarkastelemaan pistettä R. Arkhimedeen aksiooman nojalla on olemassa luku $m \in \mathbb{N}$, jolla $A_0K < mA_0R$. Valitaan n niin suureksi, että $2^n > m$, jolloin saadaan

$$2^nA_0A_n < A_0K < mA_0R < 2^nA_0R,$$

joten $2^nA_0A_n < 2^nA_0R$. On sopiva harjoitustehtävä osoittaa, että tästä seuraa $A_0A_n < A_0R$. Koska sekä A_n että R ovat puolisuoralla $\overrightarrow{A_0K}$, niin tämä merkitsee, että $A_0 * A_n * R$. Tämä taas lauseen 2.3.9 mukaan aiheuttaa sen, että $\measuredangle A_nOA_0 < \measuredangle ROA_0$. Aikaisemmin kohdassa $(*)$ todettiin, että $\measuredangle A_nOA_0 \cong \measuredangle B_{n+1}OI$ kaikilla n, ja toisaalta R:n valinnan nojalla pätee $\measuredangle ROA \cong \measuredangle POI$. Näistä päätellään $\measuredangle B_{n+1}OI < \measuredangle POI$, mikä on juuri sitä, mitä todistuksen alussa haluttiinkin. □

LAUSE 2.5.15 (Kulmamitan additiivisuus). *Olkoon $\measuredangle ABC$ mielivaltainen kulma ja $\overrightarrow{BD}$ kylkien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ välissä. Tällöin $(\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ = (\measuredangle ABC)^\circ$.*

Todistus. Olkoot pisteet P^1, P^2 ja P^3 sekä luvut k_n^1, k_n^2 ja k_n^3 kulmamitan konstuktiossa käytettyjä vastaten kulmia $\measuredangle ABD$, $\measuredangle DBC$ ja $\measuredangle ABC$, tässä järjestyksessä.



Kuva 84: Kulmamitan additiivisuus

Lukujen k_n määritelmän mukaan

$$k_n^1(\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^1OI$$

ja

$$k_n^2(\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^2OI.$$

Täten

$$(k_n^1 + k_n^2)(\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^3OI.$$

Tämän tarkka perustelu jää harjoitustehtäväksi. Se menee samaan tapaan kuin lauseen 2.5.4 todistuksen vastaava kohta. (Huomaa, että tämä on tämän todistuksen lähes ainoa paikka, jossa tarvitaan oletusta "$\overrightarrow{BD}$ on $\overrightarrow{BA}$:n ja $\overrightarrow{BC}$:n välissä".) Tällöin, edelleen k_n:n määritelmän mukaan

$$k_n^3 \geq k_n^1 + k_n^2.$$

Toisaalta taas $k_n^1 + 1$:lle pätee

$$(k_n^1 + 1)(\measuredangle B_n OI) \not< \measuredangle P^1 OI$$

ja vastaavasti

$$(k_n^2 + 1)(\measuredangle B_n OI) \not< \measuredangle P^2 OI,$$

joten voidaan päätellä, että

$$\big((k_n^1 + 1) + (k_n^2 + 1)\big)(\measuredangle B_n OI) \not< \measuredangle P^3 OI.$$

Tämä jää harjoitustehtäväksi. Tästä seuraa lukujen k_n määritelmän mukaan $k_n^3 < (k_n^1 + 1) + (k_n^2 + 1)$, eli, koska kyse on kokonaisluvuista, $k_n^3 \leq k_n^1 + k_n^2 + 1$. Nyt siis $k_n^1 + k_n^2 \leq k_n^3 \leq k_n^1 + k_n^2 + 1$, joten

$$\frac{k_n^1}{2^n} + \frac{k_n^2}{2^n} \leq \frac{k_n^3}{2^n} \leq \frac{k_n^1}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Antamalla $n \to \infty$ saadaan $(\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ \leq (\measuredangle ABC)^\circ \leq (\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ$ ja väite seuraa. □

LAUSE 2.5.16. *Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kulmia. Tällöin $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, jos ja vain jos $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ$.*

Todistus. 1° Jos $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, niin mittakonstruktiossa käytettävät pisteet P ja siten myös luvut k_n ja m_n ovat samoja kummallekin kulmalle ja niin raja-arvokin on sama.

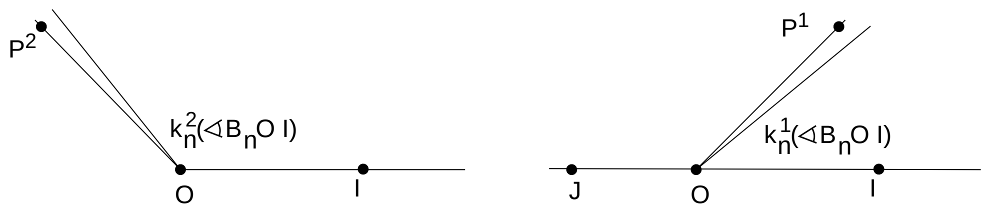
2° Olkoon $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ$. Tehdään vastaoletus: $\measuredangle ABC \neq \measuredangle DEF$. Tällöin lauseen 2.4.12 nojalla joko $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$ tai $\measuredangle DEF < \measuredangle ABC$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voi olettaa, että $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$. Tällöin $\overrightarrow{ED}$:n ja $\overrightarrow{EF}$:n välissä on puolisuora $\overrightarrow{EG}$ siten, että $\measuredangle GEF \cong \measuredangle ABC$. Nyt kohdan 1° nojalla $(\measuredangle GEF)^\circ = (\measuredangle ABC)^\circ$ ja lauseen 2.5.15 nojalla $(\measuredangle DEF)^\circ = (\measuredangle DEG)^\circ + (\measuredangle GEF)^\circ$, joten saadaan

$$(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ = (\measuredangle DEG)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ,$$

josta edelleen $(\measuredangle DEG)^\circ = 0$, mikä on vastoin lausetta 2.5.14. □

LAUSE 2.5.17. *Olkoot $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ toistensa täydennyskulmia. Tällöin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = 180$.*

Todistus. Olkoot pisteet P^1 ja P^2 sekä luvut k_n^1 ja k_n^2 kulmamitan konstruktiossa käytettyjä, vastaten kulmia $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ tässä järjestyksessä. Olkoon lisäksi piste J siten, että $J * O * I$. Tällöin kulma $\measuredangle JOP^1$ on kulman $\measuredangle P^1 OI$ täydennyskulma. Koska $\measuredangle P^1 OI \cong \measuredangle A$ niin lauseen 2.4.5 nojalla $\measuredangle JOP^1 \cong \measuredangle B$ ja siten $\measuredangle JOP^1 \cong \measuredangle P^2 OI$.



Kuva 85: Täydennyskulmien mitat

Yleisesti on niin, että jos $\measuredangle ROI < \measuredangle P^1OI$, niin täydennyskulmille pätee $\measuredangle JOP^1 < \measuredangle JOR$, mikä seuraa suoraan lauseesta 2.3.10 iii). Toisaalta kulman $k \cdot (\measuredangle B_nOI)$, $k = 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$ täydennyskulma on yhtenevä kulman $(2^{n+1} - k) \cdot (\measuredangle B_nOI)$ kanssa, minkä voi tarkastaa induktiolla n:n suhteen. (Tee se!) Siis, jos pätee $k \cdot (\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^1OI$, niin täydennyskulmille saadaan

$$\measuredangle JOP^1 < \big(2^{n+1} - k(\measuredangle B_nOI)\big)$$

ja siten

$$\measuredangle P^2OI < \big(2^{n+1} - k(\measuredangle B_nOI)\big).$$

Lukujen k_n määritelmän nojalla $k_n^1(\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^1OI$, joten $\measuredangle P^2OI < (2^{n+1} - k_n^1)(\measuredangle B_nOI)$, mistä seuraa, että

$$k_n^2 \leq 2^{n+1} - k_n^1 - 1.$$

Toisaalta $k_n^2 \geq 2^{n+1} - k_n^1 - 2$, minkä perustelemme seuraavasti: Jos $2^{n+1} - k_n^1 - 2 \leq 0$, niin asia on selvä. Olkoon siis $2^{n+1} - k_n^1 - 2 > 0$. Lukujen k_n määritelmän nojalla riittää osoittaa, että $(2^{n+1} - k_n^1 - 2)(\measuredangle B_nOI) < \measuredangle P^2OI$. Ylläolevia täydennyskulmia koskeva tarkastelu toistamalla nähdään, että näin on, mikäli

$$\measuredangle P^1OI < \big(2^{n+1} - (2^{n+1} - k_n^1 - 2)\big) \cdot (\measuredangle B_nOI)$$

eli

$$\measuredangle P^1OI < (k_n^1 + 2) \cdot (\measuredangle B_nOI).$$

Tämä puolestaan pätee, sillä määritelmän mukaan $\measuredangle P^1OI < (k^1 + 1)(\measuredangle B_nOI)$ tai $\measuredangle P^1OI \cong (k^1 + 1)(\measuredangle B_nOI)$. Koska $(k_n^1 + 1)(\measuredangle B_nOI) < (k_n^1 + 2)(\measuredangle B_nOI)$, niin kummassakin tapauksessa $\measuredangle P^1OI < (k_n^1 + 2)(\measuredangle B_nOI)$. Kaiken kaikkiaan on siis nähty, että

$$2^{n+1} - k_n^1 - 2 \leq k_n^2 \leq 2^{n+1} - k_n^1 - 1,$$

jolloin $2^{n+1} - 2 \leq k_n^1 + k_n^2 \leq 2^{n+1} - 1$ ja edelleen

$$2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{k_n^1}{2^n} + \frac{k_n^2}{2^n} \leq 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Annetaan $n \to \infty$ ja kerrotaan astemitan määritelmässä olevalla skaalauskertoimella 90, jolloin saadaan lopulta

$$180 \leq (\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ \leq 180,$$

josta väite seuraa. □

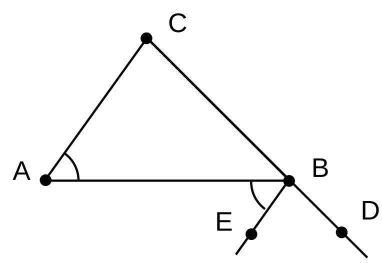
LAUSE 2.5.18. *Olkoon $\measuredangle A$ kulma. Tällöin $(\measuredangle A)^\circ < 180$.*
Todistus. Seuraa suoraan lauseista 2.5.17 ja 2.5.14. □

LAUSE 2.5.19. *Olkoon $\measuredangle A$ kulma. Tällöin $\measuredangle A$ on suora, jos ja vain jos $(\measuredangle A)^\circ = 90$.*
Todistus. 1°) Olkoon $\measuredangle A$ suora kulma ja $\measuredangle B$ sen täydennyskulma. Tällöin $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ ja lauseen 2.5.16 nojalla $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle B)^\circ$. Toisaalta lauseen 2.5.17 mukaan $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = 180$, joten $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle A)^\circ = 180$ eli $(\measuredangle A)^\circ = 90$.
2°) Olkoon $(\measuredangle A)^\circ = 90$ ja $\measuredangle B$ jokin suora kulma. Kohdan 1° nojalla $(\measuredangle B)^\circ = 90$, joten $(\measuredangle B)^\circ = (\measuredangle A)^\circ$ ja lauseen 2.5.16 mukaan tällöin $\measuredangle B \cong \measuredangle A$ ja väite seuraa lauseesta 2.4.7. □

LAUSE 2.5.20. *Olkoot $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ kulmia. Tällöin $\measuredangle A < \measuredangle B$, jos ja vain jos $(\measuredangle A)^\circ < (\measuredangle B)^\circ$.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Koulukurssista mahdollisesti tuttu tieto on, että ”kolmion kulmien astemittojen summa on 180”. Osataanko tällaista todistaa nyt? Ei osata, sillä on olemassa malleja, jotka toteuttavat tähänastiset aksioomat, mutta joissa kolmion kulmien astelukujen summa on pienempi kuin 180. Jotakin tämänsuuntaista osaamme kuitenkin jo todistaa tähänastisista aksioomista:

LAUSE 2.5.21. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ < 180$.*
Todistus. Valitaan piste D siten, että $D * B * D$.



Kuva 86: Kahden kulman summa

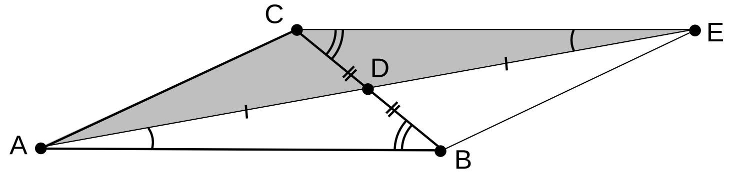
Ulkokulmaepäyhtälön 2.4.19 nojalla $\measuredangle A < \measuredangle ABD$. Tällöin puolisuorien $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BD}$ välissä on $\overrightarrow{BE}$ siten, että $\measuredangle ABE \cong \measuredangle A$. Nyt lauseen 2.3.10 iii) nojalla $\overrightarrow{BA}$ on $\overrightarrow{BC}$:n ja $\overrightarrow{BE}$:n välissä, joten voidaan soveltaa lausetta 2.5.15 jonka mukaan $(\measuredangle CBA)^\circ + (\measuredangle ABE)^\circ = (\measuredangle CBE)^\circ$. Lauseen 2.5.16 nojalla $(\measuredangle ABE)^\circ = (\measuredangle A)^\circ$ ja siten lauseen 2.5.18 nojalla saadaan $(\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle A)^\circ < 180$. □

Lausetta 2.5.21 voidaan parantaa; seuraava tulos on nimeltään Saccherin[16] ja Legendre'in lause.

[16] Giovanni Girolamo Saccheri 1667–1733. Italia

LAUSE 2.5.22 (Saccheri ja Legendre). *Olkoon* $\triangle ABC$ *kolmio. Tällöin* $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ \leq 180$.

Todistus. Vaihtamalla tarvittaessa merkintöjä voidaan olettaa, että $(\measuredangle A)^\circ \leq (\measuredangle B)^\circ$ ja $(\measuredangle A)^\circ \leq (\measuredangle C)^\circ$. Merkitään $\alpha = (\measuredangle A)^\circ$. Lauseen 2.5.1 nojalla janalla BC on keskipiste, olkoon se D. Valitaan lisäksi piste E siten. että $A * D * E$ ja $AD \cong DE$.



KUVA 87: SACCHERIN JA LEGENDRE'IN LAUSE

Lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle ADB \cong \measuredangle EDC$, jolloin SKS-säännön nojalla $\triangle ADB \cong \triangle EDC$. Erityisesti $\measuredangle B \cong \measuredangle DCE$ ja $\measuredangle BAD \cong \measuredangle CED$. Koska $B * D * C$ ja $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$, niin $\overrightarrow{AE}$ on kulman $\measuredangle BAC$ sisällä, jolloin lauseen 2.5.15 nojalla

$$(*) \qquad (\measuredangle BAD)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ.$$

Koska $A * D * E$ ja $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$, niin $\overrightarrow{CB}$ on kulman $\measuredangle ACE$ sisällä, ja lauseesta 2.5.15 saadaan

$$(**) \qquad (\measuredangle ACB)^\circ + (\measuredangle BCE)^\circ = (\measuredangle ACE)^\circ.$$

Yhdistämällä nämä tiedot saadaan

$$\begin{aligned}
&(\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle C)^\circ \\
=&(\measuredangle ABC)^\circ + (\measuredangle BAC)^\circ + (\measuredangle ACB)^\circ \\
=&(\measuredangle DCE)^\circ + \big((\measuredangle BAD)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ\big) + \big((\measuredangle ACE)^\circ - (\measuredangle BCE)^\circ\big) \\
=&(\measuredangle BCE)^\circ + (\measuredangle CED)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ + (\measuredangle ACE)^\circ - (\measuredangle BCE)^\circ \\
=&(\measuredangle CEA)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ + (\measuredangle ACE)^\circ.
\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa sitä, että kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle AEC$ kulmien astemittojen summat ovat samat. Lisäksi, koska $(\measuredangle AEC)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ = (\measuredangle BAE)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ = \alpha$, niin joko $(\measuredangle AEC)^\circ \leq \frac{1}{2}\alpha$ tai $(\measuredangle EAC)^\circ \leq \frac{1}{2}\alpha$. On siis löydetty uusi kolmio $\triangle AEC$, jonka kulmien astemittojen summa on sama kuin alkuperäisessä, mutta pienimmän kulman astemitta on korkeintaan $\frac{1}{2}\alpha$.

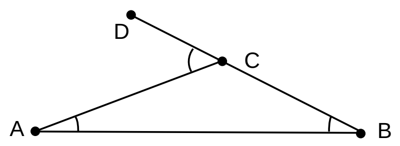
Tehdään nyt sama temppu uudelle kolmiolle $\triangle AEC$, jolloin saadaan taas uusi kolmio, jonka kulmien astemittojen summa on edelleen sama, mutta pienimmän kulman astemitta on korkeintaan $\frac{1}{4}\alpha$. Toistamalla menettely n kertaa saadaan aikaan kolmio Δ_n, jonka kulmien astelukujen summa on sama kuin alkuperäisen kolmion $\triangle ABC$, mutta pienimmän kulman astemitta on korkeintaan $1/2^n$. Palataan nyt varsinaiseen väitteeseen $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ \leq 180$. Tehdään vastaoletus: $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ > 180$. Merkitään $\delta = (\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ - 180$, jolloin $\delta > 0$. Valitaan luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{2^n}\alpha < \delta$ ja olkoon Δ_n yllä-konstruoitu kolmio, olkoot $\measuredangle A'$, $\measuredangle B'$ ja $\measuredangle C'$ sen kulmat ja $\measuredangle A'$ niistä pienin, jolloin

$(\measuredangle A') \leq (1/2^n)\,\alpha < \delta$. Lauseen 2.5.21 nojalla $(\measuredangle B')^\circ + (\measuredangle C')^\circ < 180$ ja toisaalta Δ_n:n konstruktion nojalla $(\measuredangle A')^\circ + (\measuredangle B')^\circ + (\measuredangle C')^\circ = (\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ$. Tällöin saadaan

$$\delta = (\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ - 180 = (\measuredangle A')^\circ + (\measuredangle B')^\circ + (\measuredangle C')^\circ - 180 < \delta + 180 - 180 = \delta,$$

eli $\delta < \delta$, mikä on mahdotonta. □

Jos $\triangle ABC$ on kolmio ja $B * C * D$, niin ulkokulmaepäyhtälön 2.4.19 mukaan $\measuredangle B < \measuredangle ACD$ ja $\measuredangle A < \measuredangle ACD$, jolloin lauseen 2.5.20 perusteella $(\measuredangle B)^\circ < (\measuredangle ACD)^\circ$ ja $(\measuredangle A)^\circ < (\measuredangle ACD)^\circ$. Saccherin ja Legendre'in lauseen avulla tätä tulosta voidaan parantaa.



Kuva 88: Ulkokulma

LAUSE 2.5.23. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $B * C * D$. Tällöin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ \leq (\measuredangle ACD)^\circ$.*
Todistus. Todistus sopii harjoitustehtäväksi. □

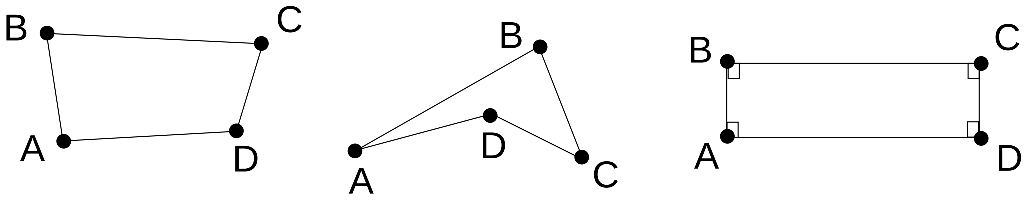
Määritelmä 2.20. Olkoot $\triangle ABC$ kolmio. Sanotaan, että kolmion $\triangle ABC$ *defekti*, eli *kulmapoikkeama* $\mathrm{def}(\triangle ABC)$ on luku

$$\mathrm{def}(\triangle ABC) = 180 - \big((\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ\big) \in \mathbb{R}.$$

Jos aiemmin mainittu koulukurssin tieto kolmion kulmien summasta pitäisi paikkansa, niin jokaisen kolmion defekti olisi nolla, eikä määritelmässä olisi mitään järkeä. Näin ei siis kuitenkaan ole, vaan on olemassa malleja, joissa voi olla $\mathrm{def}(\triangle ABC) > 0$ jollekin kolmiolle. Huomaa, että Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla defekti ei voi olla negatiivinen. Koordinaattitason pisteiden ja suorien muodostamassa mallissa, joka toteuttaa kaikki tähänastiset aksioomat, pätee $\mathrm{def}(\triangle ABC) = 0$ jokaiselle kolmiolle. Toisaalta myöhemmin konstruoimme ns. Poincarén mallin, jossa $\mathrm{def}(\triangle ABC) > 0$ jokaiselle kolmiolle. Sellaisia malleja, joissa olisi $\mathrm{def}(\triangle ABC) = 0$ jollekin kolmiolle ja $\mathrm{def}(\triangle DEF) > 0$ jollekin toiselle kolmiolle, ei ole olemassa. Tämä tullaan kohta todistamaan. Asia liittyy läheisesti suorakulmioon, joka ensin määritellään.

Määritelmä 2.21. Järjestettyä pistenelikköä (A, B, C, D) sanotaan *nelikulmioksi* $\square ABCD$, jos mitkään kolme niistä eivät ole samalla suoralla eivätkä janat AB ja CD leikkaa toisiaan eivätkä myöskään BC ja AD leikkaa toisiaan.

(1) Pisteet A, B, C ja D ovat nelikulmion $\square ABCD$ *kärjet*.
(2) Janat AB, BC, DC ja DA ovat sen *sivut*.
(3) $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$ ja DAB ovat sen *kulmat*.
(4) Nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria kulmia, on *suorakulmio*.



Kuva 89: Nelikulmioita

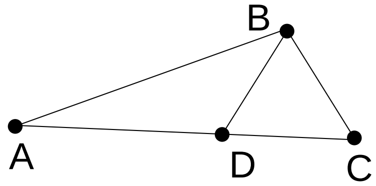
Joukko $\{A, B, C, D\}$ ei ole nelikulmio, vaan vasta järjestetty pistenelikkö (A, B, C, D) on nelikulmio, jos sekään. Seuraavassa kuvassa ei (A, B, C, D) eikä myöskään (E, F, G, H) ole nelikulmio, mutta $(E, G, F, H) = \square EGFH$ on.

Kuva 90: Eivät nelikulmioita

Huomautus 25. Suorakulmaisia kolmioita on helppo konstruoida, tämähän seuraa lauseesta 2.4.8. Voisi luulla, että suorakulmion konstruointi olisi yhtä yksinkertaista. Näin ei kuitenkaan ole. Kokeile! Kolme kulmaa saa aina suoraksi, mutta se neljäs....

Tässä tuleekin vastaan aika yllättävä ongelma: onko suorakulmioita olemassa ollenkaan? Tavallisessa koordinaattigeometriassa näitä toki on, mutta yo. kysymys pitää ymmärtää niin, että onko jokaisessa tähänastiset aksioomat toteuttavassa mallissa suorakulmioita. Tätä asiaa tutkitaan jatkossa. Todistetaan ensin pieni mutta kiintoisa aputulos:

LAUSE 2.5.24 (Defektin additiivisuus). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $A * D * C$. Tällöin* $\mathrm{def}(\triangle ABC) = \mathrm{def}(\triangle ADB) + \mathrm{def}(\triangle BDC)$.



Kuva 91: Defektin additiivisuus

Todistus. Koska $A * D * C$, niin $\overrightarrow{BD}$ on $\overrightarrow{BA}$:n ja $\overrightarrow{BC}$:n välissä, joten lauseen 2.5.15 mukaan $(\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ = (\measuredangle ABC)^\circ$. Toisaalta $\measuredangle ADB$ on kulman $\measuredangle BDC$

täydennyskulma, joten lauseen 2.5.17 nojalla $(\measuredangle ADB)^\circ + (\measuredangle BDC)^\circ = 180$. Tällöin

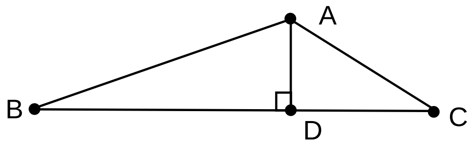
$$\begin{aligned}
&\mathrm{def}(\triangle ADB) + \mathrm{def}(\triangle BDC)\\
=&180 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle ADB)^\circ - (\measuredangle ABD)^\circ + 180 - (\measuredangle C)^\circ - (\measuredangle BDC)^\circ - (\measuredangle DBC\\
=&360 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle C)^\circ - \big((\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ\big) - \big((\measuredangle ADB)^\circ + (\measuredangle BDC)^\circ\big)\\
=&180 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle C)^\circ - (\measuredangle B)^\circ = \mathrm{def}(\triangle ABC).
\end{aligned}$$

□

Suorakulmioiden olemassaolo ja kolmioiden defekti liittyvät läheisesti toisiinsa:

LAUSE 2.5.25. *Jos on olemassa kolmio, jonka defekti on nolla, niin on olemassa suorakulmio.*

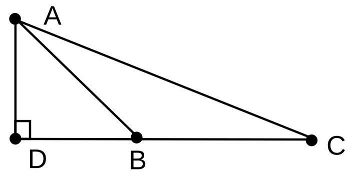
Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jolle $\mathrm{def}(\triangle ABC) = 0$. Saccherin ja Legendre'in lauseen 2.5.14 nojalla jokaisessa kolmiossa on ainakin kaksi kulmaa, joiden astemitta on alle 90. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan nyt olettaa, että $(\measuredangle B)^\circ < 90$ ja $(\measuredangle C)^\circ < 90$. Lauseen 2.4.8 nojalla A:n kautta kulkee suoran $\overleftrightarrow{BC}$ normaali, olkoon D sen ja $\overleftrightarrow{BC}$:n leikkauspiste.



Kuva 92: Apupiirros

Osoitetaan aluksi, että $B * D * C$: Jos näin ei olisi, niin toteutuisi jokin vaihtoehdoista

a) $D * B * C$
b) $D = B$
c) $D = C$
d) $D * C * B$



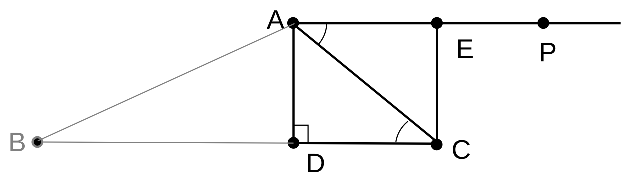
Kuva 93: Tapaus a)

Tapauksessa a) on lauseen 2.5.23 mukaan $(\measuredangle D)^\circ + (\measuredangle DAB)^\circ \leq (\measuredangle ABC)^\circ$. Tässä $\measuredangle D$ on suora, joten lauseen 2.5.19 nojalla $(\measuredangle D)^\circ = 90$ ja lauseen 2.5.14 mukaan $(\measuredangle DAB)^\circ > 0$, ja siis $90 < (\measuredangle ABC)^\circ$, mikä on vastoin oletusta $(\measuredangle B)^\circ < 90$.

Tapauksessa b) kulma $\measuredangle ABC$ on suora ja siten $(\measuredangle ABC)^\circ = 90$, mikä on taas vastoin oletusta. Tapaus c) on samanlainen kuin b) ja d) samanlainen kuin a).

On siis nähty, että $B * D * C$. Tällöin lauseen 2.5.24 nojalla $\mathrm{def}(\triangle ABC) =$

def$(\triangle ABD)$ + def$(\triangle ADC)$. Koska oletuksen mukaan def$(\triangle ABC) = 0$ ja Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla jokaisen kolmion defekti on ei-negatiivinen, niin tämä on mahdollista ainoastaan, mikäli def$(\triangle ABD) = 0 =$ def$(\triangle ADC)$. On siis löydetty nimenomaan suorakulmainen kolmio, jolla on defekti 0 eli kulmien astelukujen summa 180.



Kuva 94: Suorakulmion konstruktio

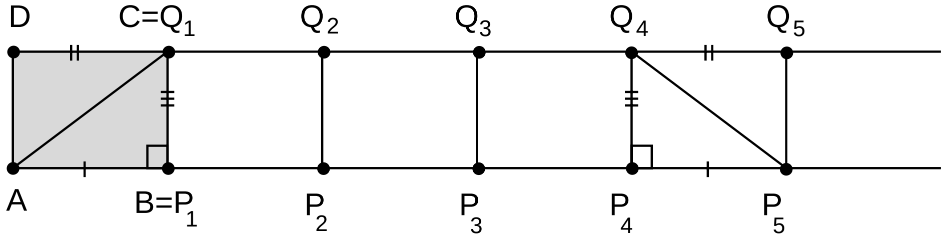
Valitaan nyt piste P siten, että $D\overleftrightarrow{AC}P$ ja $\measuredangle DCA \cong \measuredangle CAP$ ja edelleen valitaan $E \in \overrightarrow{AP}$ siten, että $AE \cong DC$. Tällöin SKS-säännön nojalla $\triangle DCA \cong \triangle EAC$. Erityisesti $\measuredangle ADC \cong \measuredangle CEA$. Koska $\overleftrightarrow{AD}$ on suoran $\overleftrightarrow{BC}$ normaali, niin kulma $\measuredangle ADC$ on suora. Lauseen 2.4.7 nojalla tällöin myös kulma $\measuredangle CEA$ on suora. Osoitetaan, että myös $\measuredangle EAD$ on suora: Lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ eli suorat eivät leikkaa toisiaan, joten $DC\overleftrightarrow{AE}$. Koska $\triangle DCA \cong \triangle EAC$, niin $\measuredangle DAC \cong \measuredangle ECA$, jolloin lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$, josta seuraa, että $EC\overleftrightarrow{AD}$. Tällöin määritelmän mukaan C on kulman $\measuredangle EAD$ sisällä eli $\overrightarrow{AC}$ on $\overrightarrow{AE}$:n ja $\overrightarrow{AD}$:n välissä. Lauseen 2.5.15 nojalla $(\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle CAE)^\circ = (\measuredangle EAD)^\circ$. Koska $\measuredangle CAE \cong \measuredangle ACD$, niin lauseen 2.5.16 mukaan $(\measuredangle CAE)^\circ = (\measuredangle ACD)^\circ$ ja saadaan $(\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ = (\measuredangle EAD)^\circ$. Nyt käytetään hyväksi sitä tietoa, että def$(\triangle ACD) = 0$. Tällöin näet $(\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ = 180 - (\measuredangle D)^\circ$ ja koska $\measuredangle D$ on suora, $180 - (\measuredangle D)^\circ = 180 - 90 = 90$. Siten saadaan $(\measuredangle EAD)^\circ = (\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ = 90$, joten lauseen 2.5.19 nojalla $\measuredangle EAD$ on suora.

Vastaavasti nähdään, että myös $\measuredangle DCE$ on suora, sillä ensinnäkin $AE\overleftrightarrow{DC}$ ja $AD\overleftrightarrow{EC}$, joten $\overrightarrow{CA}$ on $\overrightarrow{CD}$:n ja $\overrightarrow{CE}$:n välissä ja saadaan $(\measuredangle DCA)^\circ + (\measuredangle ACE)^\circ = (\measuredangle DCE)^\circ$. Käyttäen hyväksi tietoja $(\measuredangle ACE)^\circ = (\measuredangle DAC)^\circ$ ja def$(\triangle ADC) = 0$ sekä $(\measuredangle D)^\circ = 90$ saadaan kuten edellä $(\measuredangle DCE)^\circ = 90$ ja siten $\measuredangle DCE$ on suora.

Koska, kuten todettiin, $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AE}$ ja $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{EC}$, niin mitkään kolme pisteistä A, D, C ja E eivät voi kuulua samalle suoralle, eivätkä janat AD, DC, CE ja EA voi leikata toisiaan muualla kuin päätepisteissä, joten $\square ADCE$ on nelikulmio. Koska sen kaikki kulmat ovat suoria, se on suorakulmio. $\square$

LAUSE 2.5.26. *Jos on olemassa suorakulmio, niin jokaisen kolmion defekti on nolla.*

Todistus. Olkoon $\square ABCD$ suorakulmio ja $\triangle EFG$ mielivaltainen kolmio. Tässä on kaksi mahdollisuutta; joko a) $\triangle EFG$ on suorakulmainen tai b) $\triangle EFG$ ei ole suorakulmainen. Osoittautuu, että tapaus b) palautuu suorakulmaisen kolmion tapaukseen a) ja että lause on a)-tapauksessa helppo todistaa, kunhan suorakulmio on niin suuri, että kolmio voidaan kopioida sen nurkkaan kuvion 97 mukaisesti. Todistus alkaa siksi niin, että suurennamme suorakulmiotamme $\square ABCD$. Valitaan kaikille $n \in \mathbb{N}$ pisteet $P_n \in \overrightarrow{AB}$ ja $Q_n \in \overrightarrow{DC}$ siten, että $AP_n \cong n \cdot AB$ ja $DQ_n \cong n \cdot DC$.



Kuva 95: Suorakulmion ensimmäinen laajennus

Todistamme aluksi induktiolla n:n suhteen, että jokainen $\square AP_nQ_nD$ on suorakulmio, jossa $P_nQ_n \cong BC$. Tapaus $n = 1$ on tietysti kunnossa. Oletetaan, että väite on tosi arvolla n ja osoitetaan se todeksi myös arvolla $n + 1$. Pitää näyttää, että

(1) $\square AP_{n+1}Q_{n+1}D$ on nelikulmio.
(2) Nelikulmion $\square AP_{n+1}Q_{n+1}D$ kulmat ovat suoria.
(3) $P_{n+1}Q_{n+1} \cong BC$.

(1) Oletuksen nojalla $\overleftrightarrow{DC}$ ja $\overleftrightarrow{AB}$ ovat suoran $\overleftrightarrow{AD}$ normaaleja, ja siten lauseen 2.4.17 mukaan yhdensuuntaisia. Koska D ja Q_{n+1} ovat suoralla $\overleftrightarrow{DC}$ ja A ja P_{n+1} suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, niin mitkään kolme niistä eivät voi olla samalla suoralla. $\overleftrightarrow{AB}$:n ja $\overleftrightarrow{DC}$:n yhdensuuntaisuudesta seuraa lisäksi se, että janat AP_{n+1} ja DQ_{n+1} eivät voi leikata toisiaan. Pitää vielä osoittaa, että myöskään janat AD ja $P_{n+1}Q_{n+1}$ eivät leikkaa toisiaan. Tämä seuraa siitä, että oletuksen nojalla $\overleftrightarrow{BC}$ ja $\overleftrightarrow{AD}$ ovat $\overleftrightarrow{AB}$:n normaaleja, joten lauseen 2.4.17 mukaan $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, jolloin $BC\overleftrightarrow{AD}$ ja koska $P_{n+1}B\overleftrightarrow{AD}$ ja $Q_{n+1}C\overleftrightarrow{AD}$, niin $P_{n+1}Q_{n+1}\overleftrightarrow{AD}$. Näin jana $P_{n+1}Q_{n+1}$ ei voi leikata edes suoraa $\overleftrightarrow{AD}$ eikä erityisesti janaa AD.

(2) Valintojen nojalla $P_nP_{n+1} \cong AB$ ja $Q_nQ_{n+1} \cong DC$. Lisäksi induktio-oletuksen nojalla $P_nQ_n \cong BC$ ja kulma $\measuredangle AP_nQ_n$ on suora, jolloin myös sen täydennyskulma $\measuredangle P_{n+1}P_nQ_n$ on suora. Tällöin siis SKS-säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle P_{n+1}P_nQ_n$. Erityisesti $AC \cong P_{n+1}Q_n$ ja $\measuredangle ACB \cong \measuredangle P_{n+1}Q_nP_n$. Induktio-oletuksen nojalla myös $\measuredangle DQ_nP_n$ on suora ja siten myös sen täydennyskulma $\measuredangle Q_{n+1}Q_nP_n$ on suora. Nyt $\overrightarrow{Q_nP_{n+1}}$ on puolisuorien $\overrightarrow{Q_nP_n}$ ja $\overrightarrow{Q_nQ_{n+1}}$ välissä (Koska $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, eli $\overleftrightarrow{P_nP_{n+1}} \parallel \overleftrightarrow{Q_nQ_{n+1}}$, niin $P_nP_{n+1}\overleftrightarrow{Q_nQ_{n+1}}$. Koska $\overleftrightarrow{Q_nP_n} \parallel \overleftrightarrow{DA}$ niin $DA\overleftrightarrow{Q_nP_n}$ ja siis $Q_{n+1}P_{n+1}\overleftrightarrow{Q_nP_n}$). Kulmamitan additiivisuuslause 2.5.15 antaa siis $(\measuredangle P_nQ_nP_{n+1})^\circ + (\measuredangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1})^\circ = (\measuredangle P_nQ_nQ_{n+1})^\circ$. Koska, kuten todettiin, $\measuredangle P_nQ_nQ_{n+1}$ on suora, saadaan lauseen 2.5.19 nojalla

$$(*) \qquad (\measuredangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1})^\circ = 90 - \big(\measuredangle P_nQ_nP_{n+1}\big)^\circ.$$

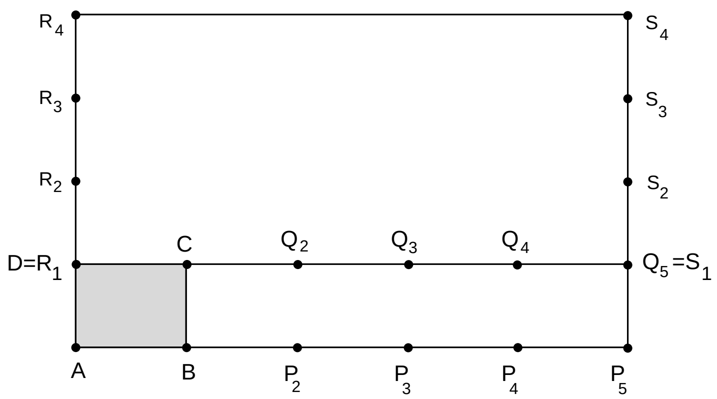
Vastaavasti $\overrightarrow{CA}$ on $\overrightarrow{CD}$:n ja $\overrightarrow{CB}$:n välissä (Totea!) ja $\measuredangle DCB$ on oletuksen nojalla suora, joten 2.5.15 antaa $(\measuredangle DCA)^\circ + (\measuredangle ACB)^\circ = (\measuredangle DCB)^\circ$, josta edelleen 2.5.19:n nojalla

$$(**) \qquad (\measuredangle DCA)^\circ = 90 - (\measuredangle ACB)^\circ.$$

Koska, kuten yllä todettiin, $\measuredangle ACB \cong \measuredangle P_nQ_nP_{n+1}$, niin 2.5.16:n nojalla $(\measuredangle ACB)^\circ = (\measuredangle P_nQ_nP_{n+1})^\circ$. Tällöin $(*)$ ja $(**)$ antavat $(\measuredangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1})^\circ = (\measuredangle DCA)^\circ$. Lauseen 2.5.16 nojalla tämä merkitsee sitä, että $\measuredangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1} \cong \measuredangle DCA$. Koska, kuten todettiin, $P_{n+1}Q_n \cong AC$ ja $Q_nQ_{n+1} \cong DC$, niin SKS-sääntö antaa nyt $\triangle P_{n+1}Q_nQ_{n+1} \cong \triangle DCA$. Erityisesti $P_{n+1}Q_{n+1} \cong DA$ ja $\measuredangle P_{n+1}Q_{n+1}Q_n \cong \measuredangle DAC$. Koska oletuksen mukaan $\measuredangle DAC$ on suora, niin lauseen 2.4.7 nojalla myös $\measuredangle P_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ on suora. Vaihtamalla merkintöjä ($A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$ ja $P \leftrightarrow Q$) nähdään samalla tavalla, että myös $\measuredangle Q_{n+1}P_{n+1}P_n$ on suora. Siten kulmat $P_{n+1}Q_{n+1}D = \measuredangle P_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ ja $\measuredangle Q_{n+1}P_{n+1}A = \measuredangle Q_{n+1}P_{n+1}P_n$ ovat suoria. Nelikulmion $\square AP_{n+1}Q_{n+1}D$ kahden muun kulman suoruus todettiinkin jo aikaisemmin.

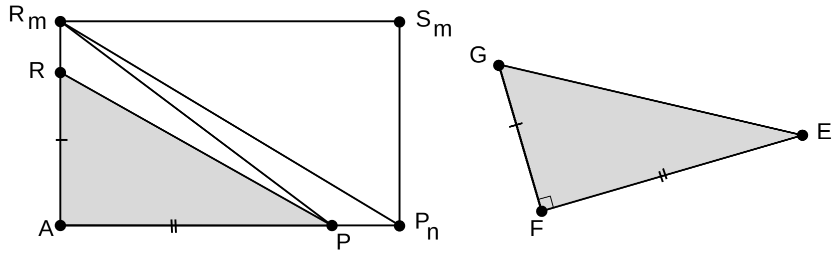
(3) Kolmanneksi pitää osoittaa, että $P_{n+1}Q_{n+1} \cong BC$. Olemme jo osoittaneet, että $P_{n+1}Q_{n+1} \cong AD$, joten riittää osoittaa, että $AD \cong BC$. Tämä seuraa puolestaan oletuksesta, kunhan näytetään, että suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhtenevät. (Sopivia harjoitustehtäviä.)

On siis induktiolla osoitettu, että jokainen $\square AP_nQ_nD$ on suorakulmio, jossa $P_nQ_n \cong BC$. Palataan tapauksen (1) alkuun. Arkhimedeen aksiooman nojalla on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $FE < n \cdot AB$ ja $m \in \mathbb{N}$ siten, että $FG < m \cdot AD$. Valitaan P_n ja Q_n kuten edellä, jolloin $\square AP_nQ_nD$ on suorakulmio. Valitaan edelleen $R_m \in \overrightarrow{AD}$ ja $S_m \in \overrightarrow{P_nQ_n}$ siten, että $AR_m \cong m \cdot AD$ ja $P_nS_m \cong P_nQ_n$. Toistamalla tekemämme induktioperustelu eri merkinnöin nähdään, että $\square AP_nS_mR_m$ on suorakulmio, jolle lisäksi pätee $FE < AP_n$ ja $FG < P_nS_m$.



Kuva 96: Suorakulmion toinen laajennus

Merkintöjä tarvittaessa muuttamalla voidaan järjestää, että tutkittavassa suorakulmaisessa kolmiossa $\triangle EFG$ nimenomaan kulma $\measuredangle F$ on suora. Nyt on olemassa $P \in AP_n$ siten, että $AP \cong FE$ ja $R \in AR_n$ siten, että $AR \cong FG$.



Kuva 97: Suorakulmaisen kolmion defekti

Nyt apukolmion $\triangle AP_nR_m$ defekti on 0 seuraavasta syystä: Koska jo todettiin, että yleensäkin suorakulmiossa vastakkaiset sivut ovat yhtenevät, niin $AR_m \cong P_nS_m$ ja $AP_n \cong R_mS_m$. SKS-säännön nojalla on siis $\triangle R_mAP_n \cong \triangle P_nS_mR_m$. Erityisesti $\measuredangle AR_mP_n \cong \measuredangle S_mP_nR_m$, joten $(\measuredangle AR_mP_n)^\circ = (\measuredangle S_mP_nR_m)^\circ$. Toisaalta, koska $\overleftrightarrow{AR_m} \parallel \overleftrightarrow{P_nS_m}$, ja $\overleftrightarrow{AP_n} \parallel \overleftrightarrow{R_mS_m}$, niin $\overrightarrow{P_nR_m}$ on puolisuorien $\overrightarrow{P_nA}$ ja $\overrightarrow{P_nS_m}$ välissä. Tällöin $(\measuredangle AP_nR_m)^\circ + (\measuredangle S_mP_nR_m)^\circ = (\measuredangle AP_nS_m)^\circ = 90$ eli todellakin

$$\begin{aligned}
\operatorname{def}(\triangle AP_nR_m) &= 180 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle AR_mP_n)^\circ - (\measuredangle AP_nR_m)^\circ \\
&= 180 - 90 - (\measuredangle S_mP_nR_m)^\circ - (90 - (\measuredangle S_mP_nR_m)^\circ) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tutkittavan kolmion $\triangle EFG$ defektin häviäminen saadaan nyt laskemalla vaiheittain eri apukolmioista: Koska $A * P * P_n$, niin lauseen 2.5.24 nojalla

$$\operatorname{def}(\triangle APR_n) + \operatorname{def}(\triangle PR_mP_n) = \operatorname{def}(\triangle AP_nR_m) = 0.$$

Mutta jokaisen kolmion defekti on ei-negatiivinen, joten tämä on mahdollista ainoastaan, mikäli molemmat yhteenlaskettavat ovat nollia, siis erityisesti $\operatorname{def}(\triangle APR_n) = 0$. Koska $A * R * R_m$, niin vastaavasti myös

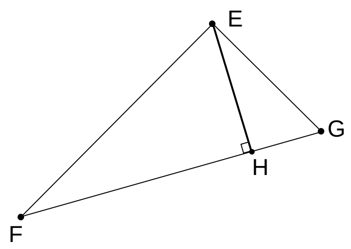
$$\operatorname{def}(\triangle APR) + \operatorname{def}(\triangle PRR_m) = \operatorname{def}(\triangle APR_m) = 0.$$

Tämä on taas mahdollista vain, kun $\operatorname{def}(\triangle APR) = 0$. Pisteiden P ja R valinnan nojalla $AP \cong FE$ ja $AR \cong FG$. Koska $\measuredangle F$ on suora, niin SKS-säännön nojalla $\triangle PAR \cong \triangle EFG$. Erityisesti $(\measuredangle P)^\circ = (\measuredangle E)^\circ$, $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle F)^\circ$ ja $(\measuredangle R)^\circ = (\measuredangle G)^\circ$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\operatorname{def}(\triangle EFG) &= 180 - (\measuredangle E)^\circ - (\measuredangle F)^\circ - (\measuredangle G)^\circ \\
&= 180 - (\measuredangle P)^\circ - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle R)^\circ \\
&= \operatorname{def}(\triangle PAR) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Näin suorakulmaisen kolmion defekti on todettu nollaksi.

Yleinen tapaus b) palautuu suorakulmaiseen seuraavalla tavalla. Jos kolmiossa $\triangle EFG$ ei ole suoraa kulmaa, niin siinä on ainakin kaksi sellaista kulmaa, joiden astemitta on alle 90. Tämä nähtiin lauseen 2.5.25 todistuksen yhteydessä. Voimme siis olettaa, että $\measuredangle F$ ja $\measuredangle G$ ovat tällaisia. Lauseen 2.5.25 todistuksesta näkyy myös, että jos H on pisteen E kautta kulkeva $\overleftrightarrow{FG}$:n normaalin ja suoran $\overleftrightarrow{FG}$ leikkauspiste, niin $F * H * G$.



Kuva 98: Tapaus (b) palautuu tapaukseen a)

Tässä kolmiot $\triangle FHE$ ja $\triangle GHE$ ovat nyt suorakulmaisia, joten a) -kohdan nojalla $\operatorname{def}(\triangle FHE) = 0 = \operatorname{def}(\triangle GHE)$. Defektin additiivisuuslausetta 2.5.24 soveltaen saadaan tällöin

$$\operatorname{def}(\triangle EFG) = \operatorname{def}(\triangle FHE) + \operatorname{def}(\triangle GHE) = 0 + 0 = 0.$$

$\square$

Huomautus 26. Jos siis on olemassa kolmio, jonka defekti on 0, niin lauseen 2.5.25 nojalla on olemassa suorakulmio, jolloin lauseen 2.5.26 mukaan jokaisen kolmion defekti on 0. Huomaa, että tämä kaikki ei sano mitään siitä, onko nolladefektisiä kolmioita olemassa vai ei. Tähänastisista aksioomista ei voidakaan johtaa tällaisen kolmion olemassaoloa sen enempää kuin olemattomuuttakaan. Kirjataan ylläsanottu vielä lauseeksi:

LAUSE 2.5.27. *Jos on olemassa kolmio, jonka defekti on aidosti positiivinen, niin jokaisen kolmion defekti on aidosti positiivinen. (Jos siis yhdenkin kolmion defekti on nolla, on kaikkien defekti nolla.)*

2.6. Dedekindin aksiooma.

Määritelmä 2.22. Olkoon O piste ja $r \in \mathbb{R}$; $r > 0$. Sanotaan, että joukko $\{P \mid \overline{OP} = r\}$ on *O-keskipisteinen, $r-$säteinen ympyrä.*

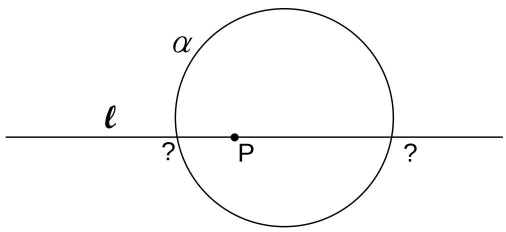
LAUSE 2.6.1. *Ympyrällä ja suoralla on korkeintaan kaksi yhteistä pistettä.*
Todistus. Olkoon α O-keskinen r-säteinen ympyrä ja ℓ suora. Antiteesi: α:lla ja ℓ:llä on ainakin kolme yhteistä pistettä. Merkitään niitä P_1, P_2 ja P_3, jolloin erityisesti $P_1, P_2, P_3 \neq O$. Tarkastelemme kahta eri vaihtoehtoa: piste O joko a) sisältyy suoraan ℓ tai sitten b) ei sisälly.

a) Ei voi olla niin, että $P_1 * P_2 * O$, sillä silloin olisi $r = \overline{OP_2} < \overline{OP_1} = r$. Vastaavasti ei myöskään voi olla $P_2 * P_1 * O$. On siis $P_1 * O * P_2$. Koska P_3 on suoran ℓ piste, niin on tällöin joko $P_3 \in \overrightarrow{OP_1}$ tai $P_3 \in \overrightarrow{OP_2}$ (lause 2.3.5). Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $P_3 \in \overrightarrow{OP_1}$. Tällöin joko $O * P_3 * P_1$ tai $O * P_1 * P_3$, jolloin $r = \overline{OP_3} < \overline{OP_1} = r$ tai $r = \overline{OP_3} < \overline{OP_1} = r$, mahdottomia kumpikin. Tapaus a) ei siis tule kysymykseen.

Tapaus b): Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $P_1 * P_2 * P_3$. Koska tutkimme tapausta, jossa O ei ole suoralla ℓ, niin $\triangle OP_1P_2$ ja $\triangle OP_2P_3$ ovat kolmioita ja siis $\measuredangle OP_2P_1$ ja $\measuredangle OP_2P_3$ ovat toistensa täydennyskulmia. Lauseen 2.5.17 nojalla $(\measuredangle OP_2P_1)^\circ + (\measuredangle OP_2P_3)^\circ = 180$, joten ainakin toisen kulman astemitta on vähintään 90. Merkintöjä tarvittaessa muuttamalla voi olettaa, että $(\measuredangle OP_2P_1)^\circ \geq 90$. Koska lauseen 2.5.14 mukaan $(\measuredangle P_2OP_1)^\circ > 0$, niin Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla $(\measuredangle OP_1P_2)^\circ < 90$. Tällöin $(\measuredangle OP_1P_2)^\circ < (\measuredangle OP_2P_1)^\circ$ ja lauseen 2.5.20 nojalla $\measuredangle OP_1P_2 < \measuredangle OP_2P_1$. Soveltamalla lausetta 2.4.22 kolmioon $\triangle OP_1P_2$ saadaan nyt $OP_2 < OP_1$, josta edelleen $\overline{OP_2} < \overline{OP_1}$ (lause 2.5.9.). Tämä on mahdotonta, koska $P_1, P_2 \in \alpha$ ja siten $\overline{OP_1} = \overline{OP_2} = r$. $\square$

Määritelmä 2.23. Olkoon α O-keskipisteinen, $r-$ säteinen ympyrä ja P piste. Jos $P = O$ tai $OP < r$, niin sanotaan, että P on α:n *sisäpuolella*, ja jos $OP > r$, niin sanotaan, että P on α:n *ulkopuolella*.

On luonnollista ajatella, että allaolevan kuvan tilanteessa suoralla ja ympyrällä on täsmälleen kaksi yhteistä pistettä. ts. jos suoralla ℓ on piste P, joka on ympyrän α sisäpuolella, niin ℓ leikkaa α:aa täsmälleen kahdessa pisteessä.



Kuva 99: Suora ja ympyrä

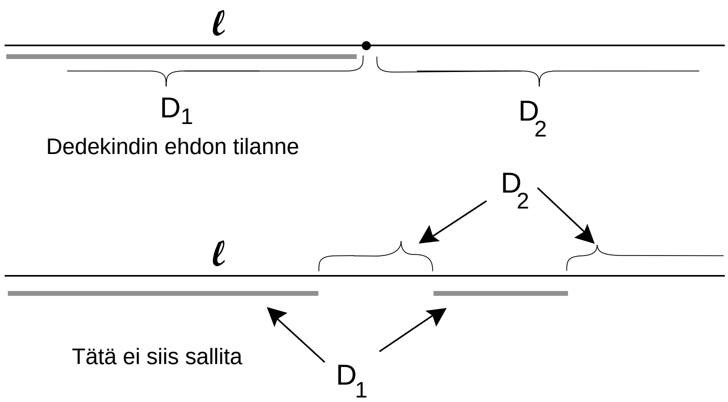
Lauseen 2.6.1 nojalla leikkauspisteitä on korkeintaan kaksi, mutta yllättäen niiden olemassaolo ei seuraa tähän asti esitetyistä aksioomista, vaan on olemassa malleja, joissa leikkauspiseitä on vain yksi tai ei yhtään. Jotta leikkauspisteet löytyisivät, otetaan peliin ns. *Dedekindin aksiooma.*[17] Sitä varten asetetaan ensin määritelmä:

Määritelmä 2.24. Olkoon ℓ suora, $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \ell\}$ sen kaikkien pisteiden joukko ja D_1 ja $D_2 \subset L$. Sanomme, että D_1 ja D_2 toteuttavat *Dedekindin ehdot*, mikäli

(1) $D_1 \neq \emptyset$ ja $D_2 \neq \emptyset$
(2) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
(3) $D_1 \cup D_2 = L$
(4) Jos $P, Q \in D_1$, niin ei ole olemassa pistettä $R \in D_2$, jolla olisi $P * R * Q$
(5) Jos $P, Q \in D_2$, niin ei ole olemassa pistettä $R \in D_1$, jolla olisi $P * R * Q$

Havainnollisesti ehdot (4) ja (5) tarkoittavat, että joukot D_1 ja D_2 sijaitsevat suoralla ℓ "peräkkäin".

[17] Julius Wihelm Richard Dedekind 1831–1916. Saksa.



Kuva 100: Dedekindin ehdot

Esimerkki 9. Reaaliakselilla, joka on koordinaattitason $\mathbb{R}^2$ suora, joukot D_1 ja $D_2 \subset \mathbb{R}$ toteuttavat Dedekindin ehdot, jos ja vain jos jollekin $a \in \mathbb{R}$ pätee jokin seuraavista neljästä vaihtoehdosta:

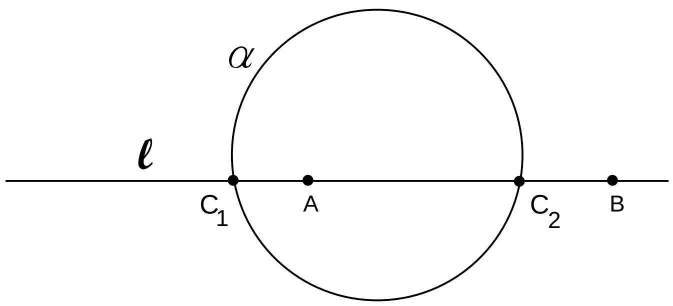
(1) $D_1 =]-\infty, a[$ ja $D_2 = [a, \infty[$
(2) $D_1 =]-\infty, a]$ ja $D_2 =]a, \infty[$
(3) $D_1 =]a, \infty[$ ja $D_2 =]-\infty, a]$
(4) $D_1 = [a, \infty[$ ja $D_2 =]-\infty, a[$.

Perustelu sopii harjoitustehtäväksi.

(DA) Dedekindin aksiooma. Olkoon ℓ suora, $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \ell\}$ sen kaikkien pisteiden joukko ja D_1 ja $D_2 \subset L$ siten, että D_1 ja D_2 toteuttavat Dedekindin ehdot. Tällöin on olemassa tasan yksi piste $P \in L$ siten, että kaikille $Q, R \in L$ pätee $Q * P * R$, jos ja vain jos $Q \in D_1$ ja $R \in D_2$ tai $Q \in D_2$, $R \in D_1$ ja $P \neq Q, R$.

Havainnollisesti Dedekindin aksiooma sanoo, että suorassa ei ole ”reikiä”. Aksiooma vastaa tunnettua reaalilukujen täydellisyysaksioomaa. Reaalilukujen täydellisyyteen vetoamalla voi todistaa, että koordinaattigeometria toteuttaa myös Dedekindin aksiooman.

LAUSE 2.6.2. *Olkoon α O-keskinen r-säteinen ympyrä ja ℓ suora. Olkoot lisäksi A ja B suoran ℓ pisteitä siten, että A on α:n sisä- ja B ulkopuolella. Tällöin ympyrällä α ja suoralla ℓ on tasan kaksi yhteistä pistettä C_1 ja C_2, joille lisäksi pätee $C_1 * A * B$ ja $A * C_2 * B$.*

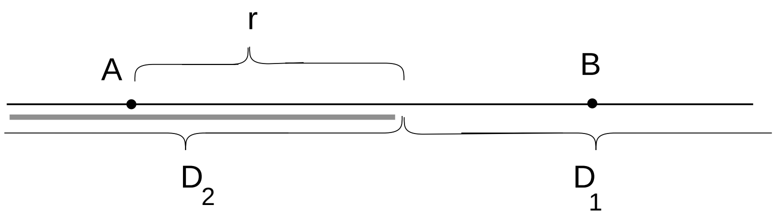


Kuva 101: Ympyrä leikkaa suoraa

Todistusta varten muotoillaan ensin lause, joka osoittaa, että "kaikenmittaisia janoja on olemassa"; tätä tärkeää perustietoa ei voi todistaa ilman Dedekindin aksioomaa.

LAUSE 2.6.3. *Olkoot A ja B eri pisteitä ja $r > 0$ positiiviluku. Tällöin on olemassa piste $C \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $\overline{AC} = r$.*

Todistus. Merkitään suoran $\overleftrightarrow{AB}$ pisteiden joukkoa $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \overleftrightarrow{AB}\}$ ja määritellään $D_1 = \{P \in \overrightarrow{AB} \mid \overline{AP} > r\}$ ja $D_2 = L \setminus D_1$. Osoitetaan, että Dedekindin ehdot toteutuvat.



Kuva 102: Jana, jonka pituus on r

(1) $D_2 \neq \emptyset$, sillä $A \in D_2$. Myös D_1 on epätyhjä, sillä olkoon OI janamitan konstruoinnissa käytetty yksikköjana. Valitaan $n \in N$ siten, että $n > r$. On olemassa $P \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $AP \cong n \cdot OI$, jolloin 2.5.7:n ja 2.5.3:n nojalla $\overline{AP} = n$ ja siis $\overline{AP} > r$ ja $P \in D_1$.
(2) on selvä joukon D_2 määritelmän nojalla.
(3) samoin.
(4) Olkoot $P, Q \in D_1$ ja $P * R * Q$. Pitää osoittaa, että $R \in D_1$. Koska $P, Q \in \overrightarrow{AB}$ niin joko $A * P * Q$ tai $A * Q * P$. Tarvittaessa merkintöjä muuttamalla voidaan olettaa, että $A * P * Q$. Koska $P * R * Q$, niin tällöin lauseen 2.3 nojalla $A * P * R$. Nyt $R \in \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$ ja $\overline{AR} > \overline{AP} > r$, joten $R \in D_1$.
(5) Olkoon $P, Q \in D_2$ ja $P * R * Q$. Pitää osoittaa, että $R \in D_2$. Tehdään vastaoletus: $R \in D_1$. Tässä on nyt viisi vaihtoehtoa:
   a) $P = A$
   b) $Q = A$
   c) $P * A * Q$
   d) $A * P * Q$
   e) $A * Q * P$

a) Jos $P = A$, niin $A * R * Q$. Koska $R \in D_1$, niin $R \in \overrightarrow{AB}$ ja siten myös $Q \in \overrightarrow{AR}$. Lisäksi $\overline{AQ} > \overline{AR}$ ja koska $R \in D_1$, niin $\overline{AR} > r$ ja siten myös $\overline{AQ} > r$, joten $Q \in D_1$, mikä on mahdotonta.
b) Vaihtamalla merkintöjä ($P \leftrightarrow Q$) tapaus b) palautuu tapaukseen a).
c) Jos $P * A * Q$, niin lauseen 2.3.5 nojalla joko $P \in \overrightarrow{AB}$ tai $Q \in \overrightarrow{AB}$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla ($P \leftrightarrow Q$) voidaan olettaa, että $Q \in \overrightarrow{AB}$, jolloin $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB}$. Koska $R \in D_1$ ja $A \notin D_1$, niin $R \neq A$, jolloin

lauseen 2.3.7 nojalla joko $P*R*A$ tai $A*R*Q$. Jos $P*R*A$, niin $R \in \overrightarrow{AP}$ ja toisaalta koska $R \in D_1$, niin $R \in \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ}$ eli $R \in \overrightarrow{AP} \cap \overrightarrow{AQ} = \{A\}$ (lause 2.3.8), ja siis $R = A \notin D_1$ vastoin oletusta. Jos taas $A * R * Q$, niin ristiriita löytyy kuten tapauksessa a).

d) Jos $A*P*Q$, niin lauseen 2.3.4 nojalla $A*R*Q$ ja joudutaan ristiriitaan kuten kohdassa a).

e) Vaihtamalla merkinnät ($P \leftrightarrow Q$) palaudutaan tapaukseen d).

Joukot D_1 ja D_2 toteuttavat siis Dedekindin ehdot, joten Dedekindin aksiooman nojalla on olemassa piste P, joka erottaa joukot D_1 ja D_2 eri puolilleen aksiooman mielessä. Osoitetaan, että tämä piste on etsimämme, toisin sanoen $P \in \overrightarrow{AB}$ ja $\overline{AP} = r$. Väite $P \in \overrightarrow{AB}$ on ilmeinen, sillä muuten valittaisiin piste Q siten, että $Q * P * A$, jolloin olisi $Q \notin \overrightarrow{AB}$ ja siis $Q \in D_2$. Koska myös $A \in D_2$, niin P ei — vastoin määritelmäänsä — erottaisi joukkoja D_1 ja D_2 eri puolilleen. Todistettavaksi jää siis, että $\overline{AP} = r$. Jos näin ei olisi, niin olisi voimassa jokin seuraavista ehdoista:

i) $P = A$.
ii) $\overline{AP} < r$.
iii) $\overline{AP} > r$.

i) Jos $P = A$, niin valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $1/2^n < r$ ja P_n kuten janamitan konstruktiossa, jolloin $2^n \cdot OP_n = OI$. Tällöin lauseen 2.5.7 nojalla $2^n \cdot \overline{OP_n} = \overline{OI}$, joten lauseen 2.5.3 nojalla saadaan $\overline{OP_n} = 1/2^n$. Valitaan nyt piste $Q \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $AQ \cong OP_n$, jolloin $\overline{AQ} = \overline{OP_n} = 1/2^n < r$ ja siten $Q \in D_2$. Valitaan toisaalta R siten, että $R*A*Q$, jolloin $R \notin \overrightarrow{AB}$ ja siten myös $R \in D_2$. Koska $P = A$, niin $R*P*Q$, mikä on mahdotonta Dedekindin aksiooman väitteen nojalla.

ii) Jos $\overline{AP} < r$, niin valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $1/2^n < r - \overline{AP}$ ja P_n kuten kohdassa i). Valitaan nyt Q siten, että $A * P * Q$ ja $PQ \cong OP_n$, jolloin $\overline{PQ} = \frac{1}{2^n}$. Tällöin lauseen 2.5.4 nojalla

$$\overline{AR} = \overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AP} + \frac{1}{2^n} < \overline{AP} + r - \overline{AP} = r,$$

joten $Q \in D_2$. Koska myös $A \in D_2$ ja $A * P * Q$, niin joudutaan taas ristiriitaan P:n ominaisuuden kanssa.

iii) Jos $\overline{AP} > r$, niin $P \in D_1$, sillä yllä jo todettiin, että $P \in \overrightarrow{AB}$. Valitaan Q tällä kertaa niin, että $A*P*Q$, jolloin $Q \in \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$ ja $\overline{AQ} > \overline{AP} > r$ ja siis $Q \in D_1$. Valitaan edelleen $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{2^n} < \overline{AP} - r$ ja P_n kuten kohdassa i). Valitaan vielä $R \in \overrightarrow{PA}$ siten, että $PR \cong OP_n$, jolloin

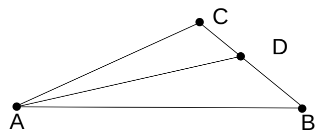
$$\overline{PR} = \overline{OP_n} = \overline{AP} - \frac{1}{2^n} > \overline{AP} - (\overline{AP} - r) = r,$$

joten $R \in D_1$. Koska $A * R * P$ ja $A * P * Q$, niin lauseen 2.3.4 nojalla $R * P * Q$. Tämä on Dedekindin aksiooman vastaista, koska $R, Q \in D_1$. Näin on halutun pisteen C olemassaolo päätelty.

Pisteen C yksikäsitteisyys seuraa siitä, että jos $D \in \overrightarrow{AB}$ olisi toinen piste, jolla $\overline{AD} = r$, niin olisi $AD \cong AC$ ja $A = D$ suoraan aksiooman (H8) nojalla. $\square$

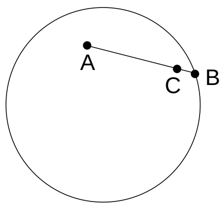
Lauseen 2.6.2 todistus vaatii edellisen lisäksi vielä seuraavat kaksi pientä aputulosta, joiden todistukset jäävät harjoitustehtäviksi:

LAUSE 2.6.4. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $B * D * C$. Tällöin $\overline{AD} < \max\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.*



Kuva 103: Lause 2.6.4

LAUSE 2.6.5. *Olkoon α ympyrä ja $A, B \in \alpha \cup \{P \mid P$ on α:n sisäpuolella$\}$ s.e. $A * C * B$. Tällöin C on α:n sisäpuolella.*

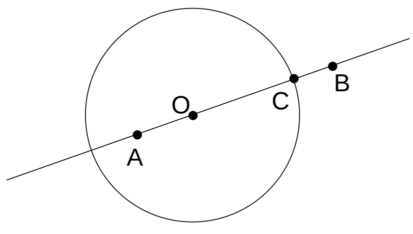


Kuva 104: Lause 2.6.5

Lauseen 2.6.2 todistus. Olkoon α O-keskinen, r-säteinen ympyrä, ℓ suora ja A, B pisteitä siten, että A on α:n sisä- ja B sen ulkopuolella. Tehtävänä on löytää α:n ja ℓ:n kaksi yhteistä pistettä C_1 ja C_2 siten, että $C_1 * A * B$ ja $A * C_2 * B$. (Lauseen 2.6.1 mukaan enempiä ei ole olemassa.)

Osoitetaan ensin pisteen C_2 olemassaolo. On kaksi tapausta sen mukaan, kulkeeko suora ℓ pisteen O kautta vai ei.

a) Jos ℓ kulkee pisteen O kautta, niin $O \neq B$ eli $\overrightarrow{OB}$ on puolisuora.



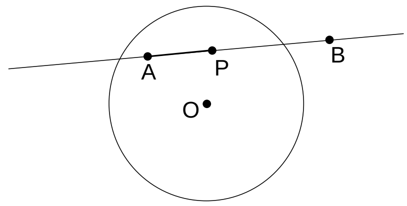
Kuva 105: Tapaus a)

Lauseen 2.6.3 nojalla voidaan valita $C \in \overrightarrow{OB}$ siten, että $\overline{OC} = r$, jolloin $C \in \alpha$ ja riittää osoittaa, että $A * C * B$. Koska $C \in \overrightarrow{OB}$ ja $\overline{OC} = r < \overline{OB}$, niin välttämättä $O * C * B$. Jos $A = O$, niin väite seuraa suoraan tästä. Voidaan siis olettaa, että $A \neq 0$. Välttämättä pätee myös $B \neq O$ ja $B \neq A$, joten joko $O * A * B$, $A * O * B$ tai $A * B * O$. Lauseen 2.6.5 nojalla viimeinen vaihtoehto ei tule kyseeseen. Jos olisi $A * O * B$, niin ehdon $O * C * B$ ja lauseen 2.3.4 nojalla olisi $A * C * B$ ja asia sillä selvä. Kolmannessa tapauksessa $O * A * B$ on ehdon $\overline{OA} < \overline{OC} < \overline{OB}$ nojalla oltava $A * C * B$, sillä muut vaihtoehdot eivät tule kyseeseen. (Mieti, miksi eivät. Tutki erikseen vaihtoehtoja $A * B * C$ ja $B * A * C$.)

b) Oletetaan, että ℓ ei kulje keskipisteen O kautta. Määritellään joukko $M \subset \mathbb{R}$ seuraavalla tavalla.

$$M = \{\overline{AP} \in \mathbb{R} \mid P \in \overrightarrow{AB}, \overline{OP} < r\}$$

Todistuksen ideana on löytää etsitty leikkauspiste C_2 etenemällä pisteestä A pistettä B kohti matkan $m = \sup M$ verran. Koska $\overline{OA} \in M$, niin $M \neq \emptyset$. Lisäksi M on ylhäältä rajoitettu, ylärajana $2r$, mikä seuraa kolmioepäyhtälöstä seuraavalla tavalla:



KUVA 106: JOUKKO M MUODOSTUU JANOJEN AP PITUUKSISTA

Olkoon $x \in M$. Jos $x = 0$, niin $x \leq 2r$. Jos $x > 0$, niin $x = \overline{AP}$ jollekin $P \in \overrightarrow{AB}$, jolla $\overline{OP} < r$. Koska ℓ ei kulje pisteen O kautta, niin $\triangle OAP$ on kolmio ja kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{AP} < \overline{OA} + \overline{OP}$. Koska A on ympyrän α sisällä, on $\overline{OA} < r$ ja koska $\overline{OP} < r$, niin $x = \overline{AP} < r + r = 2r$. Nähtyämme näin, että M on ylhäältä rajoitettu epätyhjä joukko reaalilukuja, tiedämme reaalilukujen täydellisyyden nojalla, että on olemassa joukon M supremum, olkoon se $m = \sup M$. Osoitetaan, että $m > 0$, eli että joukossa M on muitakin alkioita kuin 0. Koska A on ympyrän α sisällä, pätee $\overline{OA} < r$. Valitaan $a = r - \overline{OA} > 0$. Näin on todistettu, että $m > 0$. Lauseen 2.6.3 nojalla on olemassa piste $P \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $\overline{AP} = a$. Soveltamalla kolmioepäyhtälöä kolmioon OAP saadaan $\overline{OP} < \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OA} + r - \overline{OA} = r$. Näin $a = \overline{AP} \in M$. Lauseen 2.6.3 nojalla voidaan valita piste $C_2 \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $\overline{AC_2} = m$. Osoitetaan, että $C_2 \in \alpha$. Jos näin ei olisi, olisi joko $\overline{OC} < r$ tai $\overline{OC} > r$. Ensin mainitussa tapauksessa valitaan lauseen 2.6.3 nojalla piste P siten, että $A * C_2 * P$ ja $\overline{C_2P} = r - \overline{OC_2}$. Tällöin kolmioepäyhtälön mukaan $\overline{OP} < \overline{OC_2} + \overline{C_2P} = \overline{OC_2} + r - \overline{OC_2} = r$, joten $\overline{AP} \in M$. Koska $A * C_2 * P$, niin $\overline{AP} > \overline{AC_2} = m = \sup M$, mikä on mahdotonta. Vastaavasti, jos olisi $\overline{OC_2} > r$, niin supremumin ominaisuuksien nojalla olisi olemassa $x \in M$, jolla $x > m - (\overline{OC} - r)$. Joukon M määritelmän mukaan löytyy tällöin piste $P \in \overrightarrow{AB}$, jolla $\overline{OP} < r$ ja $\overline{AP} = x$. Koska $x \leq m$ ja ei voi olla $P = C_2$ (sillä $\overline{OP} < r < \overline{OC_2}$), niin $A * P * C_2$. Kolmioepäyhtälö sovellettuna kolmioon $\triangle OPC_2$ antaa nyt

$$\overline{OP} > \overline{OC_2} - \overline{PC_2} > \overline{OC_2} - (\overline{AC_2} - \overline{AP}) = \overline{OC} - m + x > \overline{OC} - m + m - (\overline{OC_2} - r) = r$$

eli $\overline{OP} > r$, mikä on mahdotonta. Piste C_2 on siis ympyrällä α.

Pitää vielä osoittaa, että $A * C_2 * B$. Ainakin nämä ovat kolme eri pistettä, sillä A on α:n sisäpuolella, B sen ulkopuolella ja $C_2 \in \alpha$. Koska $C_2, B \in \overrightarrow{AB}$, pätee joko $A * C_2 * B$ tai $A * B * C_2$. Lauseen 2.6.5 nojalla jälkimmäinen vaihtoehto ei tule kyseeseen, joten pätee $A * C_2 * B$ ja etsitynlaisen pisteen C_2 olemassaolo on varmistettu.

Pisteen C_1 olemassaolo seuraa nyt helposti. Lauseen 2.6.3 nojalla voidaan valita piste P siten, että $P * A * B$ ja $\overline{AP} = 2r$. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{OP} > \overline{AP} - \overline{OA} = 2r - \overline{OA} > 2r - r = r$, joten P on α:n ulkopuolella. Pisteen C_2 olemassaolon takia löytyy tällöin piste $C_1 \in \alpha$, jolla $P * C_1 * A$. Koska $P * A * B$, niin $C_1 * A * B$ lauseen 2.3.4 mukaisesti. □

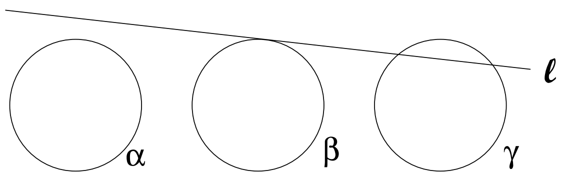
Lauseessa 2.6.2 ei itse asiassa tarvitse olettaa ympyrän ulkopuolisen pisteen B olemassaoloa:

LAUSE 2.6.6. *Olkoon α O-keskinen r-säteinen ympyrä, ℓ suora ja A suoran ℓ piste, joka on ympyrän α sisäpuolella. Tällöin suoralla ℓ ja ympyrällä α on tasan kaksi yhteistä pistettä C_1 ja C_2, ja niille pätee $C_1 * A * C_2$. Lisäksi suoran ℓ pisteille pätee: P on α:n sisäpuolella, jos ja vain jos $C_1 * P * C_2$.*

Todistus. Valitaan suoralta ℓ piste P, jolle $\overline{AP} > 2r$, jolloin P on kolmioepäyhtälön perusteella α:n ulkopuolella ja siis 2.6.2 toimii ja antaa täsmälleen kaksi leikkauspistettä C_1 ja C_2 siten, että $A * C_2 * P$ ja $C_1 * A * P$. Tällöin myös $C_1 * A * C_2$ (lause 2.3.4). Jos P on ℓ:n piste siten, että $C_1 * P * C_2$, niin P on α:n sisäpuolella lauseen 2.6.5 nojalla. Jos taas oletetaan, että P on α:n sisäpuolella, niin joko a) $P * C_1 * C_2$, b) $C_1 * P * C_2$ tai c) $C_1 * C_2 * P$. Tapauksessa a) on piste C_1 ympyrän α sisäpuolella lauseen 2.6.5 nojalla, mikä on mahdotonta. Tapauksessa c) on vastaavasti C_2 α:n sisäpuolella, mahdotonta sekin. Tapaus b) on siis ainoa mahdollinen. □

Lauseiden 2.6.1 ja 2.6.6 nojalla suoralla ja ympyrällä on siis 0,1 tai 2 yhteistä pistettä. Tämä huomio antaa aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 2.25. Suora ℓ on ympyrän α *tangentti,* jos α:lla ja ℓ:llä on täsmälleen yksi yhteinen piste.



Kuva 107: Suora ℓ on ympyrän β tangentti

LAUSE 2.6.7. *Olkoon suora ℓ ympyrän α tangentti ja P näiden yhteinen piste. Tällöin kaikki ℓ:n pisteet, pistettä P lukuunottamatta, ovat α:n ulkopuolella.*

Todistus. Jos jokin toinen suoran ℓ piste Q olisi joko ympyrällä α tai sen sisäpuolella, niin voitaisiin valita R siten, että $P * R * Q$, jolloin lauseen 2.6.5 nojalla R olisi α:n sisäpuolella. Tällöin lauseen 2.6.6 mukaan olisi ℓ:llä ja α:lla kaksi leikkauspistettä vastoin oletusta. □

LAUSE 2.6.8. *Olkoon α O-keskinen r-säteinen ympyrä ja ℓ suora, joka kulkee pisteen $P \in \alpha$ kautta. Tällöin ℓ on α:n tangentti, jos ja vain jos ℓ on suoran $\overleftrightarrow{OP}$ normaali.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

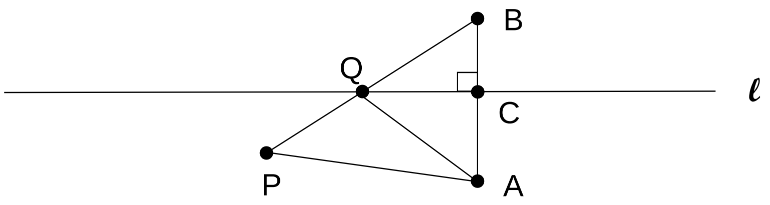
Huomautus 27. Lauseiden 2.6.8 ja 2.4.16 nojalla voidaan todeta, että ympyrän mielivaltaisen pisteen kautta kulkee aina täsmälleen yksi sen tangentti.

Määritelmä 2.26. Olkoon AB jana ja C sen keskipiste. Pisteen C kautta kulkevaa suoran $\overleftrightarrow{AB}$ normaalia sanotaan janan AB *keskinormaaliksi.*

Huomautus 28. Lauseiden 2.5.1 ja 2.4.16 avulla nähdään heti, että jokaisella janalla on yksikäsitteinen keskinormaali.

LAUSE 2.6.9. *Olkoon AB jana ja ℓ sen keskinormaali ja $P \neq A, B$ mielivaltainen piste. Tällöin $\overline{AB} = \overline{BP}$, jos ja vain jos ℓ kulkee pisteen P kautta.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

LAUSE 2.6.10. *Olkoon AB jana ja ℓ sen keskinormaali sekä $P \neq A, B$ mielivaltainen piste. Tällöin $\overline{AP} < \overline{BP}$, jos ja vain jos $AP\ell$.*



KUVA 108: LAUSE 2.6.10

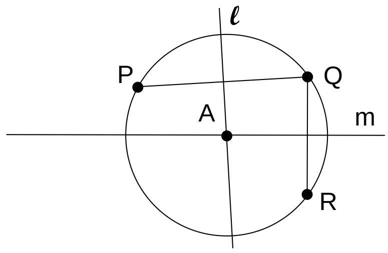
Todistus. Oletetaan aluksi $AP\ell$. Olkoon C janan AB keskipiste. Jos P kuuluu suoralle $\overleftrightarrow{AB}$, niin ei voi ainakaan olla $P * C * A$, joten on joko $C * A * P$ tai $C * P * A$. Koska C on janan AB keskipiste, on $A * C * B$, joten ensin mainitussa tapauksessa saadaan lauseen 2.3.4.ii) nojalla $B * A * P$, jolloin $AP < BP$ ja siten $\overline{AP} < \overline{BP}$. Jälkimmäisessä tapauksessa saadaan heti $AP < AC$ ja siitä $\overline{AP} < \overline{AC}$. Toisaalta $B * C * A$, joten lauseen 2.3.4.i) nojalla saadaan $B * C * P$, ja siis $BC < BP$, josta $\overline{BC} < \overline{BP}$. Koska C on janan AB keskipiste, on $\overline{BC} = \overline{AC}$. Yhdistämällä tiedot saadaan $\overline{AP} < \overline{AC} = \overline{BC} < \overline{BP}$.

Voidaan siis olettaa, että P ei kuulu suoralle $\overleftrightarrow{AB}$. Koska oletettiin $AP\ell$, ja koska $A\ell B$, niin $P\ell B$. Tällöin PB leikkaa suoraa ℓ pisteessä Q, $P * Q * B$. Koska P ei kuulu suoralle $\overleftrightarrow{AB}$ niin A ei kuulu suoralle $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PB}$, jolloin $\triangle PQA$ on kolmio ja kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{AP} < \overline{PQ} + \overline{QA}$. Toisaalta, koska $P * Q * B$, niin lauseen 2.5.4 mukaan $\overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{PB}$. Lauseen 2.6.9 nojalla taas on $\overline{QB} = \overline{QA}$, joten kaiken kaikkiaan $\overline{AP} < \overline{PQ} + \overline{QA} + \overline{QB} = \overline{PB}$. Olemme todistaneet, että jos $AP\ell$, niin $\overline{AP} < \overline{BP}$. Tätä soveltamalla saadaan $\overline{AP} > \overline{BP}$, jos $BP\ell$. Ehdot ovat siis yhtäpitäviä. □

Lause 2.6.1 kertoi, että suora ja ympyrä leikkaavat toisiaan korkeintaan kahdessa eri pisteessä. Sama pätee kahdelle ympyrälle:

LAUSE 2.6.11. *Kaksi eri ympyrää leikkaavat toisiaan korkeintaan kahdessa pisteessä.*

Todistus. Olkoot α ja β eri ympyröitä, keskipistein A ja B ja sätein a ja b. Jos $A = B$, niin $a \neq b$ ja ympyrät eivät leikkaa toisiaan ollenkaan, jolloin väite pätee. Voidaan siis olettaa, että $A \neq B$. Tehdään antiteesi, että α ja β leikkaavat toisensa ainakin kolmessa eri pistessä P, Q ja R. Olkoon ℓ janan PQ keskinormaali ja vastaavasti m janan QR keskinormaali. Koska $\overline{PA} = a = \overline{QA}$, niin lauseen 2.6.9 nojalla ℓ kulkee pisteen A kautta.

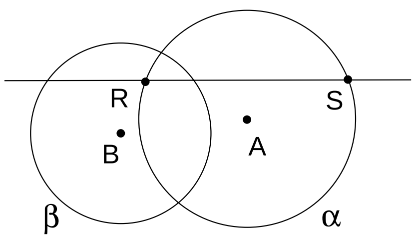


Kuva 109: Ympyrä määräytyy kolmesta pisteestään

Toisaalta $\overline{PB} = b = \overline{QB} = \overline{RB}$, joten vastaavasti ℓ ja m kulkevat myös pisteen B kautta. Koska $A \neq B$, täytyy olla $\ell = m$. Tällöin sekä $\overleftrightarrow{QP}$ että $\overleftrightarrow{QR}$ ovat suoran ℓ normaaleja, jotka kulkevat pisteen Q kautta, ja siis lauseen 2.4.16 nojalla $\overleftrightarrow{QP} = \overleftrightarrow{QR}$. Nyt suora $\overleftrightarrow{QP} = \overleftrightarrow{QR}$ leikkaa ympyrää α kolmessa eri pisteessä, mikä on vastoin lausetta 2.6.1. $\square$

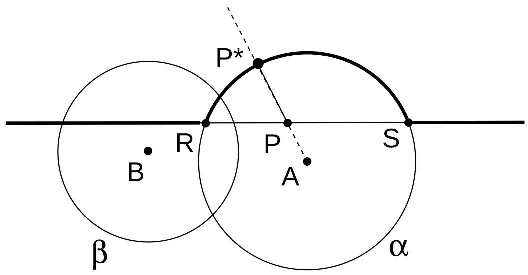
Lauseen 2.6.2 vastine kahdelle ympyrälle on seuraavassa. Sitä ei voi todistaa ilman Dedekindin aksioomaa. Seuraava todistuskin on aika monivaiheinen.

LAUSE 2.6.12. *Olkoot α ja β ympyröitä ja $R, S \in \alpha$ siten, että R on β:n sisäpuolella ja S on sen ulkopuolella. Tällöin α:lla ja β:lla on täsmälleen kaksi yhteistä pistettä.*



Kuva 110: Kahden ympyrän leikkaaminen

Todistus. Olkoot α:n ja β:n keskipisteet A ja B ja säteet a ja b. Todistuksen varsinainen työ on siinä, että Dedekindin aksiooman avulla etsitään ainakin yksi leikkauspiste siinä tapauksessa, että A ei ole suoralla $\overleftrightarrow{RS}$. Tätä varten määritellään kaikille suoran $\overleftrightarrow{RS}$ pisteille P apupiste P^* seuraavalla tavalla:



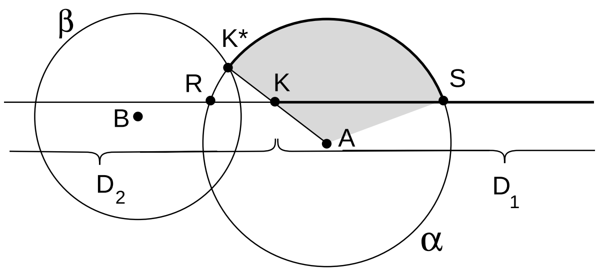
KUVA 111: KUVAUS $P \mapsto P^*$

$$P^* = \begin{cases} \text{ympyrän } \alpha \text{ ja puolisuoran } \overrightarrow{AP} \text{ leikkauspiste, jos } P \in RS \\ P \text{ muuten, eli kun } P * R * S \text{ tai } R * S * P \end{cases}$$

Tässä on huomattava, että koska $\overleftrightarrow{RS}$ ei kulje A:n kautta, niin $\overrightarrow{AP}$ on aina olemassa. Lisäksi, koska A on α:n sisäpuolella, suoralla $\overleftrightarrow{AP}$ on lauseen 2.6.6 mukaan täsmälleen kaksi α:n pistettä, joista täsmälleen yksi on puolisuoralla $\overrightarrow{AP}$ (lause 2.3.4). Siten P^* on yksikäsitteisesti määritelty jokaisella $\overleftrightarrow{RS}$:n pisteellä P. Huomaa vielä, että $R^* = R$ ja $S^* = S$.

Merkitään suoran $\overleftrightarrow{RS}$ kaikkien pisteiden joukkoa $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \overleftrightarrow{RS}\}$ ja jaetaan L Dedekindin ehdot toteuttaviin osiin määrittelemällä (huomaa puolisuora ja tähti!):

$$D_1 = \{P \in \overrightarrow{RS} \setminus \{R\} \mid P^* \text{ on } \beta\text{:n ulkopuolella } \}$$
$$D_2 = L \setminus D_1.$$



KUVA 112: DEDEKINDIN JAKOPISTE K ANTAA LEIKKAUSPISTEEN K^*

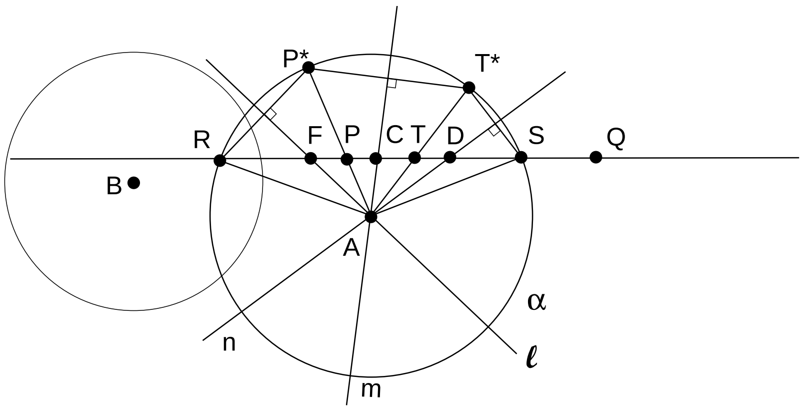
Todistuksen ideana on tarkastaa, että Dedekindin ehdot tosiaan toteutuvat ja että Dedekindin aksiooman antaman leikkauspisteen K kuva K^* on ympyröiden leikkauspiste.

(1) $D_1 \neq \emptyset$, koska $S^* = S$ ja siis $S \in D_1$. $D_2 \neq \emptyset$, koska $R^* = R$ ja siis $R \in D_2$.
(2) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ joukon D_2 määritelmän mukaan.
(3) $D_1 \cup D_2 = L$ joukon D_2 määritelmän mukaan.
(4) Olkoot $P, Q \in D_1$ eri pisteitä. Näytetään, että $PQ \subset D_1$. Antiteesi: on olemassa $T \in D_2$ siten, että kuitenkin $P * T * Q$. Koska $P, Q \in D_1 \subset \overrightarrow{RS} \setminus \{R\}$,

niin joko $R*P*Q$ tai $R*Q*P$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $R*P*Q$, jolloin lauseen 2.3.4 kohdan i) mukaan $R*P*T$ ja myös $T \in \overrightarrow{RS} \setminus \{R\}$. Ei voi olla niin, että $T = S$, koska $T \in D_2$, mutta $S \in D_1$. Siksi joko $R*T*S$ tai $R*S*T$. Seuraava päättely osoittaa, että jälkimmäinen vaihtoehto ei ole mahdollinen:

Jos olisi $R*S*T$, niin T^*:n määritelmän mukaan olisi $T^* = T$. Toisaalta $T \in \overrightarrow{RS}$ ja $T \notin D_1$, joten D_1:n määritelmän mukaan $T^* = T$ **ei voi olla** β**:n ulkopuolella.** Mutta oletuksen mukaan R on β:n sisäpuolella ja S ulkopuolella, jolloin lauseen 2.6.2 nojalla β leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{RS}$ tasan kahdessa pisteessä C_1 ja C_2, joille lisäksi pätee $C_1 * R * S$ ja $R * C_2 * S$. Jos siis olisi $R*S*T$, niin 2.3.4:n nojalla voitaisiin päätellä, että $C_1 * C_2 * T$. (Miten?) Tämä taas lauseen 2.6.6 perusteella merkitsee sitä, että T **ei ole** β**:n sisäpuolella.** Se on siis ulkopuolella, sillä se ei ole kumpikaan pisteistä C_1, C_2, jotka ovat ainoat $\overleftrightarrow{RS}$:n ja β:n leikkauspisteet. Mutta tämähän on mahdotonta, kuten yllä todettiin. Antiteesi on väärä: ei ole $R*S*T$.

On siis jatkettava tutkimalla ensimmäistä vaihtoehtoa eli olettamalla $R*T*S$. Koska toisaalta $R*P*T$, niin lauseen 2.3.4 nojalla pätee $P*T*S$.



KUVA 113: TAPAUS $R*T*S$

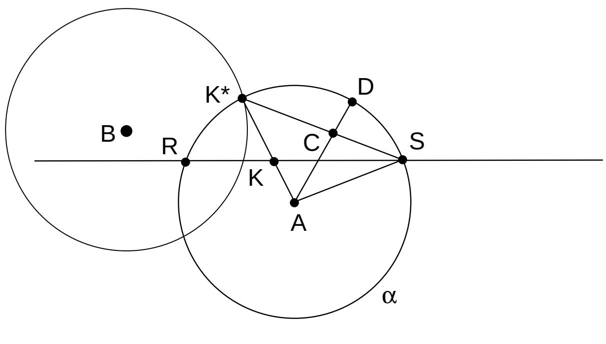
Koska $T \in D_2$, niin $T \notin D_1$, ja T^* **ei siis voi olla** $\beta : n$ **ulkopuolella.** Toisaalta $P \in D_1$, joten P^* **on** β**:n ulkopuolella.** Olkoon ℓ janan RP^* keskinormaali, m janan P^*T^* keskinormaali ja n janan T^*S keskinormaali — nämä janat ovat olemassa, sillä selvästikin $R \neq P^*$,$P^* \neq T^*$ ja $T^* \neq S$. Koska R on β:n sisäpuolella ja P^* sen ulkopuolella, niin $\overline{BR} < b < \overline{BP*}$, joten lauseen 2.6.10 nojalla $BR\ell$. Vastaavasti $\overline{BT^*} \leq b < \overline{BP^*}$, joten BT^*m ja $\overline{BT^*} \leq b \leq \overline{BS}$, joten BT^*n. Lauseen 2.6.9 nojalla ℓ, m ja n kulkevat A:n kautta. Koska $P^* \in \overrightarrow{AP}$ ja $T^* \in \overrightarrow{AT}$, niin $\measuredangle P^*AT^* = \measuredangle PAT$. Lauseen 2.3.9 nojalla janan P^*T^* keskipiste on kulman $\measuredangle PAT$sisällä, joten puomilauseen 2.3.11 mukaan m leikkaa janaa PT. Olkoon leikkauspiste C, jolloin $P*C*T$. Vastaavasti n leikkaa janaa TS jossakin pisteessä D, jolloin $T*D*S$, ja samoin ℓ leikkaa janaa RP pisteessä F, jolloin $R*F*P$.

Koska $T^* \in \overrightarrow{AT}$, niin TT^*m ja TT^*n, jolloin aksiooman (H7) nojalla BTm ja BTn. Lauseen 2.3.4 nojalla voidaan päätellä, että $C * T * D$, joten T on kulman $\measuredangle CAD$ sisällä. Tällöin aksiooman (H7) nojalla myös B on kulman $\measuredangle CAD$ sisällä. Puomilauseen 2.3.11 mukaan $\overrightarrow{AB}$ leikkaa tällöin janaa CD, olkoon leikkauspiste E, jolloin $C * E * D$. Lauseen 2.3.4 nojalla nähdään, että $R{*}F{*}E$. Koska $E \in \overrightarrow{AB}$, niin $EB\ell$ ja koska $R{*}F{*}E$, niin $R\ell E$. Tällöin $R\ell B$, mikä on vastoin ehtoa $BR\ell$, joka todistettiin pari riviä edellisen kuvan jälkeen. Dedekindin ehto (4) on siis voimassa.

(5) Antiteesi: On olemassa pisteet $P, Q \in D_2$ ja $T \in D_1$, jolla olisi $P * T * Q$. Kuten kohdassa (4) nähdään, että ei voi olla $R * S * P$ eikä $R * S * Q$, vaan P, T ja Q ovat puolisuoralla $\overrightarrow{SR}$. Tällöin joko $T * Q * S$ tai $T * P * S$. Koska $S \in D_1$, niin kumpikaan ei ole mahdollista kohdan (4) nojalla.

Näin on todistettu, että D_1 ja D_2 toteuttavat Dedekindin ehdot. Olkoon $K \in L$ Dedekindin aksiooman antama piste. Osoitetaan, että $K^* \in \alpha \cup \beta$. (Ks. kuva 112.) Ensinnäkin täytyy olla $K \in RS$. Jos nimittäin olisi $K * R * S$, niin valittaisiin Q siten, että $Q{*}K{*}R$, jolloin $Q \in D_2$, koska $Q \notin \overrightarrow{RS}$. Mutta $R \in D_2$, joten tilanne on vastoin Dedekindin aksiooman antamaa K:ta koskevaa ehtoa. Myöskään $R * S * K$ ei tule kysymykseen, sillä siinä tapauksessa tarkasteltaisiin sellaista pistettä Q, jolla $S * K * Q$, jolloin — kuten kohdassa (4) edellä — nähtäisiin, että $Q \in D_1$. Koska myös $S \in D_1$ niin jouduttaisiin taas ristiriitaan Dedekindin aksiooman antaman jakoehdon kanssa. Siis tosiaan $K \in RS$ ja siksi K^*:n määritelmän nojalla $K^* \in \alpha$, jolloin riittää osoittaa, että $K^* \in \beta$. Antiteesi $K^* \notin \beta$ sisältää kaksi vaihtoehtoa: K^* on joko β:n sisäpuolella (i) tai ulkopuolella (ii).

Tapaus (i): $\overline{BK^*} < b$. Koska S on β:n ulkopuolella, niin $K^* \neq S$, jolloin janalta K^*S voidaan lauseen 2.6.3 nojalla valita piste C siten, että $K^* * C * S$ ja $\overline{K^*C} < \frac{1}{2}(b - \overline{BK^*})$.



Kuva 114: Tapaus (i)

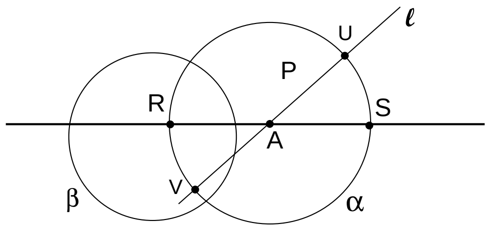
Lauseen 2.6.6 nojalla C on ympyrän α sisäpuolella ja edelleen puolisuoralla $\overrightarrow{AC}$ on α:n piste, olkoon se D, jolloin $A * C * D$, tämä seuraa esimerkiksi lauseesta 2.6.5. Tällöin $\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC} = a - \overline{AC}$. Toisaalta kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{AC} > \overline{AK^*} - \overline{K^*C}$, jolloin

$$\overline{CD} = a - \overline{AC} < a - \left(\overline{AK^*} - \overline{K^*C}\right) = \overline{K^*C}.$$

Edelleen kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{BD} \leq \overline{BK^*} + \overline{K^*D}$ ja siten $\overline{BD} \leq \overline{BK^*} + \big(b - \overline{BK^*}\big) = b$, joten D on β:n sisäpuolella. Koska C on kulman $\measuredangle K^*AS = \measuredangle KAS$ sisäpuolella, niin $\overrightarrow{AC}$ leikkaa puomilauseen 2.3.11 nojalla janaa KS. Olkoon leikkauspiste Q, jolloin $K * Q * S$. Suoraan K^*:n määritelmän mukaan $D = Q^*$, joten $Q \in D_2$. Jos valitaan F siten, että $F * R * S$, niin $F \in D_2$ ja 2.3.4:n mukaan $F * K * Q$. (Huomaa, että voi olla $K = R$.) Tämä on vastoin Dedekindin aksiooman antamaa ehtoa.

Tapaus (ii): $\overline{BK^*} > b$. Tämä tilanne käsitellään vastaavalla tavalla kuin (ii). Tässä valitaan C siten, että $R * C * K^*$ ja $\overline{K^*C} < \frac{1}{2}(\overline{BK^*} - b)$ ja samanlainen lasku kuin yllä antaa $\overline{K^*C} < \overline{BVK^*} - b$, josta saadaan edelleen $\overline{BD} \geq \overline{BK^*} - \overline{K^*D} > b$, ja D on siten ympyrän β ulkopuolella. Piste Q, jolla $R * Q * K$, löytyy kuten edellä ja $Q^* = D$. Täten $Q \in D_1$. Jos valitaan F siten, että $R * S * F$, niin $F \in D_1$ ja nyt $Q * K * F$, mikä on taas vastoin Dedekindin aksioomaa.

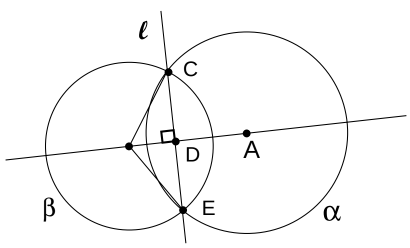
Nyt on siis löydetty yksi ympyröiden α ja β yhteinen piste siinä tapauksessa, että A ei ole suoralla $\overleftrightarrow{RS}$. Jos taas $\overleftrightarrow{RS}$ sattuu kulkemaan A:n kautta, niin valitaan jokin toinen A:n kauta kulkeva suora ℓ. Lauseen 2.6.6. mukaan ℓ leikkaa α:n kahdessa pisteessä, olkoot ne U ja V.



Kuva 115: Tapaus, jossa A sisältyy suoraan $\overleftrightarrow{RS}$

Jos toinen näistä kuuluu β:aan, niin leikkauspiste on löydetty. Jos toinen, olkoon se U, on β:n ulkopuolella, niin korvataan S pisteellä U. Koska nyt $\overleftrightarrow{RU}$ ei kulje pisteen A kautta, niin on palauduttu jo käsiteltyyn tapaukseen. Voi vielä käydä niin, että sekä U että V ovat β:n sisäpuolella. Tällöin korvataan R pisteellä U ja palaudutaan taas aikaisempaan.

On siis osoitettu, että on olemassa ainakin yksi leikkauspiste. Toinen löytyy seuraavasti: Olkoon C ympyröiden α ja β leikkauspiste. Olkoon ℓ sen kautta kulkeva suoran $\overleftrightarrow{AB}$ normaali ja leikatkoon se suoran $\overleftrightarrow{AB}$ pisteessä D. Nyt $C \neq D$ (Harjoitustehtävä).



Kuva 116: Toinen leikkauspiste

Valitaan E siten, että $C * D * E$ ja $DE \cong CD$. Tällöin $\overleftrightarrow{AB}$ on CE:n keskinormaali, joten lauseen 2.6.9 nojalla $\overline{AE} = \overline{AC} = a$, ja siten $E \in \alpha$. Vastaavasti $\overline{BE} = \overline{BC} = b$, ja siten $E \in \beta$.

Enempää leikkauspisteitä ei sitten lauseen 2.6.11 mukaan voi ollakaan, joten lause 2.6.12 on lopulta todistettu. □

Dedekindin aksiooma on riippumaton muista esittämistämme aksioomista, sillä on olemassa malli, jossa aksioomat (H1)–(H13) ja Arkhimedeen aksiooma pätevät, mutta Dedekindin aksiooma ei päde. (Perustelu on sopiva harjoitustehtävä.)

Toisaalta Arkhimedeen aksiooma on Hilbertin aksioomajärjestelmässä itse asiassa tarpeeton siinä mielessä, että jos oletetaan, että aksioomat (H1)–(H13) ja Dedekindin aksiooma pätevät, niin voidaan todistaa, että myös Arkhimedeen aksiooma pätee, toisin sanoen Arkhimedeen aksiooma voidaan tulkita lauseeksi. Todistetaan tämä vielä tämän luvun lopuksi. Todistaessa on oltava tarkkana, ettei käytä hyväksi Arkhimedeen aksioomaan nojautuvia luvun 2.5 tuloksia, jotta ei syyllistyisi kehäpäätelmään. Myös useimmat luvun 2.6. tulokset käyttävät hyväkseen luvun 2.5. tuloksia ja sitä kautta Arkhimedeen aksioomaa, joten nekin ovat nyt käyttökelvottomia.

LAUSE 2.6.13. *Arkhimedeen aksiooma seuraa aksioomista* (H1)–(H13) *ja Dedekindin aksioomasta.*

Todistus. Olkoot AB ja CD janoja. Pitää osoittaa, että on olemassa luku $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * D * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$. Antiteesi: näin ei ole. Merkitään

$$\begin{aligned}
L =& \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \overleftrightarrow{CD}\} \\
L_1 =& \{P \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\} \mid \text{ ei ole olemassa lukua } n \in \mathbb{N} \text{ ja pistettä } E \text{ siten,} \\
& \quad \text{että } C * D * E \text{ ja } CE \cong n \cdot AB.\} \\
L_2 =& L \setminus L_1.
\end{aligned}$$

Osoitetaan, että L_1 ja L_2 toteuttavat Dedekindin ehdot.

(1) Antiteesin nojalla $D \in L_1$, joten $L_1 \neq \emptyset$. Toisaalta $C \in L_2$, joten myös $L_2 \neq \emptyset$.
(2) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ seuraa L_2:n määritelmästä.
(3) $D_1 \cup D_2 = L$ seuraa L_2:n määritelmästä.
(4) Antiteesi: On olemassa pisteet $P, Q \in L_1$ ja $R \in L_2$, jolla $P * R * Q$. Merkintöjä tarvittaessa muuttamalla voidaan olettaa, että $C * P * R$. Tällöin myös $R \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$. Koska $R \in L_2$, niin $R \notin L_1$ ja siten löytyy $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * R * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$. Koska $C * P * R$, niin $C * P * E$, mutta tämä on mahdotonta, koska $P \in L_1$.
(5) Antiteesi: On olemassa $P, Q \in L_2$ ja $R \in L_1$, joilla $P * R * Q$. Koska $R \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$, niin joko $C * R * Q$ tai $C * R * P$. Merkintöjä tarvittaessa muuttamalla voidaan olettaa, että $C * R * P$. Tästä joudutaan ristiriitaan, kuten kohdassa (4), kunhan vaihdetaan P:n ja R:n roolit.

Siis L_1 ja L_2 toteuttavat Dedekindin ehdot, joten on olemassa piste $P \in L$, joka toteuttaa Dedekindin jakoehdon. Koska $L = L_1 \cup L_2$, niin joko $P \in L_2$ tai $P \in L_1$.

Tapaus $P \in L_2$: Tässä on kolme osatapausta sen mukaan, onko $P*C*D$, $P = C$ vai $P \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$.

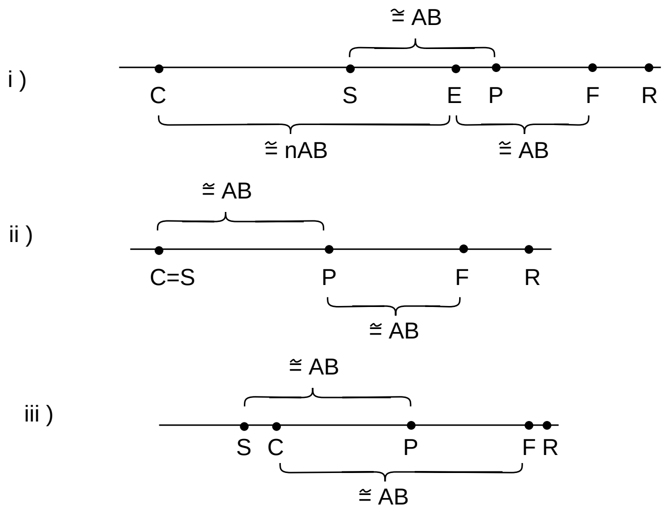
i) $P * C * D$: Valitaan R siten, että $R * P * C$, jolloin $R \in L_2$ ja joudutaan ristiriitaan pisteen P ominaisuuksien kanssa, sillä myös $C \in L_2$.

ii) $P = C$: Valitaan R siten, että $R*C*D$ ja valitaan lisäksi aksiooman (H8) mukaisesti piste $S \in \overrightarrow{CD}$ siten, että $CS \cong AB$ ja edelleen valitaan T siten, että $C * T * S$. Tällöin $R \in L_2$ ja myös $T \in L_2$ ($n = 1$, $E = S$) ja lisäksi $R * C * T$ eli $R * P * T$, mikä on taas mahdotonta.

iii) $P \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$: Koska nyt $P \in L_2$, niin L_2:n määritelmän nojalla löytyy luku $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * P * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$. Valitaan R siten, että $P*R*E$, jolloin $C*R*E$ ja $C*P*R$. Lisäksi L_2:n määritelmän mukaan $R \in L_2$. Tämä on taas mahdotonta, koska $C \in L_2$ ja $C * P * R$.

Siis kaikki tapauksen $P \in L_2$ alitapaukset ovat mahdottomia, joten koko tapaus $P \in L_2$ on mahdoton.

On siis oltava $P \in L_1$. Nyt $P \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$. Jos valitaan R siten, että $C * P * R$, niin P:n ominaisuuksien nojalla, koska $C \in L_2$, on oltava $R \in L_1$. Valitaan sitten $S \in \overrightarrow{PC}$ siten, että $PS \cong AB$. Tässä on taas kolme alatapausta: i) $P * S * C$, ii) $S = C$ ja iii) $P * C * S$. Kaikissa tapauksissa $S * P * R$, joten, koska $R \in L_1$, on P:n ominaisuuksien nojalla oltava $S \in L_2$.



Kuva 117: Tapauksen $P \in L_1$ vaihtoehdot

i) $P*S*C$. Tässä $S \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$, joten L_2:n määritelmän mukaan on olemassa luku $n \in \mathbb{N}$ ja piste E, siten, että $C * S * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$. Valitaan F siten, että $C * E * F$ ja $EF \cong AB$, jolloin monikerran määritelmän nojalla $CF \cong (n+1) \cdot AB$. Koska $P \in L_1$, niin ei voi olla $C * P * E$, ja koska lisäksi $C * E * F$, ei voi olla myöskään $P = E$. Koska tutkittavassa tapauksessa i) on $C * S * P$ ja $C * S * E$, jolloin $P \in \overrightarrow{CE}$, niin täytyy olla $C * E * P$. Koska lisäksi $C * S * E$, niin on $S * E * P$. Tällöin $PE < PS$. Koska $PS \cong AB$ niin lauseen 2.4.4 mukaan $PE < AB$. Toisaalta $EF \cong AB$, joten uudelleen lausetta 2.4.4 käyttäen $EP < EF$. Lauseen 2.4.4 iii) nojalla tällöin ei voi olla $P = F$ eikä $E * F * P$. Koska toisaalta $C * E * P$ ja $C * E * F$, ainoaksi mahdollisuudeksi jää $E * P * F$. Mutta tällöin, koska $C * E * P$, saadaan $C * P * F$, mikä sekin on mahdotonta, koska $CF \cong (n+1) \cdot AB$ ja $P \in L_1$.

ii) $S = C$. Valitaan tässä F siten, että $C * P * F$ ja $PF \cong AB$. Tällöin, koska $CP \cong AB$, saadaan monikerran määritelmän mukaan $CF \cong 2 \cdot AB$. Koska $C * P * F$ ja $P \in L_1$, tämä on mahdotonta.

iii) $P * C * S$. Nyt valitaan F siten, että $F \in \overrightarrow{CP}$ ja $CF \cong AB$. Koska oletimme $P * C * S$, niin $PC < PS \cong AB \cong CF$, joten $PC < CF$. Lauseen 2.4.4. iii) nojalla ei tällöin voi olla $P = F$ eikä $C * F * P$. Koska $F \in \overline{CP}$, niin ainoaksi mahdollisuudeksi jää $C * P * F$. Tämäkin on mahdotonta, koska $P \in L_1$ ja $CF \cong 1 \cdot AB$.

Näin kaikki alatapaukset ovat mahdottomia, antiteesi on väärä ja lause on todistettu.

□

Huomautus 29. Lauseen 2.6.13 todistuksessa käytettiin antiteesia vain kerran ja sekin näennäisen vähäpätöisessä kohdassa (missä?), mutta sehän riitti!

III Paralleeliaksiooma

Seuraavassa oletetaan vielä yksi aksiooma, nimittäin paralleeliaksiooma, jolloin saadaan aikaan tuttu *euklidinen geometria.* Paralleeliaksiooma ei ole ristiriidassa muiden aksioomien kanssa, sillä koordinaattigeometria toteuttaa myös sen. Paralleeliaksioomaa ei toisaalta voi todistaa aikaisempien tulostemme avulla. Tämän osoitamme luvussa IV konstruoimalla Poincarén mallin, jossa muut aksioomat pätevät, mutta paralleeliaksiooma ei. Kirjan alussa esitetyssä Legendre'in todistuksessa on siis aukko. Mieti missä kohdassa!

3.1. Alkeellista euklidista geometriaa.

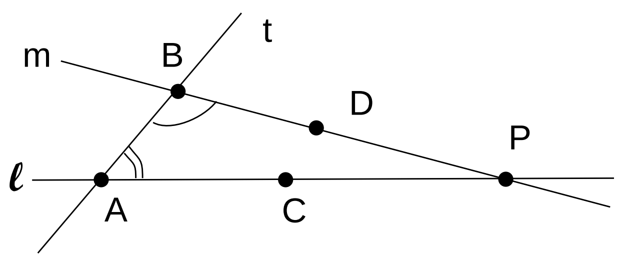
Tässä luvussa oletetaan, että aikaisempien lisäksi myös paralleeliaksiooma **(PAR)** pätee:

(PAR) Jos ℓ on suora ja P piste, joka ei sisälly suoraan ℓ, niin P:n kautta kulkee korkeintaan yksi ℓ:n kanssa yhdensuuntainen suora.

Eukleideen viides aksiooma.

Huomautus 30. (PAR) ei ole täysin sama kuin kirjan alussa esitetty muoto Eukleideen paralleeliaksioomasta (PA), vaan nyt ainoastaan kielletään useamman kuin yhden paralleelin olemassaolo. Ero johtuu siitä, että nyt on käytössä lause 2.4.18, joka sanoo, että ainakin yksi on olemassa. Kirjan alussa ei itse asiassa edes esitetty sanamuodoltaan alkuperäistä Eukleideen paralleliaksioomaa (EA5), koska se olisi ollut teknisesti hankalaa. Nyt koneistomme on niin kehittynyt, että tämä voidaan helposti tehdä. Alkuperäinen aksiooma on seuraava:

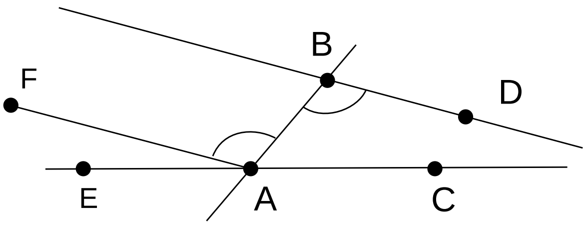
(EA5) Olkoot ℓ ja m eri suoria ja t kolmas suora, joka leikkaa suoraa ℓ pisteessä A ja suoraa m pisteessä $B \neq A$. Jos piste C on suoralla ℓ ja D suoralla m siten, että CDt ja $(\measuredangle DBA)^\circ + (\measuredangle BAC)^\circ < 180$, niin suorat ℓ ja m leikkaavat toisensa. Lisäksi, jos P on tuo leikkauspiste, niin PCt ja PDt.



Kuva 118: Eukleideen viides aksiooma

LAUSE 3.1.1. *Eukleideen viides aksiooma (EA5) pätee.*

Todistus. Olkoot A, B, C ja D kuten (EA5):ssä. Valitaan E siten, että $E * A * C$.



Kuva 119: (EA5):n todistus

Tällöin lauseen 2.5.17 nojalla $(\measuredangle EAB)^\circ + (\measuredangle BAC)^\circ = 180$ ja oletuksen nojalla saadaan nyt $(\measuredangle DBA)^\circ < 180 - (\measuredangle BAC)^\circ = (\measuredangle EAB)^\circ$, josta edelleen lauseen 2.5.20 mukaan

$$(*) \qquad \measuredangle DBA < \measuredangle EAB.$$

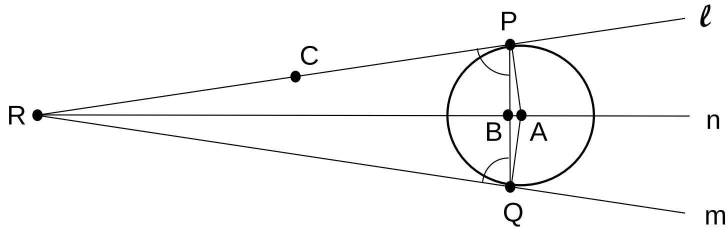
Symbolin ”<” määritelmän mukaan tällöin kulman $\measuredangle EAB$ sisällä on piste F siten, että $\measuredangle DBA \cong \measuredangle BAF$. Nyt $EF\overleftrightarrow{AB}$, $E\overleftrightarrow{ABC}$ ja $CD\overleftrightarrow{AB}$ (oletus), joten aksiooman (H7) nojalla $F\overleftrightarrow{AB}D$. Tällöin lauseen 2.4.15 nojalla suorat $\overleftrightarrow{AF}$ ja $\overleftrightarrow{BD}$ ovat yhdensuuntaiset. Koska F on kulman $\measuredangle EAB$ sisällä, on $\overleftrightarrow{AF} \neq \overleftrightarrow{AE}$, jolloin (PA):n nojalla $\overleftrightarrow{AE}$ ei voi olla yhdensuuntainen $\overleftrightarrow{BD}$:n kanssa, vaan $\overleftrightarrow{AE}$ leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{BD}$. Olkoon leikkauspiste P. Pitää vielä näyttää, että $PC\overleftrightarrow{AB}$ ja $PD\overleftrightarrow{AB}$. Koska $CD\overleftrightarrow{AB}$, niin riittää, että $PC\overleftrightarrow{AB}$. Tehdään antiteesi $P\overleftrightarrow{AB}C$. (Huomaa, että ei voi olla $P = A$.) Koska $E\overleftrightarrow{AB}C$, niin $EP\overleftrightarrow{AB}$, joten $\measuredangle PAB = \measuredangle EAB$. Lisäksi $P\overleftrightarrow{AB}D$, joten $P{*}B{*}D$. Näinollen $\triangle PAB$ on kolmio ja ulkokulmaepäyhtälö 2.4.19 sovellettuna tähän kolmioon sanoo, että $\measuredangle PAB < \measuredangle ABD$. Tällöin $\measuredangle EAB < \measuredangle DBA$, mikä on vastoin ehtoa $(*)$ lauseen 2.4.12 iii) nojalla. □

Huomautus 31. Jos oletetaan, että Eukleideen 5. aksiooma pätee (muiden Hilbertin aksioomien lisäksi, tietenkin), niin voidaan todistaa, että (PA) pätee. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. Näin (EA5), (PA) ja (PAR) ovat siis ”yhtä vahvoja”.

LAUSE 3.1.2. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria. Jos suora $t \neq \ell$ leikkaa suoraa ℓ, niin se leikkaa myös suoraa m.*
Todistus. Olkoon P suorien ℓ ja t leikkauspiste. Aksiooman (PA) nojalla sen kautta voi kulkea vain yksi m:n suuntainen suora. Koska $\ell \parallel m$ ja $t \neq \ell$, niin t ei voi olla m:n kanssa yhdensuuntainen, vaan leikkaa sitä. □

Huomautus 32. Lauseen 3.1.2 perusteella suorien yhdensuuntaisuusrelaatio on euklidisessa geometriassa siinä mielessä melkein transitiivinen, että jos $\ell \parallel m$ ja $m \parallel t$ niin $\ell \parallel t$ tai $\ell = t$. Siten voidaan sanoa, että (eri) ”suorat ℓ, m ja t ovat yhdensuuntaiset.”

LAUSE 3.1.3. *Olkoon α ympyrä, A sen keskipiste sekä P ja $Q \in \alpha$ eri pisteitä siten, että A ei sisälly suoralle $\overleftrightarrow{PQ}$. Olkoot edelleen ℓ ja m pisteiden P ja Q kautta kulkevat α:n tangentit. Tällöin ℓ ja m leikkaavat toisensa. Jos leikkauspiste on R, niin $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle RQP$.*



Kuva 120: Tangentit

Todistus. Olkoon n janan PQ keskinormaali ja B janan PQ ja n:n leikkauspiste. Lauseen 2.6.9 nojalla n kulkee pisteen A kautta ja oletuksen nojalla $A \neq B$, joten $\measuredangle PBA$ on suora. Siten lauseen 2.5.19 mukaan $(\measuredangle PBA)^\circ = 90$. Koska $(\measuredangle BPA)^\circ > 0$ (lause 2.4.15.), niin Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla $(\measuredangle BAP)^\circ < 90$. Toisaalta lauseen 2.6.8 mukaan $\ell \perp \overleftrightarrow{AP}$, joten jos valitaan suoralta ℓ piste C siten, että $C\overleftrightarrow{BAP}$, niin $(\measuredangle CPA)^\circ = 90$. Siten

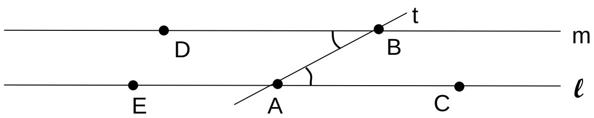
$$(\measuredangle BAP)^\circ + (\measuredangle CPA)^\circ < 90 + 90 = 180.$$

Tällöin lauseen 3.1.1 nojalla voidaan soveltaa Eukleideen viidettä aksioomaa, joka takaa, että ℓ ja n leikkaavat toisensa jossakin pisteessä R, jolle pätee $RB\overleftrightarrow{AP}$. Koska R sisältyy suoraan n, pätee lauseen 2.6.9 nojalla $RQ \cong RP$. Tällöin SSS-säännön nojalla $\triangle RAP \cong \triangle RAQ$. Erityisesti $\measuredangle RQA \cong \measuredangle RPA$, joten $\measuredangle RQA$ on suora. Siten $\overleftrightarrow{RQ}$ on suoran $\overleftrightarrow{AQ}$ normaali. Tällöin lauseen 2.6.8 mukaan $\overleftrightarrow{RQ}$ on ympyrän α tangentti ja koska Q:n kautta kulkee vain yksi α:n tangentti, niin $\overleftrightarrow{RQ} = m$. Siten R on m:n ja ℓ:n leikkauspiste. Väite $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle RQP$ seuraa lauseesta 2.4.1, sillä yllä todettiin, että $RQ \cong RP$. □

Vuorokulmat ja kolmion kulmasumma.

Seuraava lause ratkaisee vuorokulmalauseen 2.4.15 yhteydessä esitetyn ongelman euklidisessa tapauksessa.

LAUSE 3.1.4. *(***Käänteinen vuorokulmalause***) Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria ja t suora, joka leikkaa ℓ:ää pisteessä A ja m:ää pisteessä B. Olkoot lisäksi C suoran ℓ ja D suoran m piste siten, että CtD. Tällöin $\measuredangle DBA \cong \measuredangle CAB$.*



Kuva 121: (PAR) takaa yhtä suuret kulmat!

Todistus. Antiteesi: $\measuredangle DBA \ncong \measuredangle CAB$. Lauseen 2.4.12 nojalla tällöin joko $\measuredangle DBA < \measuredangle CAB$ tai $\measuredangle CAB < \measuredangle DBA$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $\measuredangle DBA < \measuredangle CAB$. Valitaan E siten, että $E * A * C$. Lauseen 2.4.17 nojalla $(\measuredangle EAB)^\circ + (\measuredangle CAB)^\circ = 180$. Koska $\measuredangle DBA < \measuredangle CAB$, niin $(\measuredangle DBA)^\circ < (\measuredangle CAB)^\circ$ (lause 2.5.20) ja siten

$$(\measuredangle EAB)^\circ + (\measuredangle DBA)^\circ < (\measuredangle EAB)^\circ + (\measuredangle CAB)^\circ = 180.$$

Lisäksi $E\overleftrightarrow{ABC}$ eli EtC, joten oletuksen CtD nojalla EDt. Tällöin Eukleideen 5. aksiooman nojalla suorat m ja ℓ leikkaavat, mikä on mahdotonta, koska ne ovat yhdensuuntaiset. $\square$

SEURAUS 3.1.5. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria ja n suoran ℓ normaali. Tällöin n leikkaa m:ää (3.1.2) ja on myös m:n normaali (3.1.4).*

Huomautus 33. Näytämme myöhemmin Poincarén mallin avulla, että ilman paralleeliaksioomaa ei voi todistaa edes, että n leikkaa suoraa m.

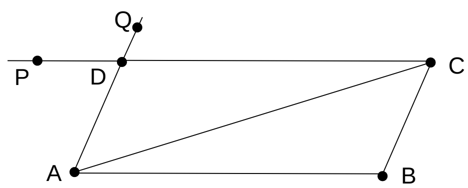
LAUSE 3.1.6. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria sekä n suoran ℓ normaali ja t suoran m normaali. Tällöin n ja t ovat joko samoja tai yhdensuuntaisia.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. $\square$

Luvussa 2.5 tarkasteltiin kolmion defektiä $\operatorname{def}(\triangle ABC) = 180 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle B)^\circ - (\measuredangle C)^\circ$ ja todettiin, että aina $\operatorname{def} \triangle ABC \geq 0$ ja että samassa mallissa joko $\operatorname{def}(\triangle ABC) > 0$ kaikilla kolmioilla tai sitten $\operatorname{def}(\triangle ABC) = 0$ kaikilla kolmioilla. Erityisesti euklidisen geometrian kaikissa malleissa pätee $\operatorname{def}(\triangle ABC) = 0$.

LAUSE 3.1.7 (Kulmasummalause). *Jokaisen kolmion defekti on 0.*
Todistus. Lauseen 2.5.26 nojalla riittää näyttää, että on olemassa suorakulmio. Konstruoidaan sellainen. Valitaan suora ℓ ja piste P, joka ei sisälly suoraan ℓ. Lauseen 2.4.18 nojalla voidaan valita P:n kautta kulkeva suora m siten, että $\ell \parallel m$. Lauseen 2.4.8 nojalla on olemassa P:n kautta kulkeva m:n normaali t. Lauseen 3.1.5 nojalla t on myös ℓ:n normaali. Olkoon Q ℓ:n ja t:n leikkauspiste. Valitaan sitten suoran ℓ piste $R \neq Q$. Lauseen 2.4.8 nojalla on olemassa R:n kautta kulkeva ℓ:n normaali n. Lauseen 3.1.5 nojalla n on myös m:n normaali, leikatkoon se m:ää pisteessä S. Koska $R \neq Q$, niin $n \neq t$ ja silloin on oltava $S \neq P$ lauseen 2.4.16 nojalla. Siten P, Q, R, S ovat eri pisteitä ja koska $\ell \parallel m$, mitkään kolme niistä eivät sisälly samaan suoraan. Koska $\ell \parallel m$, janat SP ja QR eivät leikkaa toisiaan, ja koska lauseen 3.1.6 nojalla $n \cong t$, niin myöskään janat PQ ja RS eivät leikkaa toisiaan. Siten $\square PQRS$ on nelikulmio. Konstruktion ja lauseen 3.1.5 perusteella sen kaikki kulmat ovat suoria, joten $\square PQRS$ on suorakulmio. $\square$

Määritelmä 3.1. Olkoon $\square ABCD$ nelikulmio. Sanotaan, että $\square ABCD$ on *suunnikas*, mikäli $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DA}$.

LAUSE 3.1.8. *Olkoon $\square ABCD$ suunnikas. Tällöin $AB \cong CD$, $BC \cong DA$, $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ ja $\measuredangle B \cong \measuredangle D$.*



Kuva 122: Suunnikas

Todistus. Valitaan pisteet P ja Q siten, että $P{*}D{*}C$ ja $Q{*}D{*}A$. Koska $\square ABCD$ on suunnikas, niin $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, joten $BC\overleftrightarrow{AD}$ ja nyt $P\overleftrightarrow{AD}C$, joten $P\overleftrightarrow{AD}B$. Koska $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, niin lauseen 3.1.4 mukaan $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ADP$. Lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle ADP \cong \measuredangle QDC$. Toisaalta, koska $\square ABCD$ on suunnikas, niin $AB\overleftrightarrow{DC}$ ja nyt $Q\overleftrightarrow{DC}A$, joten $Q\overleftrightarrow{DC}B$. Koska $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, niin lauseen 3.1.4 nojalla $\measuredangle QDC \cong \measuredangle BCD$. Siten $\measuredangle A = \measuredangle DAB \cong \measuredangle ADP \cong \measuredangle QDC \cong \measuredangle BCD = \measuredangle C$, joten $\measuredangle A \cong \measuredangle C$. Aivan vastaavasti voidaan päätellä, että $\measuredangle B \cong \measuredangle D$. Koska $\square ABCD$ on nelikulmio, niin $BC\overleftrightarrow{AD}$ ja $CD\overleftrightarrow{AB}$, joten C on kulman $\measuredangle DAB$ sisällä. Puomilauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{AC}$ leikkaa janaa DB, joten $D\overleftrightarrow{AC}B$. Koska $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, niin lauseen 3.1.4 mukaan $\measuredangle DAC \cong \measuredangle BCA$. Koska jo tiedetään, että $\measuredangle B \cong \measuredangle D$, niin SKK-säännön nojalla $\triangle ACD \cong \triangle CAB$, mistä saadaan $AD \cong CB$ ja $CD \cong AB$. $\square$

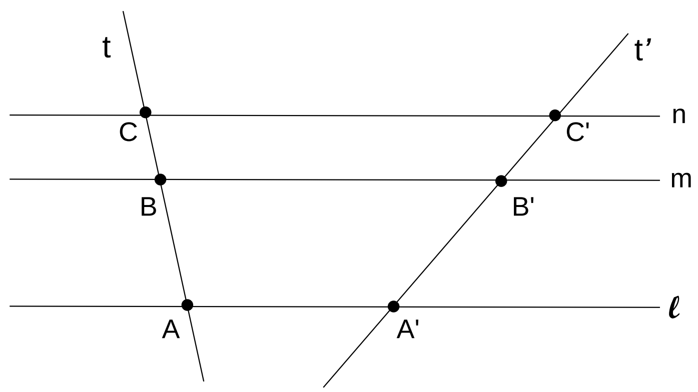
Yhdensuuntaiset ja samanmuotoiset.

Seuraava tulos on keskeinen euklidisessa geometriassa. Voidaan sanoa, että lähes kaikki myöhemmin esitettävät tärkeät tulokset perustuvat tähän tavalla tai toisella. Englanninkielisessä kirjallisuudessa tulos tunnetaan nimellä ”Parallel Projection Theorem”.

LAUSE 3.1.9. *Olkoot ℓ, m ja n eri suoria, jotka ovat keskenään yhdensuuntaisia. Olkoot lisäksi t ja t' suoria, jotka leikkaavat suoria ℓ, m ja n pisteissä A, B ja C. sekä A', B' ja C' vastaavassa järjestyksessä. Tällöin*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

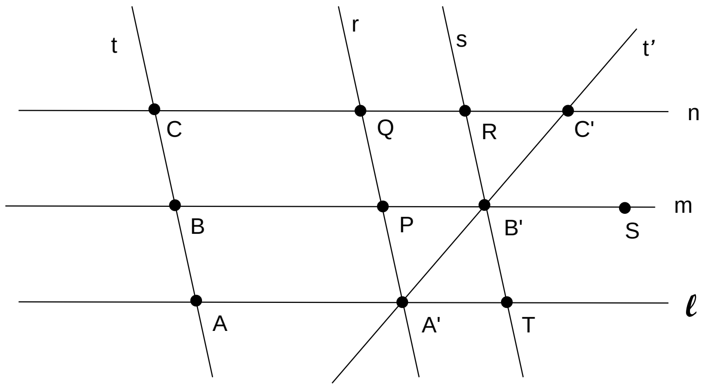
Lause 3.1.9 sanoo siis, että kolme yhdensuuntaista suoraa erottavat jokaisesta niitä leikkaavasta suorasta t kaksi palasta, joiden pituuksien suhde ei riipu suorasta t laisinkaan.



Kuva 123: Parallel Projection Theorem

Todistus. Tarkastellaan kolmea eri tapausta sen mukaan, onko pituuksien suhde $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ a) yksi, b) muu rationaaliluku vai c) irrationaalinen.

Tapaus a): $\overline{AB}/\overline{BC} = 1$. Lauseen 2.4.18 nojalla voidaan valita pisteen A' kautta kulkeva suora r siten, että $r \parallel t$. Lauseen 3.1.2 nojalla r leikkaa suoria m ja n, olkoot leikkauspisteet P ja Q vastaavassa järjestyksessä. Samoin voidaan valita B':n kautta kulkeva suora s siten, että $s \parallel t$. Lauseen 3.1.2 nojalla s leikkaa suoria ℓ ja n, olkoot leikkauspisteet T ja R vastaavassa järjestyksessä.



Kuva 124: Tapaus $\overline{AB}/\overline{BC} = 1$

Jos nyt $t = t'$, niin $A = A'$, $B = B'$ ja $C = C'$, joten väite on selvä. Jos taas $t \parallel t'$, niin nelikulmiot $\square AA'B'B$ ja $\square BB'C'C$ ovat suunnikkaita, jolloin lauseen 3.1.8 nojalla $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ja $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, ja väite seuraa.

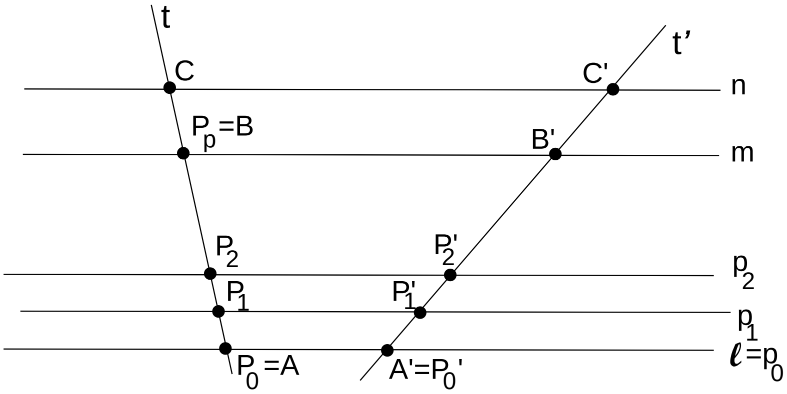
Voidaan siis olettaa, että t ja t' ovat eri suoria, jotka eivät ole yhdensuuntaisia. Tällöin $t' \neq r$ ja $t' \neq s$ eikä mikään pisteistä P, Q ja R ole suoralla t'. Lisäksi $Q \neq R$, sillä jos olisi $Q = R$, niin (PA):n nojalla olisi $r = s$, jolloin olisi $P = B'$, mikä on mahdotonta. Nyt tapauksessa a) on $\overline{AB} = \overline{BC}$, jolloin on oltava $A * B * C$. Tällöin AmC ja koska $\ell \parallel m$ ja $n \parallel m$, niin $AA'm$ ja $CC'm$ ja näin saadaan $A'mC'$ ja silloin $A' * B' * C'$. Vastaavasti voi päätellä, että $A' * P * Q$. Tällöin QPt' $(**)$. Lauseen 3.1.2 ja sen jälkeisen huomautuksen nojalla $r \parallel s$, joten $QA's$ $(*)$. Koska $A' * B' * C'$, niin $A'sC'$ ja silloin $(*)$:n nojalla QsC'. Tällöin $Q * R * C'$ tai $R * Q * C'$; kummassakin tapauksessa QRC'. Tällöin $(**)$:n nojalla PRt'. Valitaan nyt piste S siten, että $P * B' * S$, jolloin $Pt'S$ ja siten $Rt'S$. Koska $m \parallel n$, niin lauseen 3.1.4 mukaan $\measuredangle RC'B' \cong \measuredangle AB'P$. $(* * *)$.

Koska AsC', niin lauseen 3.1.4 nojalla $\measuredangle ATR \cong \measuredangle TRC'$. Toisaalta nyt $\square A'TB'P$ on suunnikas, joten lauseen 3.1.8 nojalla $\measuredangle A'TB' \cong \measuredangle A'PB'$. Koska $A * B * C$, niin $T * B' * R$, mikä perustellaan samalla tavalla kuin $A' * B' * C'$. Siksi $\measuredangle A'TB' = \measuredangle A'TR$ ja $\measuredangle TRC' = \measuredangle B'RC$. Siten $\measuredangle B'RC = \measuredangle TRC' \cong \measuredangle A'TR = \measuredangle A'TB' \cong \measuredangle A'PB'$ ja näin $\measuredangle B'RC \cong \measuredangle A'PB'$ $(****)$. Nyt nelikulmiot $\square AA'PB$ ja $\square BB'RC$ ovat suunnikkaita, joten lauseen 3.1.8 nojalla $\overline{AB} = \overline{A'P}$ ja $\overline{BC} = \overline{B'R}$. Tapauksessa a) pätee oletuksen mukaan, että $\overline{AB} = \overline{BC}$ ja siten $\overline{A'P} = \overline{B'R}$ eli $A'P \cong B'R$. Tämän sekä ehtojen $(***)$ ja $(****)$ ja vielä SKK–säännön nojalla saadaan

$$\triangle A'PB' \cong \triangle B'RC'.$$

Erityisesti tällöin $A'B' \cong B'C'$ eli $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$, joten $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

Tapaus b): $\overline{AB}/\overline{BC} = \frac{p}{q} \neq 1$ on rationaaliluku; $p, q \in \mathbb{N}$. Valitaan pisteet $P_0, \ldots, P_p$ seuraavasti: Asetetaan $P_0 = A$ ja valitaan $P_k \in \overrightarrow{AB}$, $k = 1, \ldots, p$ siten, että $\overline{AP_k} = k \cdot \frac{\overline{AB}}{p}$. Tämä on lauseen 2.6.3 nojalla mahdollista.



KUVA 125: TAPAUS $\overline{AB}/\overline{BC} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

Koska kaikilla k on $\overline{AP_k} < \overline{AP_{k+1}}$, niin $A * P_k * P_{k+1}$ kaikilla $k = 1, \ldots, p-1$. Lisäksi $\overline{AP_p} = p \cdot \frac{\overline{AB}}{p} = \overline{AB}$, joten $P_p = B$. Koska $A * P_k * P_{k+1}$, niin $\overline{P_k P_{k+1}} = \overline{AP_{k+1}} - \overline{AP_k} = k+1 \cdot \frac{\overline{AB}}{p} - k \cdot \frac{\overline{AB}}{p} = \frac{\overline{AB}}{p}$ $\forall k = 1, \ldots, p-1$ ja lisäksi myös $\overline{P_0 P_1} = \overline{AP_1} = \frac{\overline{AB}}{p}$. Lauseen 3.4.18 nojalla jokaisen P_i:n $(0 = 1, \ldots, p-1)$ kautta kulkee ℓ:n kanssa yhdensuuntainen suora, olkoon se p_i. Lauseen 3.1.2 nojalla p_i leikkaa suoraa t', olkoon leikkauspiste P'_i. Merkitään lisäksi $p_0 = \ell$, $P'_0 = A'$ ja $p_p = m$, $P'_p = B'$. Lauseen 3.1.2 nojalla suorat p_k, $k = 0, \ldots, p$ ovat kaikki yhdensuuntaisia keskenään. Lisäksi pätee

$$\frac{\overline{P_k P_{k+1}}}{\overline{P_{k-1} P_k}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{p}}{\frac{\overline{AB}}{p}} = 1 \quad \forall\, k = 1, \ldots, p-1.$$

Tällöin voidaan soveltaa a) -kohtaa, jonka mukaan on

$$\frac{\overline{P'_k P'_{k+1}}}{\overline{P'_{k-1} P'_k}} = 1 \quad \forall\, k = 1, \ldots, p-1,$$

eli $\overline{P'_k P'_{k+1}} = \overline{P'_{k-1} P'_k}$ $\forall\, k = 1, \ldots, p-1$. Merkitään $a = \overline{P_k P_{k+1}}$, $k = 1, \ldots, p-1$. Koska $A = P_k * P_{k+1}$ ja suorat p_k ovat yhdensuuntaisia, pätee myös $A' * P'_k * P'_{k+1}$. Tämä perustellaan kuten kaava $A' * B' * C'$ a) -kohdassa. Täten

$$\overline{A'P'_{k+1}} = \overline{A'P'_k} + \overline{P'_k P'_{k+1}} = \overline{A'P'_k} + a \quad \forall\, k = 1, \ldots, p-1.$$

Koska $\overline{A'P'_1} = \overline{P'_0 P'_1} = a$, niin induktiopäättelyllä nähdään, että kaikilla $k = 0, \ldots, p-1$ pätee $\overline{A'P'_{k+1}} = (k+1)a$. Erityisesti, kun $k = p-1$ saadaan

$$(*) \qquad \overline{A'B'} = \overline{A'P'_p} = p \cdot a.$$

Valitaan sitten pisteet $Q_0, \ldots, Q_q$ seuraavasti: Asetetaan $Q_0 = B$ ja $Q_k \in \overline{BC}$ siten, että $\overline{BQ_k} = k \cdot \frac{\overline{BC}}{q}$. Samalla tavalla kuin yllä voidaan nyt päätellä, että

$$(**) \qquad \overline{B'C'} = q \cdot b,$$

missä $b = \overline{Q'_kQ'_{k+1}}$, $k = 0, \dots, q-1$. Nyt $\overline{P_{p-1}B} = \frac{\overline{AB}}{p}$ ja $\overline{BQ_1} = \frac{\overline{BC}}{q}$, joten oletuksen $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{p}{q}$ nojalla saadaan

$$\frac{\overline{P_{p-1}B}}{\overline{BQ_1}} = \frac{\overline{AB}\,/\,p}{\overline{BC}\,/\,q} = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q} = 1.$$

Soveltamalla a) -kohtaa yhdensuuntaisiin (lause 3.1.2) suoriin p_{p-1}, m ja q_1 saadaan

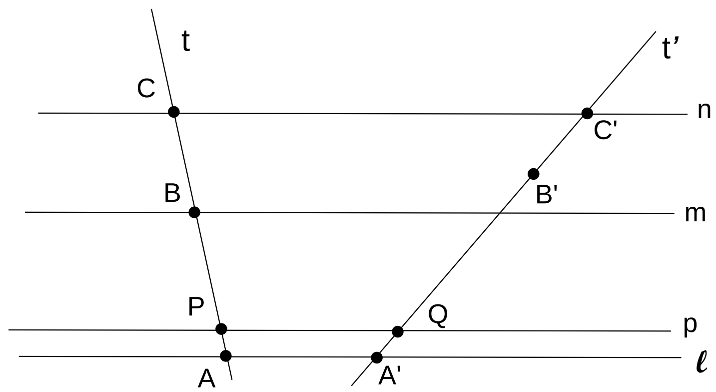
$$\frac{\overline{P'_{p-1}B'}}{\overline{B'Q'_1}} = 1$$

eli $\overline{P'_{p-1}P'_p} = \overline{Q'_0Q'_1}$ ja siten $a = b$. Tällöin $(*)$:n ja $(**)$:n nojalla

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{p \cdot a}{q \cdot b} = \frac{p}{q} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}},$$

kuten väitettiinkin.

Tapaus c): $\overline{AB}/\overline{BC} \notin \mathbb{Q}$. Olkoon $0 < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Merkitään $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = x'$ ja väitetään, että $x = x'$. Antiteesi on $x \neq x'$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voi olettaa, että $x' < x$. Valitaan rationaaliluku $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, siten, että $x' < \frac{p}{q} < x$. Lauseen 2.6.3 nojalla voidaan valita $P \in \overrightarrow{BA}$ siten, että $\overline{BP} = \frac{p}{q}\overline{BC}$. Tällöin $\overline{BP} < x\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\overline{BC} = \overline{AB}$, joten $B * P * A$. Lauseen 2.4.18 nojalla P:n kautta kulkee m:n kanssa yhdensuuntainen suora, olkoon se p. Lauseen 3.1.2 nojalla p leikkaa suoraa t', olkoon leikkauspiste Q. Tällöin $B' * Q * A'$. Tämä perustellaan taas kuten a) kohdan kaava $A' * B' * C$.



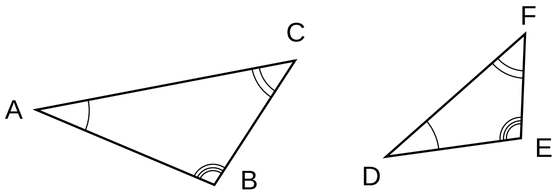
Kuva 126: Tapaus $\overline{AB}/\overline{BC} \notin \mathbb{Q}$

Nyt $\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} = \frac{p}{q}$, joten b) -kohdan nojalla $\frac{\overline{B'Q}}{\overline{B'C'}} = \frac{p}{q}$. Koska $B' * Q * A'$, niin $\overline{A'B'} > \overline{B'Q}$ ja siten

$$x' = \frac{\overline{A * B'}}{\overline{B'C'}} > \frac{\overline{B'Q}}{\overline{B'C'}} = \frac{p}{q} > x',$$

mikä on mahdotonta ja osoittaa antiteesin vääräksi. □

Määritelmä 3.2. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $\measuredangle C \cong \measuredangle F$. Tällöin sanotaan, että kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat *samanmuotoiset* ja merkitään $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



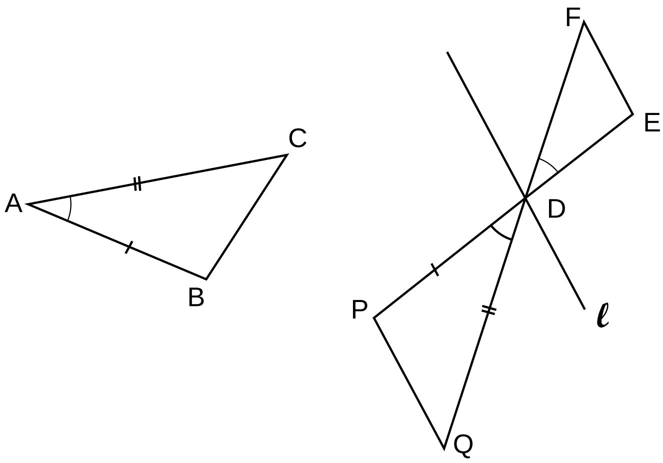
Kuva 127: Samanmuotoiset kolmiot

Samanmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhde on vakio:

LAUSE 3.1.10. *Olkoon $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Tällöin*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

Todistus.



Kuva 128: Sivujen suhteet

Valitaan P siten, että $P * D * E$ ja $DP \cong AB$ ja Q siten, että $Q * D * F$ ja $DQ \cong AC$. Lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle PDQ \cong \measuredangle FDE$, jolloin oletuksen nojalla $\measuredangle PDQ \cong \measuredangle A$. SKS-säännön nojalla saadaan $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$. Erityisesti $\measuredangle Q \cong \measuredangle C$, joten oletuksen mukaan $\measuredangle Q \cong \measuredangle F$, eli $\measuredangle DQP \cong \measuredangle FDE$. Koska $F * D * Q$, niin $\measuredangle DQP = \measuredangle FQP$ ja $\measuredangle DFE = \measuredangle QFE$, joten $\measuredangle FQP \cong \measuredangle QFE$. Koska $E * D * P$, niin $E\overleftrightarrow{FQ}P$. Tällöin lauseen 2.4.15 mukaan $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{FE}$. Lauseen 2.4.18. nojalla D:n kautta kulkee suora ℓ, jolle $\ell \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, jolloin 3.1.2:n mukaan myös $\ell \parallel \overleftrightarrow{FE}$. Nyt voidaan soveltaa lausetta 3.1.9, jonka mukaan

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{DE}}.$$

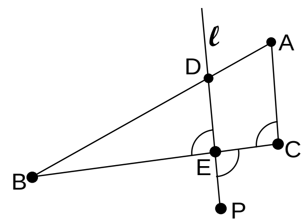
Koska $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$, niin $\overline{PD} = \overline{AB}$ ja $\overline{DQ} = \overline{AC}$. Siten

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}.$$

Merkintöjä vaihtamalla $(A \leftrightarrow B, D \leftrightarrow E)$ nähdään, että myös

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}. \qquad \square$$

LAUSE 3.1.11. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $A * D * B$ ja ℓ suora, joka kulkee D:n kautta siten, että $\ell \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Tällöin ℓ leikkaa janaa BC pisteessä E. Lisäksi $B*E*C$ ja $\triangle DBE \sim \triangle ABC$.*



Kuva 129: Lause 3.1.11

Todistus. Pisteen E olemassaolo seuraa Paschin lauseesta. Valitaan P siten, että $D*E*P$, jolloin $D\overleftrightarrow{BC}P$. Koska $A*D*B$, niin $AD\overleftrightarrow{BC}$ ja siten $P\overleftrightarrow{BC}A$. Koska $\ell \parallel \overleftrightarrow{AC}$, niin lauseen 3.1.4 mukaan $\measuredangle PEC \cong \measuredangle ECA$. Lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle PEC \cong \measuredangle BED$, joten $\measuredangle ECA \cong \measuredangle BED$. Koska $B * E * C$, niin $\measuredangle BCA = \measuredangle ECA$, joten $\measuredangle BCA \cong \measuredangle BED$ $(*)$. Toisaalta $\measuredangle EBD = \measuredangle CBA$ $(**)$. Kulmasummalauseen 3.1.7 nojalla nähdään tällöin, että

$$(\measuredangle BDE)^\circ = 180-(\measuredangle DBE)^\circ-(\measuredangle BED)^\circ = 180-(\measuredangle CBA)^\circ-(\measuredangle BCA)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ$$

eli $\measuredangle BDE \cong \measuredangle BAC$. Tästä ja ehdoista $(*)$ ja $(**)$ väite seuraa. $\square$

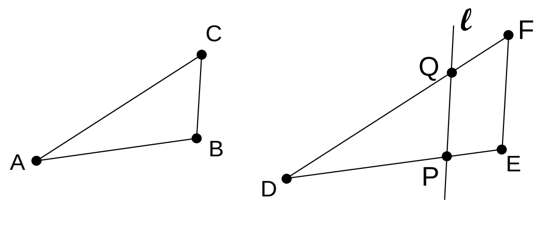
Lauseelle 3.1.10 pätee myös käänteinen tulos.

LAUSE 3.1.12. *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

Tällöin $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Todistus. Merkitään $a = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla $(A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F)$ voidaan olettaa, että $a \leq 1$. Jos $a = 1$, niin SSS-säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ja väite pätee. Voidaan siis olettaa, että $0 < a < 1$.



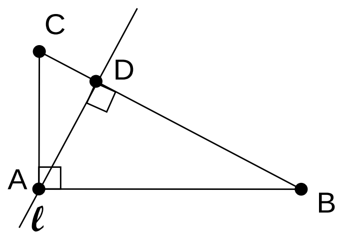
Kuva 130: Lause 3.1.12

Valitaan $P \in \overrightarrow{DE}$ siten, että $\overline{DP} = \overline{AB}$. Koska $a < 1$, niin $\overline{AB} < \overline{DE}$ ja siten $D * P * E$. Olkoon ℓ pisteen P kautta kulkeva suora siten, että $\ell \parallel \overleftrightarrow{FE}$. Lauseen 3.1.11 nojalla ℓ leikkaa janaa DF pisteessä Q siten, että $D * Q' * F$ ja $\triangle DPQ \sim \triangle DEF$. Tällöin lauseen 3.1.10 nojalla $\frac{\overline{DQ}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{DE}}$. Koska $\frac{\overline{DP}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = a$, niin $\overline{DQ} = a \cdot \overline{DF}$ ja $\overline{QP} = a \cdot \overline{FE}$. Suhdeluvun a määritelmän mukaan tällöin $\overline{DQ} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \cdot \overline{DF} = \overline{AC}$ ja $\overline{QP} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \cdot \overline{FE} = \overline{BC}$. Siten $AB \cong DP$, $AC \cong DC$ ja $BC \cong QP$. SSS-säännön nojalla tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$. Koska siis $\triangle DPQ \sim \triangle DEF$, niin väite seuraa. $\square$

Pythagoras ja trigonometria.

LAUSE 3.1.13 (Pythagoras). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio siten, että $\measuredangle A$ on suora. Tällöin*

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$



KUVA 131: PYTHAGORAAN LAUSEEN TODISTUS

Todistus. Olkoon ℓ pisteen A kautta kulkeva $\overleftrightarrow{BC}$:n normaali; leikatkoon normaali ℓ suoraa $\overleftrightarrow{BC}$ pisteessä D. Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla $(\measuredangle B)^\circ < 90$ ja $(\measuredangle C)^\circ < 90$, jolloin pätee $C * D * B$. Tämä perustellaan täsmälleen samoin kuin lauseen 2.5.25 todistuksessa. Tällöin $(\measuredangle BDA)^\circ = 90 = (\measuredangle CDA)^\circ$ ja oletuksen mukaan $(\measuredangle CAB)^\circ = 90$. Lisäksi kulmasummalauseen 3.1.7 mukaan

$$\begin{aligned}(\measuredangle CAD)^\circ &= 180 - (\measuredangle ACD)^\circ - (\measuredangle ADC)^\circ = 180 - (\measuredangle ACB)^\circ - 90 \\ &= 180 - (\measuredangle ACB)^\circ - (\measuredangle CAB)^\circ = (\measuredangle ABC)^\circ\end{aligned}$$

eli $\measuredangle CAD \cong \measuredangle ABC$. Koska myös $\measuredangle CDA \cong \measuredangle CAB$ ja $\measuredangle ACD = \measuredangle ACB$, niin $\triangle DCA \sim \triangle ACB$. Tällöin lauseen 3.1.10 nojalla $\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ ja $\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$, mistä saadaan

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{DB}\,\overline{CB} + \overline{DC}\,\overline{CB} = \overline{CB}\big(\overline{DB} + \overline{DC}\big).$$

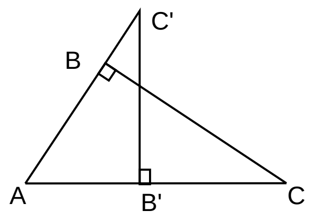
Koska $C * D * B$, niin $\overline{DB} + \overline{DC} = \overline{CB}$, ja väite seuraa. $\square$

Määritelmä 3.3. Euklidisessa geometriassa voidaan määritellä kulman *sini* ja *kosini* seuraavasti. Sanotaan, että kulma $\measuredangle A$ on *terävä*, jos $(\measuredangle A)^\circ < 90$ ja että kulma $\measuredangle A$ on *tylppä*, jos $(\measuredangle A)^\circ > 90$. Olkoon ensin $\measuredangle A$ terävä. Valitaan piste $B \neq A$ kulman A toiselta kyljeltä. Olkoon ℓ pisteen B kautta kulkeva suoran $\overleftrightarrow{AB}$ normaali.

Tällöin ℓ leikkaa myös kulman $\measuredangle A$ toista kylkeä. (*Perustelu:* Olkoon toinen kylki $\overrightarrow{AP}$. Jos ℓ ei leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{AP}$, niin $\ell \parallel \overleftrightarrow{AP}$ ja lauseen 3.1.5 nojalla $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AP}$, ja tällöin $\measuredangle A = \measuredangle BAP$ on suora kulma vastoin oletusta. Siis suorat ℓ ja $\overleftrightarrow{AP}$ leikkaavat toisensa jossakin pisteessä R. Pitää osoittaa, että $R \in \overrightarrow{AP}$. Jos näin ei olisi, niin $R * A * P$. Tällöin $\measuredangle RAB$ on kulman $\measuredangle PAB$ eli kulman $\measuredangle A$ täydennyskulma. Koska $\measuredangle A$ on terävä, niin $\measuredangle RAB$ siis on tylppä eli $(\measuredangle RAB)^\circ > 90$. Koska $\measuredangle RBA$ on suora, kolmion $\triangle RAB$ defekti olisi aidosti negatiivinen vastoin Saccherin ja Legendre'in lausetta. ℓ leikkaa siis tosiaan myös kulman $\measuredangle A$ toista kylkeä.) Olkoon C suorien ℓ ja $\overleftrightarrow{AP}$ leikkauspiste. Ei voi olla $C = A$, koska $\ell \neq \overleftrightarrow{AB}$, joten AC on jana. Tällöin voidaan asettaa

$$\sin \measuredangle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad \cos \measuredangle A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \in \mathbb{R}.$$

Huomautus 34. Määritelmässä valittiin B aika mielivaltaisesti. Mitään muita mielivaltaisia valintoja ei tehty, ℓ ja C ovat B:n valinnan jälkeen yksikäsitteisiä. Voisi olla, että toisenlainen B:n valinta tuottaisi toisenlaisen sinin ja kosinin arvon, jolloin määritelmässä ei olisi järkeä. Osoitetaan, että B:n valinta ei vaikuta asiaan.



Kuva 132: Kosinin ja sinin yksikäsitteisyys

Jos B:n sijasta valitaan jokin toinen piste B' kulman $\measuredangle A$ jommalta kummalta kyljeltä, niin olkoon C' vastaavasti piste $\measuredangle A$:n toiselta kyljeltä niin, että $\measuredangle AB'C'$ on suora. Tällöin kulmasummalauseen 3.1.7. mukaan $\measuredangle ACB \cong \measuredangle AC'B'$ ja siis lauseen 3.1.10 nojalla

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \quad \text{ja} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}},$$

ts. sinin ja kosinin määrittelevät lausekkeet pysyvät samoina, käytettiinpä määritelmässä sitten pistettä B tai B'.

Nyt on määritelty terävän kulman sini ja kosini. Jos $\measuredangle A$ on tylppä, niin sen täydennyskulma on terävä. Merkitään täydennyskulmaa $(\measuredangle A)'$:lla ja asetetaan

$$\sin \measuredangle A = \sin(\measuredangle A)' \quad \text{ja} \quad \cos \measuredangle A = -\cos(\measuredangle A)'.$$

Lisäksi, jos $\measuredangle A$ on suora kulma, niin sovitaan, että $\sin \measuredangle A = 1$ ja $\cos \measuredangle A = 0$.

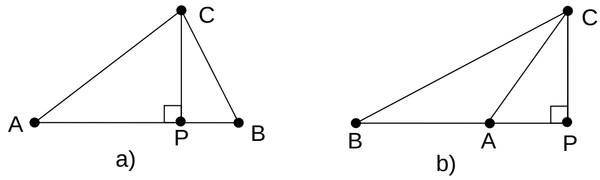
LAUSE 3.1.14 (Sinilause). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin pätee*

$$\frac{\sin \measuredangle A}{\sin \measuredangle B} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

Todistus. Jos $\measuredangle A$ tai $\measuredangle B$ on suora, niin väite seuraa suoraan sinin määritelmästä. Voidaan siis olettaa, että kulmat $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ eivät ole suoria. Saccherin ja Legenrdre'in lauseen nojalla ne molemmat eivät voi olla tylppiä, joten ainakin toinen niistä on terävä. Merkintöjä tarvittaessa muuttamalla voidaan olettaa, että $\measuredangle B$ on terävä. Olkoon ℓ pisteen C kautta kulkeva $\overleftrightarrow{AB}$:n normaali ja P sen ja $\overleftrightarrow{AB}$:n leikkauspiste.

Koska $\measuredangle A$ ei ole suora, niin ei voi olla $P = A$; samoin ei voi olla $P = B$. Toisaalta, koska $\measuredangle CBA$ on terävä, niin ei voi olla $P * B * A$, sillä jos näin olisi, niin $\measuredangle PC$ olisi terävän kulman $\measuredangle CBA$ täydennyskulmana tylppä ja koska $\measuredangle CPB$ on suora, kolmion $\triangle CPB$ defekti olisi aidosti negatiivinen, mikä on mahdotonta.

Jäljelle jää vain kaksi mahdollisuutta. a) $B * P * A$ ja b) $B * A * P$.



Kuva 133: Sinilauseen todistus

Koska $\measuredangle CPA$ on suora, on molemmissa tapauksissa Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla $\measuredangle CAP$ terävä.

Tapaus a): Jos $B * P * A$, niin $\measuredangle BAC = \measuredangle PAC$ ja $\measuredangle ABC = \measuredangle PBC$ ja sinin määritelmästä saadaan

$$\frac{\sin \measuredangle A}{\sin \measuredangle B} = \frac{\sin \measuredangle BAC}{\sin \measuredangle ABC} = \frac{\sin \measuredangle PAC}{\sin \measuredangle PBC} = \frac{\overline{PC}\,/\,\overline{AC}}{\overline{PC}\,/\,\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

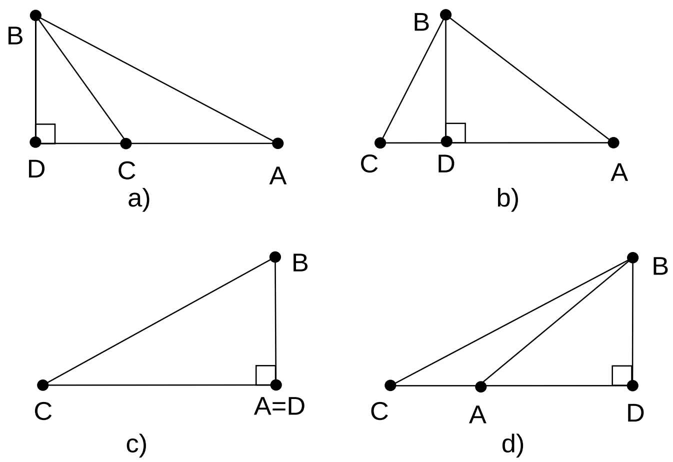
Tapaus b): Jos $B * A * P$, niin $\measuredangle ABC = \measuredangle PBC$ ja $\measuredangle BAC$ on kulman $\measuredangle PAC$ täydennyskulma, jolloin sinin määritelmän mukaan $\sin \measuredangle BAC = \sin \measuredangle PAC$ ja nyt täsmälleen sama lasku kuin a) -kohdassa antaa väitteen. □

LAUSE 3.1.15 (Kosinilause). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin pätee*

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\,\overline{AC}\cos \measuredangle C.$$

Todistus. Jos $\measuredangle C$ on suora, niin väite seuraa kosinin määritelmästä ja Pythagoraan lauseesta. Voidaan siis olettaa, että $\measuredangle C$ ei ole suora. Olkoon ℓ pisteen B kautta kulkeva $\overleftrightarrow{CA}$:n normaali ja D suorien ℓ ja $\overleftrightarrow{CA}$ leikkauspiste. Koska $\measuredangle C$ ei ole suora kulma, niin $C \neq D$. Tällöin on neljä mahdollisuutta

a) $D * C * A$
b) $C * D * A$
c) $D = A$
d) $C * A * D$



KUVA 134: KOSINILAUSEEN TODISTUS

Tapaus a): Tässä $\measuredangle BCD$ on $\measuredangle BCA$:n täydennyskulma. Koska $\measuredangle BDC$ on suora, niin $\measuredangle BCD$ on Saccherin ja Legendre'in lauseen nojalla terävä ja $\measuredangle BCA$ tylppä. Kosinin määritelmän mukaan $\cos\measuredangle C = \cos\measuredangle BCA = -\cos\measuredangle BCD = -\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$. Koska $D * C * A$, niin $\overline{AD} = \overline{DC} + \overline{CA}$. Pythagoraan lauseen nojalla $\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2$ ja $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$. Tällöin

$$\begin{aligned}&\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\,\overline{AC}\cos\measuredangle C = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AC}\ \overline{DC}\\ &= \overline{BC}^2 + (\overline{AC} + \overline{DC})^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2.\end{aligned}$$

Tapaus b): Tässä $\measuredangle C = \measuredangle DCB$, joten $\cos\measuredangle C = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$, $\overline{AC} - \overline{DC} = \overline{DA}$, $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2$ ja $\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2$. Yhdistämällä nämä saadaan haluttu tulos:

$$\begin{aligned}&\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\ \overline{AC}\cos\measuredangle C = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}\ \overline{DC}\\ &= \overline{BC}^2 + (\overline{AC} - \overline{DC})^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AB}^2.\end{aligned}$$

Tapaus c): Tässä $\cos\measuredangle C = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, ja $\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$, joten

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\ \overline{AC}\cos\measuredangle C = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2.$$

Tapaus d): Tässä $\measuredangle C = \measuredangle BCD$, joten $\cos\measuredangle C = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$, $\overline{AC} - \overline{DC} = -\overline{AD}$, $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2$ ja $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$. Saadaan taas:

$$\begin{aligned}&\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\ \overline{AC}\cos\measuredangle C = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}\ \overline{AD}\\ &= \overline{BC}^2 + (\overline{AC} - \overline{DC})^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + (-\overline{AD})^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2.\end{aligned}$$

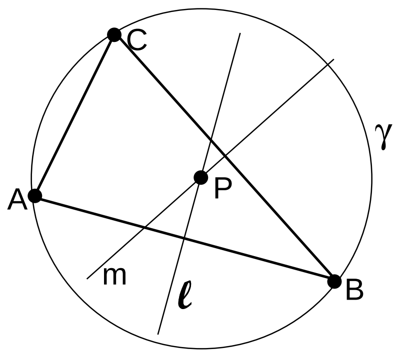
$\square$

Kolmioon liittyvät perusympyrät.

LAUSE 3.1.16. *Olkoon ABC kolmio. On olemassa täsmälleen yksi ympyrä γ, joka kulkee A:n, B:n ja C:n kautta.*

Huom: Lauseen 3.1.16 ympyrää γ sanotaan kolmion $\triangle ABC$ *ympäri piirretyksi ympyräksi.*

Todistus. Olkoon ℓ janan AB ja m janan BC keskinormaali. Tällöin ℓ ja m leikkaavat toisensa, sillä jos olisi $\ell \cong m$, niin lauseen 3.1.6 nojalla olisi joko $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$ tai $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Kumpikaan tapaus ei ole mahdollinen, koska $\triangle ABC$ on kolmio. Olkoon P keskinormaalien ℓ ja m leikkauspiste, jonka juuri totesimme olevan olemassa. Lauseen 2.6.9 mukaan $\overline{AP} = \overline{BP}$ ja $\overline{BP} = \overline{BC}$, joten p-keskinen ja $\overline{AP}$-säteinen ympyrä γ on haluttu ympyrä.



Kuva 135: Kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretty ympyrä

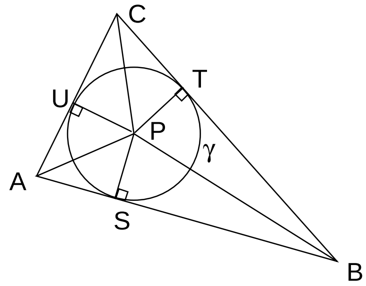
Halutun ympyrän yksikäsitteisyys seuraa välittömästi lauseesta 2.6.11. □

LAUSE 3.1.17. *Kolmion kaikki kolme sivun keskinormaalia leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Lauseen 2.3.9 nojalla kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on jokaisella keskinormaalilla. □

LAUSE 3.1.18. *Kolmion kaikki kolme kulman puolittajaa leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Olkoon $\triangle ABC$ annettu kolmio. Puomilauseen 3.2.11 nojalla kulman $\measuredangle CAB$ puolittaja leikkaa sivua CB jossain pisteessä D. $\triangle ABD$ on myös kolmio ja $\measuredangle CBA$:n puolittaja on $\measuredangle DBA$:n puolittaja. Taas puomilauseen nojalla kyseinen puolittaja leikkaa janaa AD ja siten puolittajaa $\overrightarrow{AD}$. Olkoon P kyseinen leikkauspiste. P ei voi olla suorilla $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ eikä $\overleftrightarrow{AC}$. Olkoon S pisteen P kautta kulkevan $\overleftrightarrow{AB}$:n normaalin ja $\overleftrightarrow{AB}$:n leikkauspiste.



Kuva 136: Kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretty ympyrä

Tällöin $S \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$, sillä muutoin olisi

$$90 = (\measuredangle PSB)^\circ \overset{2.4.19}{\leq} (\measuredangle PAB)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle CAB)^\circ \overset{2.5.18}{<} \tfrac{1}{2}180 = 90,$$

mikä on mahdotonta. Vastaavasti todetaan, että $S \in \overrightarrow{BA} \setminus \{B\}$.

Olkoon T pisteen P kautta kulkevan $\overleftrightarrow{BC}$:n normaalin ja $\overleftrightarrow{BC}$:n leikkauspiste. Kuten yllä, $T \in \overrightarrow{BC} \setminus \{B\}$. Olkoon vielä U pisteen P kautta kulkevan $\overleftrightarrow{AC}$:n normaalin ja $\overleftrightarrow{AC}$:n leikkauspiste, jolloin $U \in \overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$.

Nyt, koska $U \in \overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$ ja $S \in \overrightarrow{BA} \setminus \{B\}$ ja $\overrightarrow{AP}$ on kulman $\measuredangle CAB$ puolittaja, pätee $\measuredangle UAP \cong \measuredangle SAP$. Koska $\measuredangle U$ ja $\measuredangle S$ ovat suoria kulmia, niin lauseen 3.1.7. nojalla $\measuredangle UPA \cong \measuredangle SPA$. Siten $\triangle APU \sim \triangle APS$. Koska näissä on yhteinen sivu AP, on lauseen 3.1.10 mukaan myös $UP \cong SP$. Vastaavasti nähdään, että $\triangle BPS \sim \triangle BPT$, josta edelleen $SP \cong TP$. Kaikkiaan siis $\overline{SP} = \overline{TP} = \overline{UP}$.

Olkoon γ ympyrä, jonka keskipiste on P ja säde $\overline{SP}$. Lauseen 2.6.8 nojalla $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ ja $\overleftrightarrow{AC}$ ovat γ:n tangentteja.

Lauseen 2.6.7 nojalla voidaan edelleen nähdä, että $PS\overleftrightarrow{AC}$. Koska $S \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$, on myös $BC\overleftrightarrow{AC}$ ja siten $PB\overleftrightarrow{AC}$. Vastaavasti nähdään, että $PA\overleftrightarrow{BC}$.

Siten P on kulman $\measuredangle ACB$ sisällä.

Tässä tilanteessa on oltava $T \in \overrightarrow{CB} \setminus \{C\}$. Ei nimittäin ainakaan voi olla $T * C * B$, sillä jos näin kuitenkin olisi, niin olisi $T\overleftrightarrow{AC}B$, ja koska $PT\overleftrightarrow{AC}$, mikä seuraa lauseesta 2.6.7, olisi myös $P\overleftrightarrow{AC}B$, mikä ei ole mahdollista, koska $PB\overleftrightarrow{AC}$, kuten yllä nähtiin. Ei myöskään voi olla $T = C$, sillä jos näin olisi, niin γ:n tangentti $\overleftrightarrow{AC}$ leikkaisi γ:aa pisteissä U ja C, jolloin olisi $U = C = T$ ja edelleen $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$ (Lauseen 2.6.8:n jälkeinen huomautus 27), mikä on mahdotonta, koska $\triangle ABC$ on kolmio.

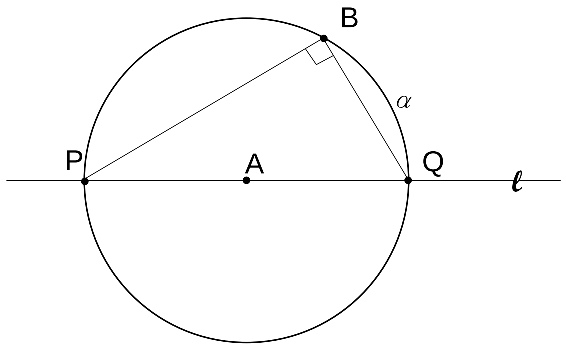
Vastaavasti nähdään, että $U \in \overrightarrow{CA} \setminus \{C\}$. Siten $\measuredangle TCP = \measuredangle BCP$ ja $\measuredangle UCP = \measuredangle ACP$. Nyt kolmioissa $\triangle PCU$ ja $\triangle PCT$ on $\measuredangle U \cong \measuredangle T$ (suora kulma) ja $PT \cong PU$ (γ:n säde) ja PC yhteinen, joten lauseen 2.4.21 nojalla $\triangle PCU \cong \triangle PCT$ ja erityisesti $\measuredangle UCP \cong \measuredangle TCF$ eli $\measuredangle ACP \cong \measuredangle BCP$. Koska, kuten todettiin, P on kulman $\measuredangle C$ sisällä, niin $\overrightarrow{CP}$ on kulman $\measuredangle C$ puolittaja. Siten P sisältyy jokaiseen puolittajaan. $\square$

Huom: Lauseen 3.1.18 todistuksessa esiintyvää ympyrää γ sanotaan *kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretyksi ympyräksi.*

Kehäkulmat.

Seuraava lause sanoo, että ”ympyrän halkaisijaa vastaava kehäkulma on suora kulma.

LAUSE 3.1.20 (Thales). *Olkoon α ympyrä, keskipiste A, ja ℓ pisteen A kautta kulkeva suora, joka leikkaa α:aa pisteissä P ja Q. Olkoon lisäksi $B \in \alpha \setminus \{P, Q\}$. Tällöin kulma $\measuredangle PBQ$ on suora.*



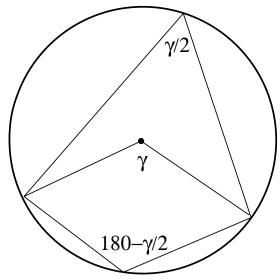
Kuva 137: Thaleen lause

Todistus. Lauseen 2.4.1 nojalla $\measuredangle APB \cong \measuredangle ABP$ ja $\measuredangle AQB \cong \measuredangle ABQ$. Merkitään $\beta = (\measuredangle APB)^\circ$ ja $\gamma = (\measuredangle AQB)^\circ$. Koska $P{*}A{*}Q$, niin $\measuredangle APB = \measuredangle QPB$ ja $\measuredangle AQB = \measuredangle PQB$. Koska kolmion $\triangle PQB$ astemittojen summa on 180, on $(\measuredangle PQB)^\circ = 180 - (\measuredangle QPB)^\circ - (\measuredangle PQB)^\circ = 180 - \beta - \gamma$. Koska $P * A * Q$, niin $\overrightarrow{BA}$ on $\measuredangle PBQ$:n sisällä, jolloin lauseen 2.2.15 nojalla $(\measuredangle PBQ)^\circ = (\measuredangle ABP)^\circ + (\measuredangle ABQ)^\circ$. Koska siis $\measuredangle ABP \cong \measuredangle APB$ ja $\measuredangle ABQ \cong \measuredangle APB$, niin saadaan

$$(*) \qquad (\measuredangle PBQ)^\circ = \beta + \gamma.$$

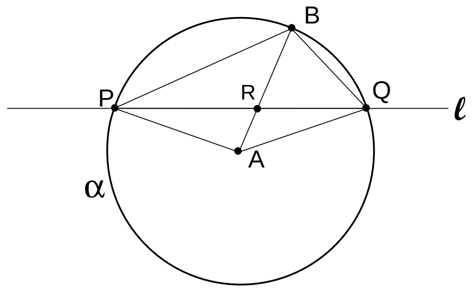
Tällöin $\beta + \gamma = 180 - \beta - \gamma$, josta saadaan $\beta + \gamma = 90$, mikä $(*)$:n kanssa antaa väitteen. □

”Kehäkulmalause” on edellisen yleistys. Sen mukaan ”ympyrän keskuskulmaa γ vastaava kehäkulma on $\frac{1}{2}\gamma$ ja vastakkainen kehäkulma $180 - \frac{1}{2}\gamma$. Tämä siis riippumatta siitä, missä kohtaa asianomaista kaarta kehäkulman kärki sijaitsee.



Kuva 138: Kehäkulmalauseen väite tapauksessa $A\ell B$

LAUSE 3.1.21. (Kehäkulmalause). *Olkoon α ympyrä, keskipiste A ja ℓ suora, joka ei kulje A:n kautta ja leikkaa α:n pisteissä P ja Q. Olkoon lisäksi $B \in \alpha \setminus \{P, Q\}$. Tällöin, jos a) $AB\ell$, niin $(\measuredangle PBQ)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$ ja jos b) $A\ell B$, niin $(\measuredangle PBQ)^\circ = 180 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$.*



Kuva 139: Kehäkulmalause tapauksessa $A\ell B$

Todistus. Käsittelemme ensin tapauksen b) eli $A\ell B$, jolloin jana AB leikkaa ℓ:ää. Olkoon leikkauspiste R. Tällöin R on α:n sisällä ja siten lauseen 2.6.6 nojalla on oltava $P * R * Q$. Koska myös $A * R * B$, niin lauseen 2.5.15 mukaan

$$(\measuredangle PBQ)^\circ = (\measuredangle PBA)^\circ + (\measuredangle ABQ)^\circ.$$

Lauseen 2.4.1 mukaan $(\measuredangle PQA)^\circ = (\measuredangle QPA)^\circ$, $(\measuredangle BPA)^\circ = (\measuredangle PBA)^\circ$ ja $(\measuredangle BQA)^\circ = (\measuredangle ABQ)^\circ$, jolloin 2.5.15:n mukaan $(\measuredangle QPB)^\circ = (\measuredangle BPA)^\circ - (\measuredangle QPA)^\circ$ ja $(\measuredangle PQB)^\circ = (\measuredangle BQA)^\circ - (\measuredangle QPA)^\circ$. Kolmion $\triangle PQB$ kulmien astelukujen summa on 180, joten

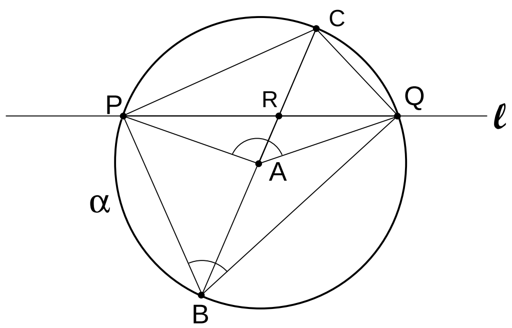
$$((\measuredangle PBA)^\circ - (\measuredangle PQA)^\circ) + \big((\measuredangle BQA)^\circ - (\measuredangle PQA)^\circ\big) + \big((\measuredangle BQA)^\circ - (\measuredangle QPA)^\circ\big) = 180,$$

josta saadaan

$$(*) \qquad (\measuredangle BPA)^\circ + (\measuredangle BQA)^\circ = 90 + (\measuredangle PQA)^\circ.$$

Toisaalta myös kolmion $\triangle PQA$ astemittojen summa on 180, joten $(\measuredangle PAQ)^\circ + 2(\measuredangle PQA)^\circ = 180$, eli $(\measuredangle PQA)^\circ = 90 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$. Sijoittamalla tämä kaavaan $(*)$ saadaan $(\measuredangle PBA)^\circ + (\measuredangle ABQ)^\circ = 90 + (90 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ) = 180 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$. Tapauksessa b) väite siis pätee.

Tapaus a) on hieman mutkikkaampi. Oletuksen $AB\ell$ voimassa ollessa on nimittäin kolme mahdollisuutta: i) A on kulman $\measuredangle PBQ$ sisällä, ii) sen kyljellä tai iii) sen ulkopuolella. Käsittelemme tapaukset erikseen.

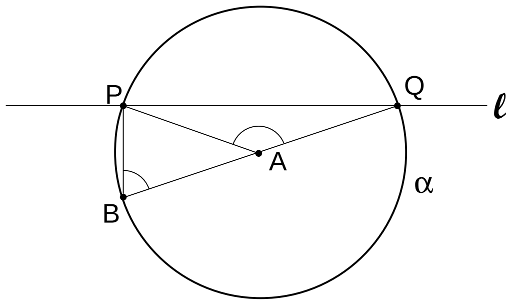


Kuva 140: Kehäkulmalause; $AB\ell$ ja A kulman $\measuredangle PBQ$ sisällä

Tapauksessa i) eli kun A on kulman $\measuredangle PBQ$ sisällä, valitaan piste C siten, että $C*A*B$ ja $CA \cong AB$, jolloin $C \in \alpha$. Koska A on kulman $\measuredangle PBQ$ sisällä, puolisuora $\overrightarrow{AC}$ eli $\overrightarrow{AB}$ leikkaa janaa PQ. Olkoon leikkauspiste R. Koska R on ympyrän α sisällä, on $B*R*C$. Toisaalta $AB\ell$, joten ei voi olla $B*R*A$, jolloin on oltava $B*A*R$ ja siten $A*R*C$. Näin $A\ell C$ ja voidaan soveltaa edellä todistettua b) -kohtaa, jonka mukaan $(\measuredangle PCQ)^\circ = 180 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$. Koska $\overleftrightarrow{BC}$ kulkee A:n kautta, ovat kulmat $\measuredangle CPB$ ja $\measuredangle CQB$ lauseen 3.1.20 perusteella suoria, joten $(\measuredangle CPB)^\circ = (\measuredangle CQB)^\circ = 90$. Kolmioiden $\triangle PCB$ ja $\triangle PQB$ astemittojen summa on kumpikin 180, joten saadaan $(\measuredangle PCB)^\circ + (\measuredangle PBC)^\circ = 90$ ja $(\measuredangle QCB)^\circ + (\measuredangle QBC)^\circ = 90$. Koska $P*R*Q$, niin $(\measuredangle PCB)^\circ + (\measuredangle BCQ)^\circ = (\measuredangle PCQ)^\circ$ ja $(\measuredangle PBC)^\circ + (\measuredangle CBQ)^\circ = (\measuredangle PBQ)^\circ$. Näistä yhdistämällä saadaan

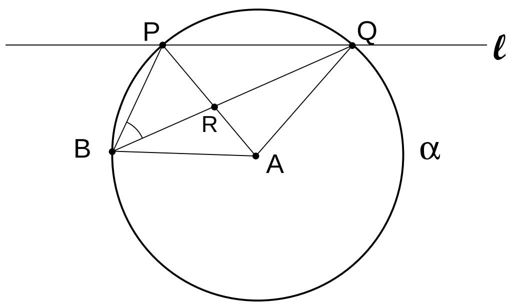
$$\begin{aligned}(\measuredangle PBQ)^\circ &= (\measuredangle PBC)^\circ + (\measuredangle CBQ)^\circ = 90 - (\measuredangle PCB)^\circ + 90 - (\measuredangle QCB)^\circ \\ &= 180 - (\measuredangle PCQ)^\circ = 180 - (180 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ) = \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ\end{aligned}$$

kuten pitääkin.



KUVA 141: KEHÄKULMALAUSE; $AB\ell$ JA A KULMAN $\measuredangle PBQ$ KYLJELLÄ

Tapauksessa ii), jossa A on kulman $\measuredangle PBQ$ kyljellä, voidaan merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla ($P \leftrightarrow Q$) olettaa, että A on kyljellä $\overrightarrow{BQ}$, jolloin on oltava $B*A*Q$. Lauseen 2.4.1 nojalla $(\measuredangle BPA)^\circ = (\measuredangle PBA)^\circ$ ja $(\measuredangle AQP)^\circ = (\measuredangle APQ)^\circ$. Koska $B*A*Q$, niin $(\measuredangle BPQ)^\circ = (\measuredangle BPA)^\circ + (\measuredangle APQ)^\circ$. Toisaalta Thaleen lauseen 3.1.20 nojalla $\measuredangle BPQ$ on suora, joten $(\measuredangle BPA)^\circ + (\measuredangle APQ)^\circ = 90$. Koska kolmion $\triangle APQ$ astemittojen summa on 180, niin $(\measuredangle PAQ)^\circ = 180 - 2(\measuredangle APQ)^\circ$ ja siis $(\measuredangle APQ)^\circ = 90 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$. Näin ollen $(\measuredangle PBQ)^\circ = (\measuredangle PBA)^\circ = 90 - (\measuredangle AQP)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$ tässäkin tapauksessa.



KUVA 142: KEHÄKULMALAUSE; $AB\ell$ JA A KULMAN $\measuredangle PBQ$ ULKOPUOLELLA

Tapauksessa iii), jossa A on kulman $\measuredangle PBQ$ ulkopuolella, on joko $\overleftrightarrow{ABQP}$ tai $\overleftrightarrow{ABPQ}$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $\overleftrightarrow{ABQP}$, jolloin suora $\overleftrightarrow{BQ}$ leikkaa janaa AP pistessä R, joka on ympyrän α sisäpuolella ja silloin on oltava $B * R * Q$. Lauseen 2.4.1 mukaan $(\measuredangle PBA)^\circ = (\measuredangle BPA)^\circ$ ja $(\measuredangle QBA)^\circ = (\measuredangle BQA)^\circ$. Koska $B*R*Q$ ja $A*R*P$, niin $(\measuredangle PBQ)^\circ = (\measuredangle PBR)^\circ = (\measuredangle BPA)^\circ - (\measuredangle BQA)^\circ$. Kolmiosta $\triangle ABQ$ saadaan $(\measuredangle BAQ)^\circ + 2(\measuredangle BQA)^\circ = 180$ ja kolmiosta $\triangle ABP$ saadaan $(\measuredangle BAP)^\circ + 2(\measuredangle BPA)^\circ = 180$. Koska $B * R * Q$ niin $(\measuredangle BAQ)^\circ = (\measuredangle BAP)^\circ + (\measuredangle PAQ)^\circ$. Näistä yhtälöistä saadaan

$$\begin{aligned}(\measuredangle PBQ)^\circ &= (\measuredangle BPA)^\circ - (\measuredangle BQA)^\circ = \frac{1}{2}(180 - (\measuredangle BAP)^\circ) - \frac{1}{2}(180 - (\measuredangle BAQ)^\circ)\\ &= \frac{1}{2}((\measuredangle BAQ)^\circ - (\measuredangle BAP)^\circ) = \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ.\end{aligned}$$

□

Sinilauseen 3.1.14. nojalla nähdään, että kolmion sivun pituuden suhde vastakkaisen kulman siniin on kaikissa kolmessa kulmassa sama:

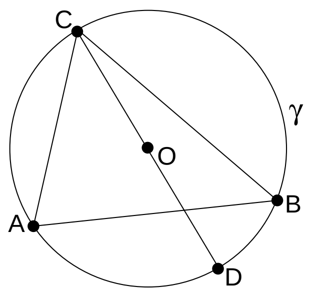
$$\frac{\overline{BC}}{\sin \measuredangle A} = \frac{\overline{CA}}{\sin \measuredangle B} = \frac{\overline{AB}}{\sin \measuredangle C}.$$

Tämä vakio on läheisessä yhteydessä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säteeseen. Pätee näet:

LAUSE 3.1.22. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja r sen ympäri piirretyn ympyrän säde. Tällöin*

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \measuredangle A} = 2r.$$

Todistus. Olkoon O kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretyn ympyrän γ keskipiste. Valitaan D siten, että $D * O * C$ ja $\overline{DO} = r$, jolloin $D \in \gamma$ ja $D \neq C$.

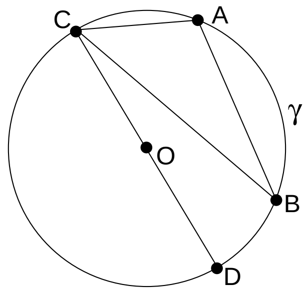


KUVA 143: YMPÄRI PIIRRETYN YMPYRÄN SÄDE, TAPAUS $\overleftrightarrow{ADBC}$

Jos nyt $D = B$, niin Thaleen lauseen 3.1.20 nojalla $\measuredangle A$ on suora ja siten $\sin \measuredangle A = 1$. Toisaalta $\overline{BC} = \overline{DC} = \overline{DO} + \overline{OC} = 2r$ ja siten väite pätee. Voidaan siis olettaa, että $D \neq B$, joten joko $\overleftrightarrow{ADBC}$ (kuten kuvassa) tai sitten $\overleftrightarrow{ABCD}$. Kummassakin tapauksessa $\overleftrightarrow{ODBC}$, joten kehäkulmalauseen 3.1.21 a) -kohdan mukaan

$$(*) \qquad (\measuredangle BDC)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle BOC)^\circ.$$

Tapauksessa $AD\overleftrightarrow{BC}$ on myös $AO\overleftrightarrow{BC}$, joten taas lauseen 3.1.21 a) mukaan $(\measuredangle A)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle BOC)^\circ = (\measuredangle BDC)^\circ$ ja siten $\measuredangle A \cong \measuredangle BDC$ ja erityisesti $\sin \measuredangle A = \sin \measuredangle BDC$. Tapauksessa $A\overleftrightarrow{BC}D$ on $A\overleftrightarrow{BC}O$, joten kehäkulmalauseen 3.1.21 b) -kohdan mukaan $(\measuredangle A)^\circ = 180 - \frac{1}{2}(\measuredangle BOC)^\circ \overset{(*)}{=} 180 - (\measuredangle BDC)^\circ$. Sinin määritelmän mukaan siis $\sin \measuredangle A = \sin \measuredangle BDC$.



Kuva 144: Ympäri piirretyn ympyrän säde, tapaus $A\overleftrightarrow{BC}D$

Molemmissa tapauksissa on siis $\sin \measuredangle A = \sin \measuredangle BDC$. Nyt DC on γ:n halkaisija, joten Thaleen lauseen 3.1.20 mukaan kulma $\measuredangle DBC$ on suora ja siten

$$\sin \measuredangle BDC = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

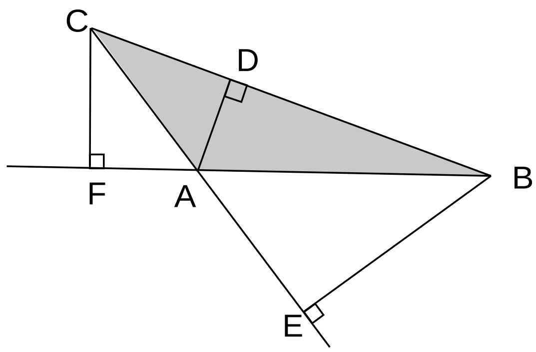
ja edelleen

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \measuredangle A} = \frac{\overline{BC}}{\sin \measuredangle BDC} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}/\,\overline{DC}} = \overline{DC} = \overline{DB} + \overline{OC} = 2r.$$

□

Kolmion ala.

Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Olkoon D pisteen A kautta kulkevan $\overleftrightarrow{BC}$:n normaalin ja $\overleftrightarrow{BC}$:n leikkauspiste Jana AD on kolmion $\triangle ABC$ *korkeusjana*. Vastaavasti määritellään korkeusjanat BE ja CF (ks. kuva).



Kuva 145: Korkeusjanat

Kolmion $\triangle ABC$ *pinta-ala*, jota merkitään ala(ABC), määritellään asettamalla

$$\text{ala}(ABC) = \tfrac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{AD}.$$

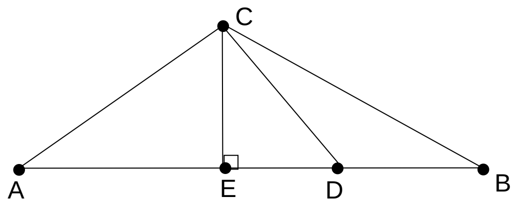
Huom. Ala on siis asettamamme määritelmän mukaan ”puoli kertaa kanta kertaa korkeus”. On tarkastettava, että määritelmä ei riipu siitä, mikä sivu on valittu ”kannaksi”, ts. tulee olla

$$(*) \qquad \tfrac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{AD} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{CF} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}\,\overline{BE}.$$

Tämä nähdään seuraavasti: Jos $B \neq D$, niin $\triangle ADB$ on kolmio, vieläpä suorakulmainen, ja $\sin\measuredangle B = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ joten $\overline{AD} = \overline{AB}\sin\measuredangle B$. Jos myös $B \neq F$, niin $\sin\measuredangle B = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}$ eli $\overline{CF} = \overline{BC}\sin\measuredangle B$. Siten $\frac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{AB}\sin\measuredangle B = \frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{CF}$. Jos $B = D$ tai $B = F$, niin $B = D = F$ ja väite seuraa suoraan. Vastaavasti todistetaan $(*)$:n jälkimmäinen yhtälö.

Huom. Kolmion pinta-alalla on myös seuraava tarkoitusperiämme varten oleellinen additiivisuusominaisuus: Jos $\triangle ABC$ on kolmio ja $A * D * B$, niin

$$\text{ala}(ABC) = \text{ala}(ADC) + \text{ala}(DBC).$$



Kuva 146: Alan additiivisuus

Tämä seuraa suoraan alan määritelmästä, sillä kaikilla kolmioilla on tässä yhteinen korkeusjana CE.

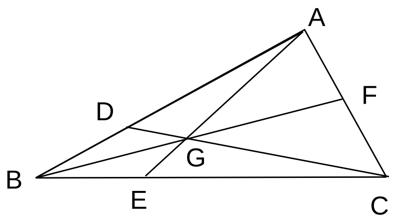
Cevan lause.

Giovanni Ceva[18] todisti vuonna 1678 seuraavan hyvin käyttökelpoisen lauseen:

LAUSE 3.1.23 (Ceva). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $A*D*B$, $B*E*C$ ja $C*F*A$. Jos janat AE, BF ja CD kulkevat saman pisteen kautta, niin*

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1.$$

[18] Giovanni Ceva 1647–1734. Italia



KUVA 147: CEVAN LAUSE

Todistus. Olkoon G janojen yhteinen leikkauspiste. On helppoa tarkastaa, että $G \neq A$. Koska lisäksi $B * E * C$ ja G on janalla AE, niin G on kulman $\measuredangle CAB = \measuredangle CAD$ sisällä ja siten $C * G * D$. Kolmion pinta-alan additiivisuuden nojalla $\text{ala}(ADC) = \text{ala}(ADG) + \text{ala}(AGC)$ eli

$$(*) \qquad \text{ala}(AGC) = \text{ala}(ADC) - \text{ala}(ADG).$$

Vastaavasti

$$(**) \qquad \text{ala}(CGB) = \text{ala}(BDC) - \text{ala}(BDG).$$

Kolmioilla $\triangle ADC$ ja $\triangle BDC$ on sama $\overleftrightarrow{AB}$:n vastainen korkeusjana, olkoon sen pituus h. Tällöin

$$(***) \qquad \frac{\text{ala}(ADC)}{\text{ala}(BDC)} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AD} \cdot h}{\frac{1}{2}\overline{BD} \cdot h} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \text{ ja vastaavasti}$$

$$(****) \qquad \frac{\text{ala}(ADG)}{\text{ala}(BDG)} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Yksinkertainen lasku osoittaa, että jos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = x$, niin myös $\frac{a-c}{b-d} = x$. Siis kaavojen $(*)$ - $(****)$ nojalla

$$\frac{\text{ala}(AGC)}{\text{ala}(CGB)} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Vastaava päättely osoittaa, että

$$\frac{\text{ala}(CGB)}{\text{ala}(BGA)} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$$

ja

$$\frac{\text{ala}(BGA)}{\text{ala}(AGC)} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}.$$

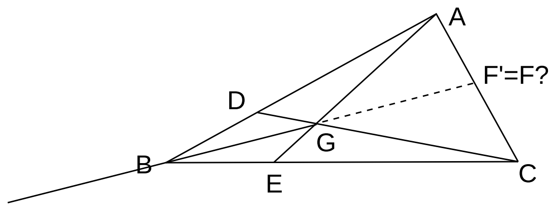
Siten

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\text{ala}(AGC)}{\text{ala}(CGB)} \cdot \frac{\text{ala}(CGB)}{\text{ala}(BGA)} \cdot \frac{\text{ala}(BGA)}{\text{ala}(AGC)} = 1.$$

□

Cevan lauseelle pätee myös käänteinen tulos:

LAUSE 3.1.24. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $A * D * B$, $B * E * C$ ja $C * F * A$. Jos $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = 1$, niin kaikki kolme janaa AE, BF ja CD kulkevat saman pisteen kautta.*

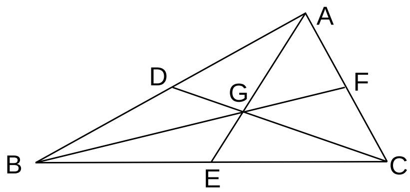


KUVA 148: CEVAN LAUSEEN KÄÄNTÄMINEN

Todistus. Puomilauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{AE}$ leikkaa janaa CD. Olkoon leikkauspiste G, jolloin siis $C * G * D$. Koska $GD\overleftrightarrow{BC}$ ja $AD\overleftrightarrow{BC}$ niin $AG\overleftrightarrow{BC}$ jolloin on oltava $A * G * E$ eli G on myös janalla AE. Puomilauseen nojalla $\overrightarrow{BG}$ leikkaa janaa AC. Olkoon leikkauspiste F'. Koska $EB\overleftrightarrow{AC}$ ja ja $EG\overleftrightarrow{AC}$, niin $BG\overleftrightarrow{AC}$ ja siten G on janalla BF'. Nyt Cevan lause soveltuu ja saadaan $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CF'}}{\overline{AF'}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = 1$. Käyttäen oletusta $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = 1$ saadaan tästä $\frac{\overline{CF'}}{\overline{AF'}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$ eli $\frac{\overline{CF'}}{\overline{CA} - \overline{CF'}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CA} - \overline{CF}}$, josta edelleen $\overline{CA} \cdot \overline{CF'} = \overline{CA} \cdot \overline{CF}$ eli $\overline{CF'} = \overline{CF}$. Koska F ja F' ovat janalla CA, niin välttämättä tällöin $F = F'$. Koska G on janalla BF', niin se on siis janalla BF ja siten G on tutkittavien kolmen janan leikkauspiste. □

Esimerkiksi kolmion *keskijanat* s.o. sivujen keskipisteitä ja vastakkaisia kärkiä yhdistävät janat leikkaavat toisensa Cevan lauseen mukaan samassa pisteessä, kolmion ns. *painopisteessä.*

LAUSE 3.1.25. *Kolmion keskijanat jakavat kolmion kuuteen pienempään kolmioon, joilla kaikilla on sama pinta-ala.*
Todistus.



KUVA 149: KESKIJANAT

Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, D sivun AB, E sivun BC ja F sivun CA keskipiste sekä G keskijanojen AE, BF ja CD yhteinen leikkauspiste, joka Cevan lauseen mukaan on olemassa. Väite on siis, että

$$\text{ala}(ADG) = \text{ala}(BDG) = \text{ala}(BEG) = \text{ala}(CEG) = \text{ala}(CFG) = \text{ala}(AFG).$$

Kolmioissa $\triangle ADG$ ja $\triangle BDG$ on sama korkeusjana ja $\overline{AD} = \overline{BD}$, joten $\text{ala}(ADG) = \text{ala}(BDG)$. Vastaavasti $\text{ala}(AFG) = \text{ala}(CFG)$ ja $\text{ala}(CEG) = \text{ala}(BEG)$ ja lisäksi $\text{ala}(ADC) = \text{ala}(BDC)$ sekä $\text{ala}(ACE) = \text{ala}(ABE)$ ja $\text{ala}(ABF) = \text{ala}(CBF)$. Koska, kuten 3.1.24:n todistuksessa nähtiin, $C * G * D$, niin pinta-alan additiivisuuslauseen nojalla $\text{ala}(ADC) = \text{ala}(ADG) + \text{ala}(AGC)$. Samoin $A * F * C$ ja siis $\text{ala}(AGC) = \text{ala}(AGF) + \text{ala}(GFC)$. Siten $\text{ala}(ADC) = \text{ala}(ADG) + \text{ala}(AGF) + \text{ala}(GFC)$. Mutta, kuten todettiin, $\text{ala}(AGF) = \text{ala}(GFC)$, joten

$$(*) \qquad \text{ala}(ADC) = \text{ala}(ADG) + 2 \cdot \text{ala}(AGF).$$

Vastaavasti nähdään, että

$$(**) \qquad \mathrm{ala}(BDC) = \mathrm{ala}(BDG) + 2 \cdot \mathrm{ala}(CEG).$$

Tiedetään, että $\mathrm{ala}(ADC) = \mathrm{ala}(BDC)$, joten yhtälöistä $(*)$ ja $(**)$ saadaan

$$\mathrm{ala}(ADG) + 2 \cdot \mathrm{ala}(AGF) = \mathrm{ala}(BDG) + 2 \cdot \mathrm{ala}(CEG).$$

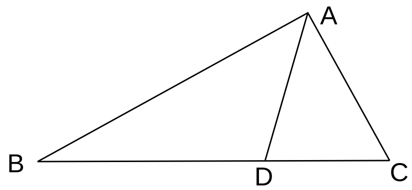
Nyt käytetään tietoa $\mathrm{ala}(ADG) = \mathrm{ala}(BDG)$ ja saadaan $\mathrm{ala}(AGF) = \mathrm{ala}(CEG)$. Vastaavasti voidaan näyttää, että $\mathrm{ala}(BDG) = \mathrm{ala}(CEG)$ ja väite seuraa. □

LAUSE 3.1.26. *Kolmion keskijanat jakavat toisensa suhteessa 2:1, ts., jos A, B, C, D, E, F ja G ovat kuten lauseessa 3.1.24, niin $\overline{AG} = 2\overline{GE}$.*

Todistus. Lauseen 3.1.25 mukaan $\mathrm{ala}(ACG) = 2 \cdot \mathrm{ala}(CEG)$. Näillä kolmioilla on yhteinen korkeusjana (kärjestä C, pituus h), joten $\frac{1}{2}\overline{AG} \cdot h = \frac{1}{2}\overline{EG} \cdot h$. Tästä väite seuraa. □

LAUSE 3.1.27. *Kolmion kulman puolittaja jakaa sen vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, ts., jos $\triangle ABC$ on kolmio, $B * D * A$, ja $\overrightarrow{AD}$ on $\measuredangle A$:n puolittaja, niin*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$



KUVA 150: KULMAN PUOLITTAJA

Todistus. Sinin määritelmän mukaan $\sin \measuredangle CDA = \sin \measuredangle BDA$. Sinilauseen nojalla

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\sin \measuredangle CAD}{\sin \measuredangle CDA}$$

ja

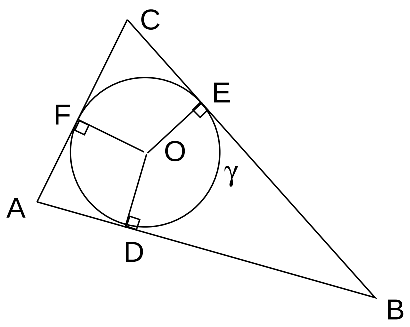
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \measuredangle DAB}{\sin \measuredangle BDA}.$$

Kulman puolittajan määritelmän nojalla $\sin \measuredangle CAD = \sin \measuredangle DAB$, joten

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \frac{\sin \measuredangle DAB}{\sin \measuredangle BDA}}{\overline{AC} \cdot \frac{\sin \measuredangle CAD}{\sin \measuredangle CDA}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

□

LAUSE 3.1.28. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, γ sen sisään piirretty ympyrä, D ympyrän γ ja sivun AB yhteinen piste, E ympyrän γ ja sivun BC yhteinen piste ja F ympyrän γ ja sivun CA yhteinen piste. Merkitään $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ ja vielä $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Tällöin $\overline{AF} = \overline{AD} = s - a$, $\overline{BD} = \overline{BE} = s - b$, $\overline{CE} = \overline{CF} = s - c$.*



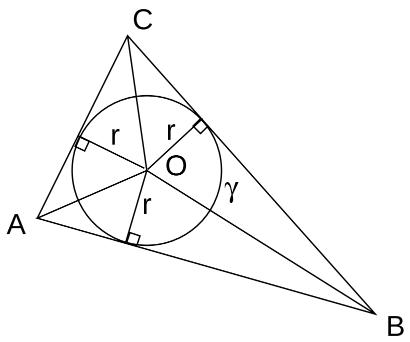
KUVA 151: LAUSE 4.1.11

Todistus. Olkoon O ympyrän γ keskipiste. Kuten lauseen 3.1.18 todistuksessa nähdään, että $\triangle ADO \cong \triangle AFO$, josta $\overline{AF} = \overline{AD}$. Vastaavasti $\overline{BD} = \overline{BE}$ ja $\overline{CE} = \overline{CF}$. Koska $A * F * C$, $A * D * B$ ja $B * E * C$ (Ks. jälleen 3.1.18:n tod.), niin $a = \overline{BE} + \overline{EC}$, $b = \overline{AF} + \overline{FC}$ ja $c = \overline{AD} + \overline{DB}$, joten

$$\begin{aligned} s - a &= \frac{1}{2}(a+b+c) - a = \frac{1}{2}(-a+b+c) = \frac{1}{2}(-\overline{BE} - \overline{EC} + \overline{AF} + \overline{FC} + \overline{AD} + \overline{DB}) \\ &= \frac{1}{2}(-\overline{BE} - \overline{EC} + \overline{AF} + \overline{CE} + \overline{AF} + \overline{BE}) = \overline{AF}. \end{aligned}$$

Vastaavasti laskemalla saadaan muut väitteen kaavat. □

LAUSE 3.1.29. (Heron)[19] *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $s = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$ sekä r kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretyn ympyrän säde. Tällöin* $\text{ala}(ABC) = rs$.



KUVA 152: LAUSE 4.1.12

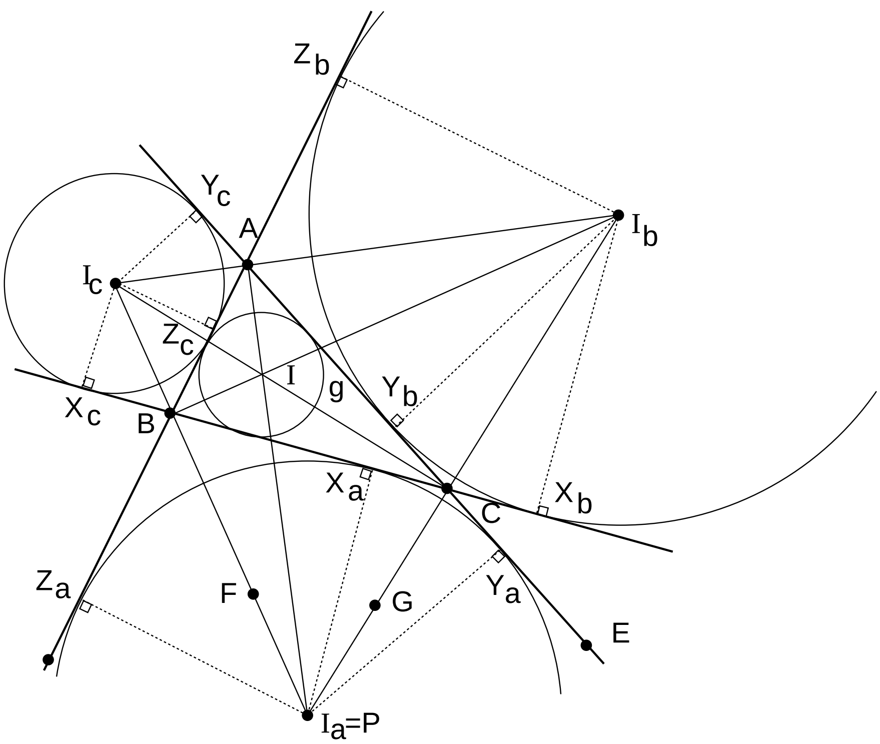
Todistus. Kolmion pinta-alan additiivisuusominaisuuden nojalla $\text{ala}(ABC) = \text{ala}(ABO) + \text{ala}(BCO) + \text{ala}(CAO)$, missä O on sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste. Lauseen 3.1.18 tarkastelujen nojalla näissä kaikissa kolmessa kolmiossa on r:n mittainen korkeusjana. Siten

$$\text{ala}(ABO) = \tfrac{1}{2}r\,\overline{AB}, \quad \text{ala}(BCO) = \tfrac{1}{2}r\,\overline{BC}, \quad \text{ala}(CAO) = \tfrac{1}{2}r\,\overline{AC}$$

ja edelleen $\text{ala}(ABC) = \frac{1}{2}r\,\overline{AB} + \frac{1}{2}r\,\overline{BC} + \frac{1}{2}r\,\overline{AC} = rs$. □

[19] HERON ALEKSANDRIALAINEN NOIN 10–75. Egypti

Kolmion sisään piirretty ympyrä sivuaa kaikkia kolmion kylkisuoria. Voi kysyä, onko olemassa muita ympyröitä, joilla on tämä sama ominaisuus. Vastaus on myönteinen, kuten seuraava kuva osoittaa: (Tässä siis $\triangle ABC$ on annettu kolmio, I sisään piirretyn ympyrän keskipiste ja I_a, I_b ja I_c "ulkopuolelta sivuavan" kolmen ympyrän keskipisteet.)



Kuva 153: Kolmion sivuja sivuavat ympyrät

Keskipisteet I_a, I_b ja I_c löytyvät seuraavan lauseen perusteella. (Tämä muotoilu antaa I_a:n.)

LAUSE 3.1.30. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $D*B*A$ sekä $E*C*A$. Tällöin kulmien $\measuredangle A$ ja $\measuredangle DBC$ sekä $\measuredangle ECB$ puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä (joka on etsitty I_a).*

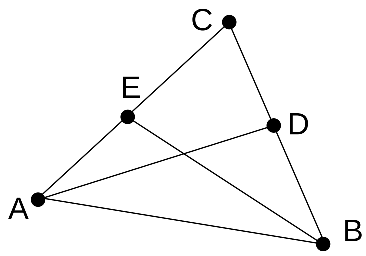
Todistus. Olkoon $\overrightarrow{BF}$ ulkokulman $\measuredangle DBC$ puolittaja ja $\overrightarrow{CG}$ ulkokulman $\measuredangle ECB$ puolittaja. Tällöin $(\measuredangle FBC)^\circ < 90$ ja $(\measuredangle GCB)^\circ < 90$, joten $(\measuredangle FBC)^\circ + (\measuredangle GCB)^\circ < 180$. Eukleideen viidennen aksiooman eli lauseen 9.1.1 mukaan $\overleftrightarrow{BF}$ ja $\overleftrightarrow{CG}$ leikkaavat toisensa jossain pisteessä P se. $PF\overleftrightarrow{BC}$ ja $PG\overleftrightarrow{BC}$. Tällöin $P \in \overrightarrow{BF}$ ja $P \in \overrightarrow{CG}$ eli P on $P\overrightarrow{BF}$:n ja $\overrightarrow{CG}$:n leikkauspiste. Olkoon Y_a pisteen P kautta kulkevan $\overleftrightarrow{AC}$:n normaalin ja $\overleftrightarrow{AC}$:n leikkauspiste ja Z_a vastaavasti $\overleftrightarrow{AB}$:llä ja X_a vastaavasti $\overleftrightarrow{BC}$:llä. Tällöin $Z_a \in \overrightarrow{BD} \setminus \{B\}$, $X_a \in \overrightarrow{BC} \setminus \{B\}$, $X_a \in \overrightarrow{BC} \setminus \{C\}$ ja $Z_a \in \overrightarrow{BD} \setminus \{B\}$. Kaikki nämä todistetaan samalla tavalla, jolla lauseen 3.1.18 todistuksessa nähtiin, että $S \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$. Tällöin myös $Z_a \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ ja $Y_a \in \overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$, koska $A*B*D$ ja $A*C*E$. Nyt $\triangle BX_aP \cong \triangle BZ_aP$ ja $\triangle CX_aP \cong \triangle CY_aP$; tämä seuraa SKK-säännöstä. Siis $PZ_a \cong PX_a \cong PY_a$. Tällöin $\triangle AZ_aP \cong \triangle AY_aP$, mikä seuraa lauseesta 2.4.21 ja siten $\measuredangle Z_aAP \cong \measuredangle Y_aAP$ eli

$$(**) \qquad \measuredangle BAP \cong \measuredangle CAP.$$

Jana PY_a ei voi leikata suoraa $\overleftrightarrow{AB}$, sillä $\overleftrightarrow{AB}$ on P-keskisen $\overline{PZ_a} = \overline{PX_a}$-säteisen ympyrän tangentti, eikä sillä siis ole ympyrän sisäpisteitä, kun taas jana PY_a on päätepistettä Y_a lukuun ottamatta kokonaan ympyrän sisällä. Siten tosiaan $PY_a\overleftrightarrow{AB}$ ja vastaavasti nähdään, että $PZ_a\overleftrightarrow{AC}$, joten P on kulman $\measuredangle BAC$ sisällä. Ehdon $(**)$ mukaan P on tällöin kulman $\measuredangle BAC = \measuredangle A$ puolittajalla ja siten kaikilla kolmella tarkasteltavalla puolittajalla. □

3.2. Vähän kehittyneempää euklidista geometriaa.

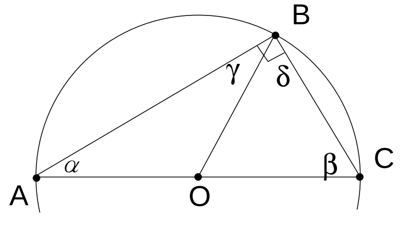
LAUSE 3.2.1. (Steiner ja Lehmus)[20] *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $B * D * C$ ja $A * E * C$ siten, että $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\measuredangle CAB$ ja $\overrightarrow{BE}$ kulman $\measuredangle ABC$ puolittaja. Jos $\overline{AD} = \overline{BE}$, niin $\triangle ABC$ on tasakylkinen: $\overline{AC} = \overline{BC}$.*



KUVA 154: STEINERIN JA LEHMUSIN LAUSE

Todistuksessa tarvitaan joitakin aputuloksia. Yksi niistä on, että Thaleen lauseelle 3.1.20 käänteinen tulos pätee myös:

LAUSE 3.2.2.(Thaleen lauseen käänteinen puoli). *Olkoon $\measuredangle ABC$ suora kulma. Tällöin B on ympyrällä, jonka halkaisija on AC.*



KUVA 155: THALEEN LAUSEEN KÄÄNTEINEN PUOLI

[20] JAKOB STEINER 1796–1863 ja DANIEL CHRISTIAN LUDOLPH LEHMUS 1780–1863. Saksalaisia kumpikin.

Todistus. Olkoon O janan AB keskipiste. Merkitään $\alpha = (\measuredangle BAC)^\circ$, $\beta = (\measuredangle ACB)^\circ$, $\gamma = (\measuredangle ABO)^\circ$ ja $\delta = (\measuredangle OBC)^\circ$. Koska $\overrightarrow{BO}$ on kulman $\measuredangle ABC$ sisällä ja $\measuredangle ABC$ on suora kulma, niin $\gamma + \delta = 90$. Edelleen kulmasummalauseen 3.1.7 nojalla $\alpha + \beta = 90$. Riittää osoittaa, että $\overline{OB} = \overline{OA}(= \overline{OC})$. Antiteesi: $\overline{OB} > \overline{OA}$ tai $\overline{OB} < \overline{OA}$. Jos $\overline{OB} < \overline{OA}$, niin lauseen 2.4.22 mukaan $\gamma < \alpha$, jolloin kaavoista $\alpha + \beta = 90$ ja $\gamma + \delta = 90$ seuraa, että $\beta < \delta$. Tällöin uudelleen lauseen 2.4.22 nojalla $\overline{OB} < \overline{OC}$. Nyt $\overline{OA} < \overline{OB} < \overline{OC}$, mikä on mahdotonta, koska O on AC:n keskipiste. Vastavasti päästään ristiriitaan jos $\overline{OA} > \overline{OB}$. □

Seuraavan apulauseen sanoma on, että kosini on vähenevä funktio.

LAUSE 3.2.3. *Jos α ja β ovat kulmia siten, että $\alpha < \beta$, niin $\cos\alpha > \cos\beta$.*

Todistus. 1° Olkoot ensin α ja β teräviä kulmia. Voidaan olettaa (vrt. kosinin määritelmään), että $\beta = \measuredangle ABC$, missä $\measuredangle C$ on suora kulma, jolloin siis

$$\cos\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

Koska $\alpha < \beta$, niin β:n sisällä on puolisuora $\overrightarrow{BD}$ siten, että $\measuredangle DBC \cong \alpha$. Puomilauseen nojalla $\overrightarrow{BD}$ leikkaa janaa AC. Olkoon leikkauspiste E. Tästä voi vaikka harjoitustehtävänä päätellä, että

$$\cos\alpha = \cos\measuredangle DBC = \cos\measuredangle EBC = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}.$$

Koska siis $\cos\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$, niin riittää osoittaa, että $\overline{BE} < \overline{BA}$. Tämä onkin helppoa, sillä $\overline{CE} < \overline{CA}$, koska $C * E * A$, joten Pythagoraan lause antaa

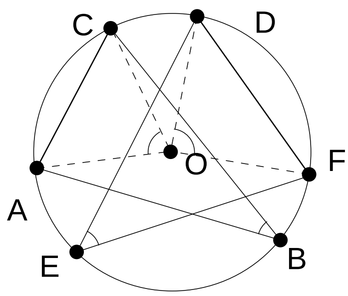
$$\overline{BE} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CE}^2} < \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2} = \overline{BA}.$$

2° Jos α on terävä ja β on suora tai tylppä, niin kosinin määritelmän nojalla suoraan $\cos\alpha > 0 \geq \cos\beta$.

3° Jos α on suora niin β on tylppä, jolloin taas kosinin määritelmän nojalla $\cos\alpha = 0 > \cos\beta$.

4° Jäljellä on enää tapaus, jossa sekä α että β ovat tylppiä. Tällöin α:n ja β:n täydennyskulmat α' ja β' ovat teräviä ja oletuksen $\alpha < \beta$ perusteella $\alpha' > \beta'$. Tällöin kohdan 1° nojalla $\cos\alpha' < \cos\beta'$, joten kosinin määritelmän mukaan $\cos\alpha = -\cos\alpha' > cos\beta' = \cos\beta$. □

LAUSE 3.2.4. *Olkoon α ympyrä ja A, B, C, D, E ja $F \in \alpha$ siten, että sekä $\measuredangle ABC$ että $\measuredangle DEF$ ovat teräviä kulmia. Tällöin $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$ jos ja vain jos $AC < DF$.*



KUVA 156: PIENEMPI KULMA - PIENEMPI JÄNNE

Todistus. Koska kulmat ovat teräviä, ei Thaleen lauseen 3.1.20 perusteella AC eikä DF voi olla α:n halkaisija. Tällöin kehäkulmalauseen 3.1.21 mukaan, edelleen kulmien terävyyden nojalla, $(\measuredangle ABC)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle AOC)^\circ$ ja $(\measuredangle DEF)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle DOF)^\circ$, missä O on α:n keskipiste.

"$\Rightarrow$" Olkoon $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$. Tällöin $(\measuredangle AOC)^\circ = 2(\measuredangle ABC)^\circ < 2(\measuredangle DEF)^\circ = (\measuredangle DOF)^\circ$. Lauseen 3.2.3 mukaan

$$(*) \qquad \cos\measuredangle AOC > \cos\measuredangle DOF.$$

Kosinilauseen nojalla

$$(**) \qquad \begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OA}\,\overline{OC}\cos\measuredangle AOC = 2r^2(1 - 2\cos\measuredangle AOC) \text{ ja} \\ \overline{DF}^2 &= \overline{OD}^2 + \overline{OF}^2 - 2\overline{OD}\,\overline{OF}\cos\measuredangle DOF = 2r^2(1 - 2\cos\measuredangle DOF). \end{aligned}$$

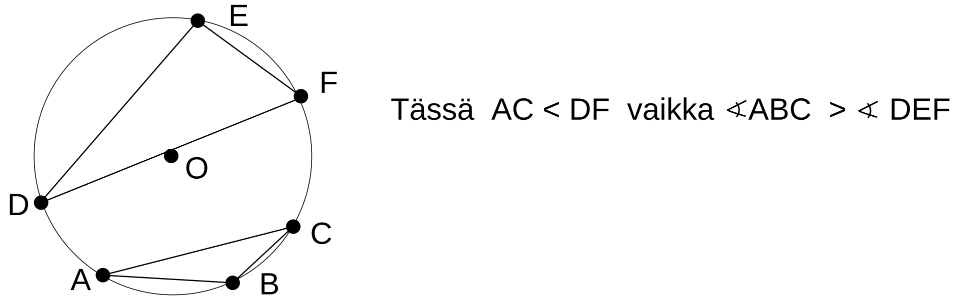
Väite $AC < DF$ seuraa nyt ehdosta $(*)$.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että $AC < DF$. Kaavat $(**)$ pätevät myös nyt, ja oletuksen nojalla saadaan edelleen kaava $(*)$. Tästä ja lauseesta 3.2.3 seuraa, että $\measuredangle AOC < \measuredangle DOF$, josta edelleen

$$(\measuredangle ABC)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle AOC)^\circ < \tfrac{1}{2}(\measuredangle DOF)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ$$

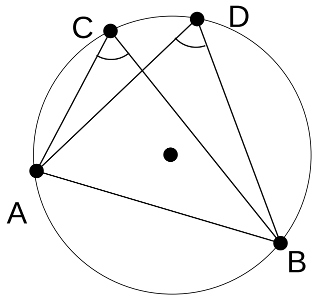
eli $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$. □

Huom: Edellisen lauseen väite ei päde ilman oletusta kulmien terävyydestä, joka takaa, että jänteitä AC ja DF "katsellaan keskipisteen puolelta".



KUVA 157: PIENEMPI KULMA - KUITENKIN SUUREMPI JÄNNE

LAUSE 3.2.5 (Käänteinen kehäkulmalause). *Olkoot A, B, C, ja D eri pisteitä se. $CD\overleftrightarrow{AB}$ ja $\measuredangle ACB \cong \measuredangle ADB$. Tällöin on olemassa ympyrä α siten, että $A, B, C, D \in \alpha$.*



Kuva 158: Käänteinen kehäkulmalause

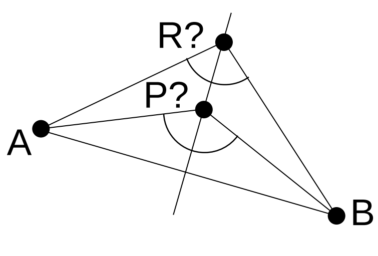
Todistus. $\triangle ABC$ on kolmio. Olkoon β kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretty ympyrä, keskipisteenä P. Olkoon vastaavasti γ kolmion $\triangle ABD$ ympäri piirretty ympyrä, keskipisteenä R. Tarkastellaan kolmea eri tapausta; kulma $\measuredangle C \cong \measuredangle D$ on joko 1) suora, 2) terävä tai 3) tylppä.

Tapauksessa 1) jana AB on lauseen 3.2.2 nojalla sekä β:n että γ:n halkaisija, joten β:lla ja γ:lla on sama keskipiste, nimittäin janan AB keskipiste. Toisin sanoen $R = P$. Ympyröillä β ja γ on nyt myös sama säde $\frac{1}{2}\overline{AB}$, joten ne ovat sama ympyrä ja kelpaavat etsityksi ympyräksi α.

Tapauksessa 2) P ei voi olla suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, sillä muuten AB olisi β:n halkaisija, jolloin Thaleen lauseen 3.1.20 mukaan $\measuredangle C$ olisi suora kulma vastoin oletusta. Kehäkulmalauseen 3.1.21:n nojalla $CP\overleftrightarrow{AB}$, sillä lauseen vaihtoehto b) ei tule kysymykseen, koska $\measuredangle C$ on terävä. Vastaavasti myös $DR\overleftrightarrow{AB}$. Koska oletuksen mukaan $CD\overleftrightarrow{AB}$, niin $PR\overleftrightarrow{AB}$. Tällöin kehäkulmalauseen a) -kohdan mukaan

$$(\measuredangle APB)^\circ = 2(\measuredangle ACB)^\circ \overset{\text{oletus}}{=} 2(\measuredangle ADB)^\circ = (\measuredangle ARB)^\circ.$$

Lauseen 2.6.9 nojalla sekä P että R ovat AB:n keskinormaalilla ja koska nyt $PR\overleftrightarrow{AB}$ ja $\measuredangle APB \cong \measuredangle ARB$, niin on oltava $P = R$; tämähän seuraa vaikkapa ulkokulmalauseesta 2.4.19 sovellettuna kolmioon $\triangle APR$. Siis nytkin $\beta = \gamma$ kelpaa α:ksi. Aksiooman (H 11) yksikäsitteisyyspuoli antaa nyt $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP}$, joten $R = P$.

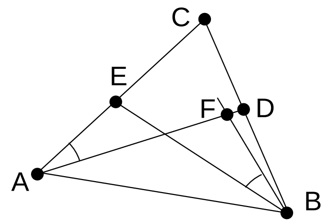


Kuva 159: Ulkokulmalauseen nojalla $P = R$.

Tapauksessa 3) joudutaan kehäkulmalauseen 3.1.21 vaihtoehtoon b), jonka mukaan $C\overleftrightarrow{AB}P$ ja $D\overleftrightarrow{AB}R$. Tässäkin tapauksessa oletus $CD\overleftrightarrow{AB}$ antaa tiedon $PR\overleftrightarrow{AB}$ ja loppu menee samoin kuin kohdassa 2). $\square$

Nyt voidaan lopulta todistaa Steinerin ja Lehmusin lause.

Lauseen 3.2.1 todistus. Palautetaan aluksi mieleen lauseen oletukset ja väite: $\triangle ABC$ on kolmio, $B * D * C$, $A * E * C$, $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\measuredangle CAB$ puolittaja ja $\overrightarrow{BE}$ kulman $\measuredangle ABC$ puolittaja ja $\overline{AD} = \overline{BE}$. Väitetään, että $\overline{AC} = \overline{BC}$. Antiteesi: $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Tällöin lauseen 2.4.9 b) perusteella $\measuredangle A \neq \measuredangle B$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $\measuredangle A < \measuredangle B$. Tällöin myös $\frac{1}{2}\measuredangle A < \frac{1}{2}\measuredangle B$ eli $\measuredangle CAD < \measuredangle CBE$. Silloin kulman $\measuredangle CBE$ sisältä voidaan valita F siten, että $\measuredangle CAD \cong \measuredangle FBE$. Puomilausetta toistuvasti käyttämällä voidaan olettaa, että $A * F * D$. Toisaalta $FD\overleftrightarrow{EB}$ ja $CD\overleftrightarrow{EB}$, joten $FC\overleftrightarrow{EB}$.



Kuva 160: Steinerin ja Lehmusin lauseen todistus

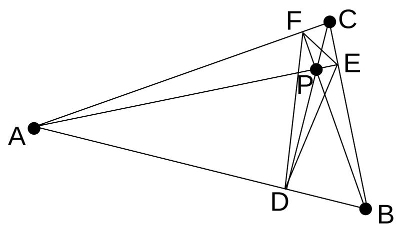
Nyt $FD\overleftrightarrow{EC}$ ja $DB\overleftrightarrow{EC}$, joten $FB\overleftrightarrow{EC}$. Siten F on $\measuredangle CEB$:n sisällä, joten $\overrightarrow{EF}$ leikkaa puomilauseen mukaan janaa CB. Näin $C\overleftrightarrow{EF}B$. Toisaalta $A\overleftrightarrow{EF}C$, joten $AB\overleftrightarrow{EF}$. Seuraavaksi käytetään lausetta 3.2.5, jonka mukaan A, E, F ja B ovat samalla ympyrällä, kunhan kulmat $\measuredangle EAF = \measuredangle CAD$ ja $\measuredangle FBE$ ovat teräviä. Teräviä ne kolmion "puolikaskulmina" ovatkin — mutta itse asiassa jopa $\measuredangle A = EAB$ ja $\measuredangle AFB$ ovat teräviä, sillä $\measuredangle A < \measuredangle B$ ja $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ < 180$, joten $(\measuredangle A)^\circ < 90$, ja myös $(\measuredangle ABF)^\circ = \frac{1}{2}((\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ) < 90$. Mutta $AF \overset{A*F*D}{<} AD \overset{\text{oletus}}{=} BE$, joten lauseen 3.2.4 mukaan $\measuredangle ABF < \measuredangle EAB$,

Tehtyjen valintojen nojalla on toisaalta:

$$(\measuredangle ABF)^\circ = (\measuredangle ABE)^\circ + (\measuredangle EBF)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle B)^\circ + \tfrac{1}{2}(\measuredangle A)^\circ) \overset{\measuredangle B > \measuredangle A}{>} (\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle EAB)^\circ,$$

mikä on ristiriidassa edellä päätellyn kanssa. □

Seuraavassa tarkastelussa osoitetaan, että teräväkulmaisen kolmion korkeusjanat (janat!) leikkaavat toisensa samassa pisteessä P (ks. lause 3.2.6), jota sanotaan ko. kolmion *ortokeskukseksi*. Teräväkulmaisen kolmion korkeusjanojen ja vastaavien kylkien leikkauspisteet kärkinä muodostettu uusi kolmio on alkuperäisen *ortokolmio*. Lauseena 3.2.8 osoitetaan, että teräväkulmaisen kolmion ortokeskus on sen ortokolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.



Kuva 161: Ortokeskus P ja ortokolmio $\triangle DEF$

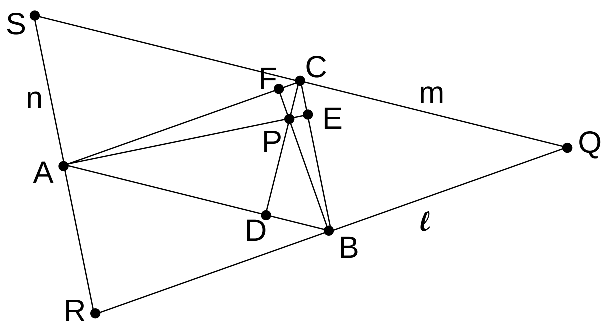
LAUSE 3.2.6. *Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, $A * D * B$ siten, että $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, $B * E * C$ siten, että $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AE}$ ja $C * F * A$ siten, että $\overleftrightarrow{CA} \perp \overleftrightarrow{BF}$. Tällöin janat AE, BF ja CD leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Olkoot ℓ, m ja n suoria, jotka toteuttavat ehdot

$$\ell \parallel \overleftrightarrow{AC} \text{ ja } \ell \text{ kulkee } B\text{:n kautta}$$

$$m \parallel \overleftrightarrow{AB} \text{ ja } \ell \text{ kulkee } C\text{:n kautta}$$

$$n \parallel \overleftrightarrow{BC} \text{ ja } \ell \text{ kulkee } A\text{:n kautta.}$$



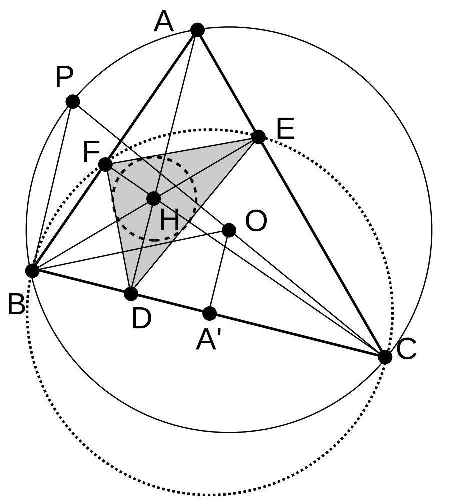
KUVA 162: KORKEUSJANOJEN LEIKKAUSPISTE

Lauseen 3.1.2 nojalla m ja n leikkaavat toisensa, olkoon leikkauspiste S; vastaavasti m ja ℓ leikkaavat toisensa pisteessä Q sekä n ja ℓ pisteessä R. Koska ℓ, m ja n ovat eri suoria, niin S, Q ja R ovat eri pisteitä ja $\triangle SQR$ on kolmio. Nyt nelikulmio $\square ABCS$ on suunnikas, joten $\overline{AB} = \overline{SC}$. Vastaavasti $\square ABQC$ on suunnikas, joten $\overline{AB} = \overline{CQ}$ ja siis $\overline{SC} = \overline{CQ}$ ja C on janan SQ keskipiste. Koska $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{AB} \parallel m$, niin 3.1.5:n mukaan $\overleftrightarrow{CD} \perp m$ ja siten $\overleftrightarrow{CD}$ on janan SQ keskinormaali. Vastaavasti nähdään, että $\overleftrightarrow{AE}$ on janan SR ja $\overleftrightarrow{BF}$ janan QR keskinormaali. Nyt voidaan käyttää lausetta 3.1.7, jonka mukaan $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ leikkaavat toisensa samassa pisteessä P. Jotta nimenomaan korkeusjanat leikkaisivat P:ssä, pitää olla $A*P*E$, $B*P*F$ ja $C*P*D$. Tässä tarvitaan $\triangle ABC$:n teräväkulmaisuutta. Sen nojalla nähdään ensin (kuten suorakulmion olemassaoloa koskevan lauseen 2.5.25 todistuksessa), että $A * D * B$, $B * E * C$ ja $C * F * A$. Tällöin $A\overleftrightarrow{CD}B$ ja $BE\overleftrightarrow{CD}$, joten $A\overleftrightarrow{CD}E$ ja siten $A * P * E$. Muut ehdot todetaan vastaavasti. $\square$

LAUSE 3.2.7. *Mielivaltaisen kolmion korkeusjanat tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Edellisen lauseen todistuksen alkuosassa, jossa nähtiin, että $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ leikkaavat toisensa samassa pisteessä P, ei tarvittu oletusta kolmion teräväkulmaisuudesta! $\square$

LAUSE 3.2.8. *Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio ja $\triangle DEF$ sen ortokolmio. Tällöin $\triangle ABC$:n ortokeskus on kolmion $\triangle DEF$ sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste.*



Kuva 163: Ortokeskus

Todistus. Olkoon H kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus ja O sen ympäri piirretyn ympyrän γ keskipiste. Olkoon P ympyrällä γ siten, että $P{*}O{*}C$, jolloin $P \neq B$, sillä muuten $\measuredangle A$ olisi suora kulma. Siten $\measuredangle BPC$ on kulma ja $\overleftrightarrow{BC}$ ei kulje O:n kautta. Jos nyt $AP\overleftrightarrow{BC}$ — kuten kuvassa — niin kehäkulmalauseen 3.1.21 mukaan $\measuredangle BPC \cong \measuredangle BAC$. Ja todellakin on $AP\overleftrightarrow{BC}$, sillä muuten olisi $A\overleftrightarrow{BC}P$ ja edelleen $O\overleftrightarrow{BC}A$, jolloin kehäkulmalauseen b) -kohdan mukaan

$$(\measuredangle BAC)^\circ = 180 - \overbrace{\tfrac{1}{2}(\measuredangle BOC)^\circ}^{<90} > 90$$

vastoin teräväkulmaisuusoletusta. Siis todellakin $\measuredangle P = \measuredangle A$.

Olkoon A' janan BC keskipiste, jolloin SSS-säännön nojalla kolmiot $\triangle BA'O$ ja $CA'O$ ovat yhtenevät ja siten $\measuredangle BA'O$ on suora kulma. Thaleen lauseen 3.1.20 nojalla myös $\measuredangle PBC$ on suora kulma ja siten $\triangle PBC \sim \triangle OA'C$, jolloin $\measuredangle A'OC \cong \measuredangle P$ ja edelleen $\measuredangle A'OC \cong \measuredangle BAC \cong \measuredangle BOA'$. Merkitään $\alpha = 90 - (\measuredangle BAC)^\circ$. Kolmio BOC on tasakylkinen ja $(\measuredangle BOC)^\circ = 2 \cdot (\measuredangle BAC)^\circ$, joten

$$(\measuredangle OBC)^\circ = (\measuredangle OCB)^\circ = \tfrac{1}{2}\big(180 - (\measuredangle BOC)^\circ\big) = 90 - (BAC)^\circ = \alpha.$$

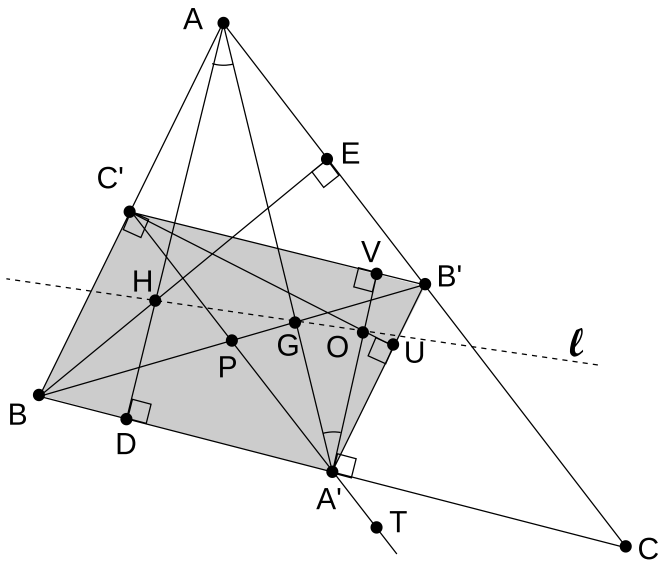
Koska kulmat $\measuredangle BFC$ ja $\measuredangle BEC$ ovat suoria ja koska $FE\overleftrightarrow{BC}$ (mikä seuraa siitä, että $\triangle ABC$ on teräväkulmainen, jolloin $B * F * A$ ja $C * E * A$ eli $FA\overleftrightarrow{BC}$ ja $EA\overleftrightarrow{BC}$), niin käänteisen kehäkulmalauseen 3.2.5 perusteella pisteiden B, F, E ja C kautta kulkee ympyrä. Koska $BC\overleftrightarrow{FE}$ seuraa taas kolmion $\triangle ABC$ teräväkulmaisuudesta, saadaan lauseen 3.1.21 perusteella $\measuredangle FBE \cong \measuredangle FCE$ ja edelleen $\measuredangle ABE \cong \measuredangle FCA$. Suorakulmaisesta kolmiosta $\triangle BAE$ voidaan kulmasummalauseen avulla laskea: $(\measuredangle ABE)^\circ = \alpha$ ja siten myös $(\measuredangle FCA)^\circ = \alpha$.

Vastaavasti myös A, F, D ja C ovat samalla ympyrällä ja kehäkulmalauseen nojalla $(\measuredangle HDF)^\circ = (\measuredangle ADF)^\circ = (\measuredangle FCA)^\circ = \alpha$. Samoin päätellään, että $(\measuredangle HDE)^\circ = \alpha$, joten $\overrightarrow{CH}$ on kulman $\measuredangle FDE$ puolittaja. Erityisesti siis H on kulman $\measuredangle FDE$ puolittajalla. Vastaava tarkastelu, merkintöjä tietenkin vaihtaen, osoittaa, että H on myös kulmien $\measuredangle DEF$ ja $\measuredangle DFE$ puolittajalla. Siis H on $\triangle DEF$:n kulmanpuolittajien leikkauspiste eli $\triangle DEF$:n sisään piirretyn ympyrän keskipiste. $\square$

Ortokeskus eli korkeusjanojen leikkauspiste määriteltiin edellä ainoastaan teräväkulmaiselle kolmiolle. Lauseen 3.2.7 mukaan korkeusjanojen määräämät suorat leikkaavat myös tylppä- tai suorakulmaisessa tapauksessa. Sovitaan, että tylppä- tai suorakulmaisen kolmion *ortokeskus* on näiden suorien leikkauspiste. Lause 3.2.9 pätee myös tylppä- tai suorakulmaiselle kolmiolle, mutta todistus on kirjoitettava uudestaan, sillä pisteet vaihtavat järjestystään.

LAUSE 3.2.9. *Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, H sen ortokeskus, G sen painopiste ja O sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Tällöin H, G ja O ovat samalla suoralla ℓ. Jos $O \neq H$, niin G jakaa janan OH suhteessa 2:1 siten, että $\overline{HG} = 2 \cdot \overline{GO}$. Jos $O = H$, niin myös $G = H$.*

Huom. Lauseen 3.2.9 suoraa ℓ kutsutaan kolmion $\triangle ABC$ *Eulerin suoraksi*[21].



KUVA 164: EULERIN SUORA

Todistus. Selvästikin kaksi pisteistä G, H, O yhtyy vain, kun $\triangle ABC$ on tasasivuinen, joten voimme olettaa, että $O \neq H$.

Olkoon A' sivun BC keskipiste, B' sivun CA keskipiste ja C' sivun AB keskipiste. On sopiva harjoitustehtävä osoittaa, että $\triangle BA'C' \sim \triangle BCA$. Tästä seuraa, että $\measuredangle C \cong \measuredangle BA'C'$. Jos valitaan T siten, että $C' * A' * T$, niin $\measuredangle C'A'B \cong \measuredangle TA'C$ "ristikulmina" ja $A\overleftrightarrow{BC}T$ (koska $AC'\overleftrightarrow{BC}$ ja $C'\overleftrightarrow{BC}T$), jolloin lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$. Vastaavasti nähdään, että $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Tällöin nelikulmiot $\square BA'B'C'$, $\square AC'A'B'$ ja $\square CB'C'A'$ ovat suunnikkaita. On toinen sopiva harjoitustehtävä osoittaa, että mielivaltaisen suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Siten janat $C'B'$ ja AA' leikkaavat pisteessä P siten, että $C'P \cong PB'$.

[21] LEONHARD EULER 1707 - 1783. Sveitsi-Venäjä-Saksa.

Tällöin P on janan $C'B'$ keskipiste ja siten $A'P$ on $\triangle A'B'C'$:n keskijana. Siis keskijana $A'P$ on janalla AA' eli $\triangle ABC$:n keskijanalla. Vastaavasti nähdään, että myös muut $\triangle A'B'C'$:n keskijanat ovat vastaavilla keskijanoilla, joten $\triangle A'B'C'$:n ja toisaalta $\triangle ABC$:n keskijanat leikkaavat kaikki samassa pisteessä G. Siten G on myös kolmion $A'B'C'$ painopiste.

$$\begin{array}{ll} \text{Olkoon} & D \text{ suoralla } \overleftrightarrow{BC} \text{ siten, että } \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}, \\ & E \text{ suoralla } \overleftrightarrow{AC} \text{ siten, että } \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{AC}, \\ & U \text{ suoralla } \overleftrightarrow{A'B'} \text{ siten, että } \overleftrightarrow{C'U} \perp \overleftrightarrow{A'B'}, \\ \text{ja} & V \text{ suoralla } \overleftrightarrow{B'C'} \text{ siten, että } \overleftrightarrow{A'V} \perp \overleftrightarrow{C'B'}. \end{array}$$

Koska $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ niin lauseen 3.1.5 mukaan $\overleftrightarrow{C'U} \perp \overleftrightarrow{A'B'}$ ja koska C' on janan AB keskipiste, niin $\overleftrightarrow{C'U}$ on AB:n keskinormaali. Vastaavasti $A'V$ on BC:n keskinormaali. Koska AB:n ja BC:n keskinormaalit leikkaavat $\triangle ABC$:n ympäri piirretyn ympyrän keskipisteessä O ja toisaalta $\overleftrightarrow{C'U}$ ja $\overleftrightarrow{A'V}$ leikkaavat $\triangle A'B'C'$:n ortokeskuksessa, piste O on $\triangle A'B'C'$:n ortokeskus. Koska

$$\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB} \quad \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'} \text{ ja } \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}\,,$$

niin on kolmas sopiva harjoitustehtävä osoittaa, että

$$(*) \qquad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Koska A' on BC:n keskipiste ja $\triangle BA'C' \sim \triangle BCA$, niin lauseen 3.1.10 nojalla

$$(**) \qquad \overline{A'C'} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}.$$

Nyt O on kolmion $\triangle A'B'C'$ ja H on kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus, joten ehtojen $(*)$ ja $(**)$ mukaan voi neljäntenä harjoitustehtävänä osoittaa, että

$$\begin{cases} \overline{A'O} = \frac{1}{2}\overline{AH} \\ \overline{A'G} = \frac{1}{2}\overline{AG}. \ (3.1.26) \end{cases}$$

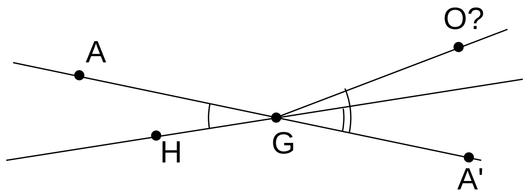
Koska O on BC:n keskinormaalilla ja $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$, niin pätee joko 1°: $\overleftrightarrow{OA'} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ tai 2°: $\overleftrightarrow{OA'} = \overleftrightarrow{AD}$.

Tapaus 1°: Tässä $A' \neq D$ ja merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla $(B \leftrightarrow C)$ voidaan olettaa, että $\overleftrightarrow{BDAA'}$ kuten kuvassa, jolloin $B*D*A'$, mikä seuraa kolmion $\triangle ABC$ teräväkulmaisuudesta. Koska $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ niin myös $\triangle A'B'C'$ on teräväkulmainen ja siten $B'*V*C'$. Koska $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, ja $\measuredangle D \cong \measuredangle V$ (suora kulma) niin $\triangle ABD \sim \triangle A'B'V$. Koska $\triangle ABC \sim \triangle B'A'C$, niin $\overline{B'A'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ ja siten 3.1.10:n nojalla $\overline{B'V} = \frac{1}{2}\overline{BD}$. Koska $B*D*A'$ niin $\overline{BD} < \overline{A'B} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = \overline{B'C'}$. Koska P on $\overline{B'C'}$:n keskipiste, niin $\overline{B'C'} = 2 \cdot \overline{B'P}$. Siten $\overline{B'V} = \frac{1}{2}\overline{BD} < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{B'P} =$

$\overline{B'P}$ ja koska $B' * V * C'$ niin on oltava $P * V * B'$ eli $C' * P * V$. Koska P sisältyy suoraan $\overleftrightarrow{AA'}$ niin $C'\overleftrightarrow{AA'}V$. Koska kolmion $\triangle A'B'C'$ teräväkulmaisuuden nojalla O sisältyy janaan $A'V$, niin $V O\overleftrightarrow{AA'}$ ja siten $O\overleftrightarrow{AA'}B$, koska $C'B\overleftrightarrow{AA'}$, ja edelleen $O\overleftrightarrow{AA'}D$. Nyt siis $\overleftrightarrow{OA'} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, joten lauseen 3.1.4 mukaan $\measuredangle DAA' \cong \measuredangle OA'A$. Teräväkulmaisuuden nojalla on $A * H * D$ ja aina $A * G * A'$, joten on voimassa

$$(***) \qquad \triangle HAG \sim \triangle OA'G.$$

Erityisesti $\measuredangle AGH \cong \measuredangle A'GO$. Koska $A * G * A'$ ja $O\overleftrightarrow{AA'}H$ (mikä seuraa siitä, että $O\overleftrightarrow{AA'}D$ ja $A * H * D$), niin yhtälö $\measuredangle HAG = \measuredangle OA'G$ on ristikulmia koskevan tuloksen 2.4.6 nojalla mahdollinen vain kun $H * G * O$.



Kuva 165: Lauseen 3.2.9 todistuksesta

Ehto $\overline{HG} = 2 \cdot GO$ seuraa edellä todistetusta tiedosta $\overline{A'O} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH}$, tiedosta $\triangle HAG \sim \triangle OA'G$ ja lauseesta 3.1.10. Tapaus 1°on käsitelty.

Tapaus 2°: Nyt oletamme $\overleftrightarrow{OA} = \overleftrightarrow{AD}$. Tällöin $A' = D$ ja $\overleftrightarrow{AD}$ on BC:n keskinormaali. Silloin pisteet H, G ja O sijaitsevat samalla suoralla $\overleftrightarrow{AD}$. Jos $O = H$, niin $\overleftrightarrow{BE}$ on AC:n keskinormaali, joten G on suorilla $\overleftrightarrow{BE}$ ja $\overleftrightarrow{AD}$, siis sama kuin niiden leikkauspiste O eli H. Voidaan siis olettaa, että $O \neq H$. Edellä on todettu, että $\overline{A'O} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH}$ ja $\overline{A'G} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GA}$. Koska $\triangle ABC$ on teräväkulmainen, on $A * H * A'$ ja aina $A * G * A'$. Lisäksi, kuten todettiin, O on kolmion $\triangle A'B'C'$ ortokeskus ja $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, joten myös $\triangle A'B'C'$ on teräväkulmainen ja siis $A' * O * V$. Koska $A * P * A'$, niin tällöin $A' * O * A$. Siis pisteet H, G ja O sijaitsevat samalla suoralla $\overleftrightarrow{AA'}$ ja joko $A' * O * H$ (tapaus i) tai sitten $A' * H * O$ (tapaus ii).

Tapauksessa i) eli olettaen $A' * O * H$ on $O * H * A$, joten $\overline{OA} > \overline{HA}$ ja $\overline{A'O} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}$. Tällöin on oltava $\overline{A'O} < \frac{1}{3} \cdot AA'$, sillä $\overline{A'O} + \overline{OA} = \overline{AA'}$. Ehdosta $\overline{A'G} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GA}$ saadaan $\overline{A'G} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AA'}$, joten $A' * O * G$. Lisäksi ehdosta $\frac{1}{2} \cdot \overline{AH} = \overline{A'O} < \frac{1}{3} \cdot \overline{AA'}$ saadaan $\overline{AH} < \frac{2}{3} \cdot \overline{AA'}$, jolloin, koska $\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AA'}$, on $G * H * A$. Tällöin

$$\overline{OG} \overset{A'*O*G}{=} \overline{A'G} - \overline{A'O} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GA} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} \overset{G*H*A}{=} \frac{1}{2} \cdot \overline{GH}$$

eli väite pätee. Vastaavasti tapauksessa ii) eli kun $A' * H * O$ voidaan päätellä, että

$$\overline{A'O} > \overline{A'H} \implies \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} > \overline{A'H} \implies \overline{A'H} < \frac{1}{3}\overline{AA'} \implies A' * G * O,$$

josta

$$\overline{OG} \overset{A'*G*O}{=} \overline{A'O} - \overline{A'G} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AG} \overset{H*G*A}{=} \frac{1}{2} \cdot \overline{HG}.$$

□

IV Liikkeet ja Poincarén malli

"Tyhjästä olen luonut ihmeellisen uuden maailmankaikkeuden." (Janos Bolyai)

Luvussa IV konstruoidaan Poincarén malli, jossa muut aksioomat pätevät, mutta paralleeliaksiooma ei. Konstruktion pohjana on euklidinen geometria, joten tulee todistetuksi, että jos euklidinen geometria on ristiriidaton, niin myös geometria, jossa paralleeliaksiooma **ei päde** on ristiriidaton. Sellaisessa geometriassa syntyy uudenlaisia ja outoja geometrisia tilanteita. Pätee esimerkiksi kolmioiden yhtenevyyskriteeri KKK. Tätä *epäeuklidista*, täsmällisemin sanoen *hyperbolista geometriaa* kehittivät ensimmäisinä Bolyai, Lobatševski ja Gauss.[22]

Aloitamme tarkastelemalla peilauksia euklidisessa geometriassa ja jatkamme konstruoimalla halutun mallin niiden avulla. Jatkossa samastetaan — mukavuussyistä — suorat ja niiden pisteiden joukot, ts. käytetään tulkintaa $\ell = \{P \mid \ell \text{ kulkee } P\text{:n kautta}\}$ ja merkitään $P \in \ell$, kun ℓ kulkee P:n kautta. Muistetaan myös, että huomautuksen 11 yhteydessä on sovittu merkittävän $\mathcal{T} = \{P \mid P \text{ on piste}\}$. $\mathcal{T}$ on siis "koko taso".

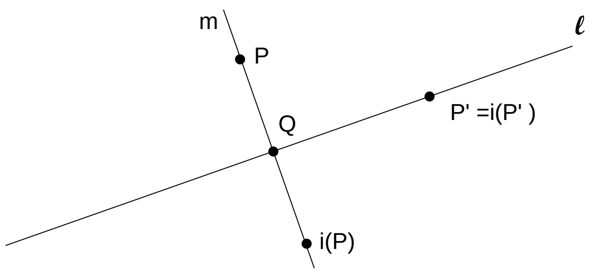
4.1. Peilaukset.

Peilaus suoran suhteen.

Määritelmä 4.1. Olkoon ℓ suora. *Peilaus suoran ℓ suhteen* on kuvaus

$$i : \mathcal{T} \to \mathcal{T},$$

joka määritellään seuraavasti. Jos $P \in \ell$, niin $i(P) = P$, ja jos $P \notin \ell$, niin olkoon m pisteen P kautta kulkeva ℓ:n normaali ja Q suorien ℓ ja m leikkauspiste. Sovitaan, että $i(P)$ on piste, joka toteuttaa ehdot $i(P) * Q * P$ ja $i(P)Q \cong QP$.



Kuva 166: Peilaus suoran suhteen

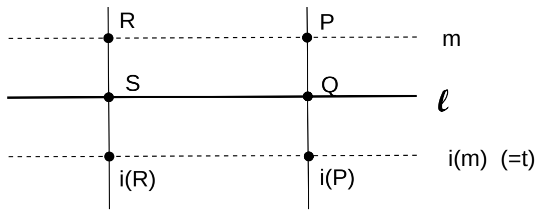
Huomautus 35. Normaalin olemassaolon ja yksikäsitteisyyden sekä aksiooman (H8) nojalla $i(P)$ on olemassa ja yksikäsitteisesti määrätty jokaisella P, joten i on kuvaus. Edelleen määritelmästä seuraa, että $i(i(P)) = P$ kaikilla P, joten i on itsensä käänteiskuvaus, $i = i^{-1}$, erityisesti i on bijektio.

LAUSE 4.1.1. *Olkoon i peilaus suoran ℓ suhteen ja m mielivaltainen suora. Tällöin $i(m)$ on suora.*

[22] Janos Bolyai 1802–1860. Unkari (nyk. Romaniaa), Carl Friedrich Gauss 1777–1855. Saksa. Nikolai Ivanovits Lobatševski 1792–1856. Venäjä.

Huomautus 36. Tähän tarvitaan tulkintaa suorasta pistejoukkona. Alun perinhän i ei kuvaa suoria minnekään, vaan i on määritelty ainoastaan pisteille ja kuvajoukkokin muodostuu pisteistä. Lause 4.1.1 takaa, että luonnollisella tavalla muodostuu kuvaus $\{\text{suorat}\}\to\{\text{suorat}\}$.

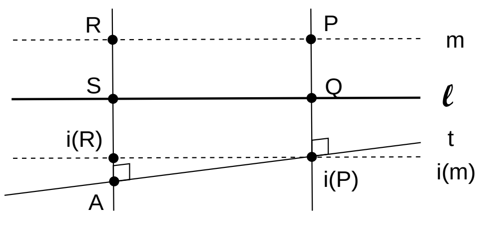
Todistus. Jos $m = \ell$, niin $i(m) = \ell$ ja asia on selvä. Olkoon siis $m \neq \ell$. Tässä on kaksi mahdollisuutta: joko a) $m \parallel \ell$ tai sitten b) m leikkaa suoraa ℓ.



Kuva 167: Peilin suuntaisen suoran peilikuva on suora

Tapaus a): Olkoon $P \in m$ mielivaltainen ja t pisteen $i(P)$ kautta kulkeva suora siten, että $t \parallel \ell$. Suoran t olemassaolo seuraa lauseesta 2.4.18. Osoitetaan, että $i(m) = t$.

Osoitetaan ensin, että $i(m) \subset t$. Olkoon $R \in m$. Tapauksessa $R = P$ ainakin on $i(R) \in t$. Olkoon $R \neq P$. Olkoon Q suorien ℓ ja $\overleftrightarrow{Pi(P)}$ leikkauspiste ja S vastaavasti suorien ℓ ja $\overleftrightarrow{Ri(R)}$ leikkauspiste. Peilauksen i määritelmän mukaan $P * Q * i(P)$ ja $R * S * i(R)$ ja suorat $\overleftrightarrow{P\,i(P)}$ ja $\overleftrightarrow{R\,i(R)}$ ovat ℓ:n normaaleja. Lauseen 2.4.17 mukaan $\overleftrightarrow{P\,i(P)} \parallel \overleftrightarrow{R\,i(R)}$. Koska $m \parallel \ell$, niin $\square SQPR$ on suunnikas. Lauseen 3.1.9 nojalla $\overline{RS} = \overline{PQ}$, joten i:n määritelmän mukaan $\overline{S\,i(R)} = \overline{SR} = \overline{PQ} = \overline{Q\,i(P)}$. Lauseen 3.1.5 ja t:n valinnan mukaan $\overleftrightarrow{P\,i(P)}$ ja $\overleftrightarrow{R\,i(R)}$ ovat myös t:n normaaleja. Erityisesti $\overleftrightarrow{R\,i(R)}$ leikkaa suoraa t, olkoon leikkauspiste A.

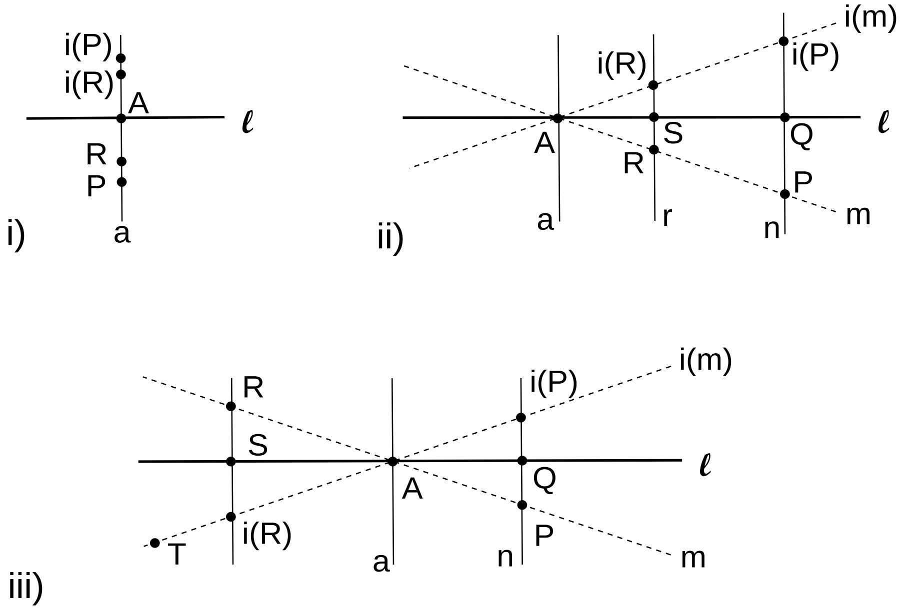


Kuva 168: Apupiste A

Tässä $\square A\,i(P)QS$ on suunnikas, joten 3.1.9:n mukaan $\overline{SA} = \overline{Q\,i(P)}$. Siten $S\,i(R) \cong SA$. Koska $m \parallel \ell$, niin $PR\ell$ ja koska $t \parallel \ell$, niin $A\,i(P)t$. Toisaalta $P\ell\, i(P)$ ja $R\ell\, i(R)$, joten $A\,i(P)\ell$. Tällöin $A \in \overrightarrow{S\,i(R)}$. Koska siis $S\,i(R) \cong SA$, niin tämä on aksiooman (H8) yksikäsitteisyyspuolen nojalla mahdollista ainoastaan, mikäli $A = i(R)$. Koska $A \in t$, niin siis $i(R) \in t$, kuten pitääkin.

Toisensuuntainen inkluusio $i(m) \supset t$ voidaan todistaa edellisen avulla. Olkoon nimittäin edelleen $R \in m$. Nyt $i(P) \in t$, $t \parallel \ell$ ja m on pisteen $i(i(P)) = P$ kautta kulkeva suora siten, että $m \parallel \ell$. Edellisen inkluusion nojalla $i(t) \subset m$. Täten $t = i(i(t)) \subset i(m)$.

Tapaus b): Leikatkoon m suoraa ℓ pisteessä A. Olkoon $P \in m \setminus A$. Koska i on injektio ja $i(A) = A$, niin $i(P) \neq A$, joten $\overleftrightarrow{A\,i(P)}$ on suora. Osoitetaan, että $i(m) = \overleftrightarrow{A\,i(P)}$. Osoitetaan taas ensin inkluusio $i(m) \subset \overleftrightarrow{A\,i(P)}$. Olkoon $R \in m$ mielivaltainen. Jos $R = A$, niin $i(R) = A \in \overleftrightarrow{A\,i(P)}$. Voidaan siis olettaa, että $R \neq A$. Olkoot suoran ℓ normaalit pisteiden P, R ja A kautta nimeltään n, r ja a. Lauseen 2.4.16 mukaan n, r ja a ovat yhdensuuntaisia. Olkoon Q suorien n ja ℓ sekä S suorien r ja ℓ leikkauspiste. Tässä on kolme mahdollisuutta: joko i) $P \in a$, ii) RPa tai sitten iii) RaP.



Kuva 169: Peilin leikkaavan suoran peilikuva on suora

Tapaus i): Tässä $n = r = a$ ja $A = Q = S$, joten kuvauksen i määritelmän mukaan $i(R) \in \overleftrightarrow{RS} = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{i(P)Q} = \overleftrightarrow{A\,i(P)}$.

Tapaus ii): Koska $r \parallel a$ ja $n \parallel a$, niin myös SQa ja $i(R)\,i(P)a$. SKS-säännön nojalla on $\triangle PQA \cong \triangle i(P)QA$ ja $\triangle RSA \cong \triangle i(R)SA$. Tällöin, koska nyt $\measuredangle RAS = \measuredangle PAQ$, saadaan $\measuredangle i(P)AQ \cong \measuredangle PAQ = \measuredangle RAS \cong \measuredangle i(R)AS = \measuredangle i(R)AQ$, missä viimeinen yhtälö seuraa siitä, että SQa. Koska RPa, niin $R \in \overrightarrow{AP} \setminus \{A\}$, jolloin myös $RP\ell$. Tällöin peilauksen i määritelmän nojalla $i(R)\,i(P)\ell$. Koska nyt $\measuredangle i(P)AQ \cong \measuredangle i(R)AQ$, niin aksiooman (H11) yksikäsitteisyysosan nojalla on oltava $\overrightarrow{A\,i(P)} = \overrightarrow{A\,i(R)}$. Siten $i(R) \in \overrightarrow{A\,i(P)} \subset \overleftrightarrow{A\,i(P)}$.

Tapaus iii): Koska $r \parallel a$ ja $n \parallel a$, niin myös SaQ ja $i(R)A\,i(P)$. Erityisesti siis $S * A * Q$. Valitaan T siten, että $T * A * i(P)$, jolloin lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle SAT \cong \measuredangle i(P)AQ$. Vastaavasti, koska $R * A * P$, niin $\measuredangle RAS \cong \measuredangle PAQ$. Kuten kohdassa ii) on nytkin $\triangle PQA \cong \triangle i(P)QA$ ja $\triangle RSA \cong \triangle i(R)SA$, jolloin saadaan

$$\measuredangle TAS \cong \measuredangle i(P)AQ \cong \measuredangle PAQ \cong \measuredangle RAS \cong \measuredangle i(R)AS.$$

Koska $T * A * i(P)$, niin $T\ell\, i(P)$ ja koska $R * A * P$, niin $R\ell P$. Koska $P\ell\, i(P)$ ja $R\ell\, i(P)$, niin saadaan, että $T\, i(R)\ell$. Tällöin ehdon $\measuredangle TAS \cong \measuredangle i(R)AS$ nojalla on oltava $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{A\,i(R)}$. Koska $T * A * i(P)$, niin $\overrightarrow{AT} \subset \overleftrightarrow{A\,i(P)}$, jolloin siis $i(R) \in \overrightarrow{A\,i(R)} = \overrightarrow{AT} \subset \overleftrightarrow{A\,i(P)}$.

Toisensuuntainen inkluusio $i(m) \supset t$ saadaan taas edellisen avulla, sillä $i(\overleftrightarrow{A\,i(P)}) \subset \overleftrightarrow{A\,i(i(P))} = \overleftrightarrow{AP} = m$, joten $\overleftrightarrow{A\,i(P)} = i(i(\overleftrightarrow{A\,i(P)})) \subset i(m)$. □

LAUSE 4.1.2. *Peilaus suoran suhteen säilyttää välissäolon sekä janojen ja kulmien yhtenevyyden. Tarkemmin sanoen:*

(1) *Jos ℓ on suora ja i peilaus ℓ:n suhteen sekä $A * B * C$, niin $i(A) * i(B) * i(C)$.*
(2) *Jos PR on jana, niin $PR \cong i(P)i(R)$,*
(3) *jos vielä $\measuredangle ABC$ on kulma, niin $\measuredangle i(A)i(B)i(C) \cong \measuredangle ABC$.*

Todistus. (2) Osoitetaan ensin, että $PR \cong i(P)\,i(R)$. Jos $\overleftrightarrow{PR} = \ell$, niin $i(P) = P$ ja $i(R) = R$, ja asia on selvä. Olkoon siis $\overleftrightarrow{PR} \neq \ell$. Tässä on kaksi mahdollisuutta; a) $\overleftrightarrow{PR} \parallel \ell$ tai sitten b) $\overleftrightarrow{PQ}$ leikkaa suoraa ℓ.

Tapaus a): Kuten lauseen 4.1.1 todistuksen a) -kohdassa nähdään nytkin, että myös $\overleftrightarrow{i(P)\,i(R)} \parallel \ell$. Lauseen 3.1.2 nojalla $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{i(P)\,i(R)}$. Koska lauseen 2.4.16 nojalla $\overleftrightarrow{P\,i(P)} \parallel \overleftrightarrow{R\,i(R)}$, niin $\square RP\,i(P)\,i(R)$ on suunnikas. Lauseen 3.1.9 nojalla $i(P)\,i(R) \cong PR$.

Tapaus b): Käytetään lauseen 4.1.1 todistuksen b) -kohdan merkintöjä. Huomataan ensin, että jos $P \neq A$, niin $AP \cong A\,i(P)$. Jos $A = Q$, niin tämä seuraa suoraan peilauksen i määritelmästä ja muuten tämä seuraa siitä, että $\triangle PQA \cong \triangle i(P)QA$. Jos nyt toinen pisteistä P tai R on A, niin asia on selvä, sillä $i(A) = A$. Voidaan siis olettaa, että $P, R \neq A$. Tällöin joko i) $R * A * P$, ii) $A * R * P$ tai iii) $A * P * R$.

Tapaus i): Kuten lauseen 4.1.1 todistuksen -kohdassa nähtiin, $i(R) \in \overrightarrow{AT} \setminus \{A\}$, missä $T * A * i(P)$, joten myös $i(R) * A * i(P)$. Koska nyt siis $i(R)A \cong RA$ ja $A\,i(P) \cong AP$, niin väite $i(R)\,i(P) = RP$ seuraa suoraan aksioomasta (H10).

Tapaus ii): Lauseen 4.1.1 todistuksessa nähtiin myös, että $i(R) \in \overrightarrow{A\,i(P)}$. Koska lisäksi $a \parallel \ell$ ja $r \parallel n$, niin on oltava $A*i(R)*i(P)$. Koska nyt siis $A\,i(R) \cong AP$ ja $A\,i(P) \cong AP$, niin väite seuraa kuten kohdassa i), paitsi että aksiooman (H10) sijasta käytetään lausetta 2.4.2.

Tapaus iii): Palataan kohtaan ii) vaihtamalla merkintöjä ($P \leftrightarrow R$).

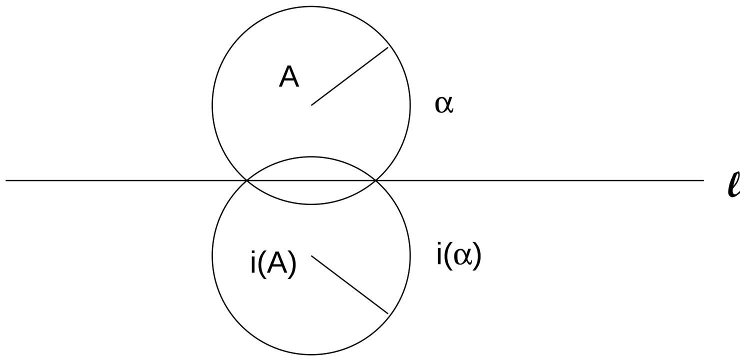
(1) Olkoon $A * B * C$. Tällöin 2.5.4:n nojalla $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Kohdan (2) nojalla pätee tällöin

$$\overline{i(A)\,i(B)} + \overline{i(B)\,i(C)} = \overline{i(A)\,i(C)}.$$

Lauseen 2.5.6 nojalla saadaan heti $i(A) * i(B) * i(C)$.

(3) Olkoon $\measuredangle PQR$ kulma. Tällöin $\triangle PQR$ on kolmio. Lauseen 4.1.1 nojalla $\triangle i(P)i(Q)i(R)$ on myös kolmio ja kohdan (2) sekä SSS-säännön nojalla $\triangle PQR \cong \triangle i(P)i(Q)i(R)$, jolloin $\measuredangle PQR \cong i(P)i(Q)i(R)$. □

LAUSE 4.1.3. *Peilaus suoran suhteen kuvaa ympyrät ympyröiksi. Tarkemmin sanoen, jos ℓ on suora ja i peilaus ℓ:n suhteen sekä α on A-keskinen a-säteinen ympyrä, niin $i(\alpha)$ on $i(A)$-keskinen a-säteinen ympyrä.*



Kuva 170: Ympyrän peilaus suorassa

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Inversio ympyrän suhteen.

Määritellään seuraavaksi peilaus eli inversio ympyrän suhteen:

Määritelmä 4.2. Olkoon α ympyrä, keskipiste A, säde $a > 0$. Merkitään $X = \{\text{pisteet}\} \setminus \{A\}$ ja määritellään kuvaus $i : X \to X$ seuraavasti: Jos $P \in X$, niin $i(P) \in \overrightarrow{AP}$ s.e.

$$\overline{A\,i(P)} = \frac{a^2}{\overline{AP}}.$$

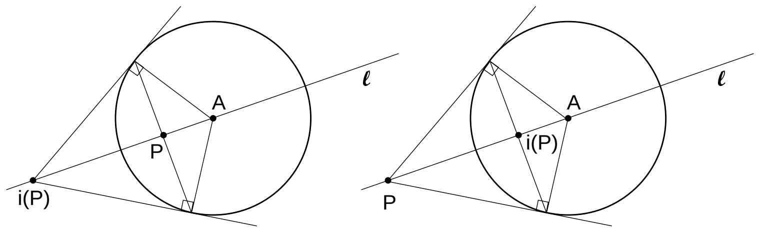
Lauseen 2.6.3 nojalla $i(P)$ on aina olemassa. Lisäksi lauseen 2.5.5. ja aksiooman (H8) nojalla $i(P)$ on yksikäsitteinen. Täten myös $i : X \to X$ on hyvin määritelty kuvaus. Sanotaan, että i on *peilaus eli inversio ympyrän α suhteen.*

Huomautus 37. Suoraan määritelmästä seuraa, että $\overrightarrow{A\,i(P)} = \overrightarrow{AP}$ kaikilla P, joten $\overrightarrow{A\,i(i(P))} = \overrightarrow{A\,i(P)} = \overrightarrow{AP}$ ja

$$\overline{A\,i(i(P))} = \frac{a^2}{\overline{A\,i(P)}} = \frac{a^2}{a^2/\,\overline{AP}} = \overline{AP},$$

joten $i(i(P)) = P$ kaikilla P, joten i on itsensä käänteiskuvaus, $i = i^{-1}$, ja erityisesti i on bijektio $X \to X$.

Huomautus 38. Todistamme myöhemmin, että peilaus tapahtuu kuvan 171 mukaisesti.



KUVA 171: PEILAUS YMPYRÄSSÄ TOTEUTETTUNA EUKLEIDEEN TYYLIIN

Tämä tieto on auttanut keksimään monet seuraavista lauseista.

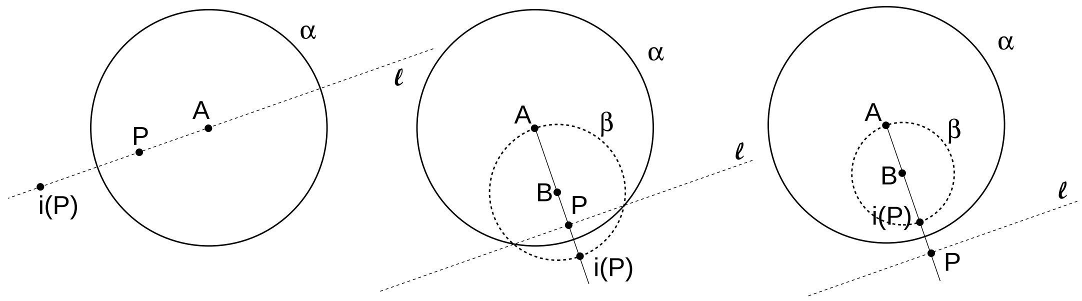
LAUSE 4.1.4. *Olkoon α ympyrä, keskipiste A, säde a sekä i peilaus α:n suhteen. Tällöin $i(\alpha) = \alpha$ ja lisäksi $P \in X$ on α:n sisäpuolella, jos ja vain jos $i(P)$ on α:n ulkopuolella. Edelleen, jos $A * P * R$, niin $A * i(R) * i(P)$.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. $\square$

LAUSE 4.1.5. *Olkoon α ympyrä, sen keskipiste A ja a sen säde ja olkoon i peilaus α:n suhteen sekä ℓ suora. Tällöin $i\big(\ell \setminus \{A\}\big)$ on joko itse $\ell \setminus \{A\}$ tai pisteen A kautta kulkeva ympyrä, josta on poistettu piste A, sen mukaan kuuluuko keskipiste A suoralle ℓ vai ei. Tarkemmin:*

(S) *Olkoon ℓ suora, joka kulkee A:n kautta. Tällöin $i(\ell \setminus \{A\}) = \ell \setminus \{A\}$.*

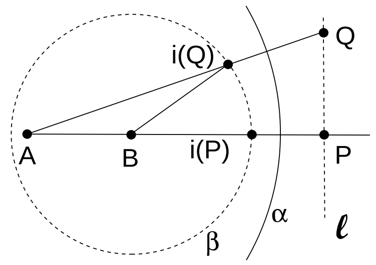
(Y) *Olkoon ℓ suora, joka ei kulje A:n kautta. Olkoon P keskipisteen A kautta kulkevan ℓ:n normaalin ja itsensä ℓ:n leikkauspiste. Tällöin $i(\ell) = \beta \setminus \{A\}$, missä β on ympyrä, jonka keskipiste on $B \in \overrightarrow{AP}$ s.e. $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}$ ja säde on $b = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}$. Erityisesti $A \in \beta$.*



KUVA 172: SUORAN PEILAUS YMPYRÄN SUHTEEN

Todistus. **(S)**: Jos $P \in \ell \setminus \{A\}$, niin peilauksen i määritelmän mukaan $i(P) \in \overrightarrow{AP} \setminus \{A\} \subset \ell \setminus \{A\}$. Siis $i(\ell \setminus \{A\}) \subset \ell \setminus \{A\}$. Käänteinen inkluusio seuraa tästä, sillä $i(i(P)) = P$ kaikilla P, joten juuri todistetun nojalla saadaan $\ell \setminus \{A\} = i(i(\ell \setminus \{A\})) \subset i(\ell \setminus \{A\})$.

(Y): (1) Todistetaan ensin $i(\ell) \subset \beta \setminus \{A\}$: Muistetaan, että a on ympyrän α säde. Koska aina $i(Q) \neq A$, niin riittää osoittaa, että $i(Q) \in \beta$ mielivaltaiselle $Q \in \ell$ eli että $\overline{i(Q)B} = b$, kun $Q \in \ell$. Jos $Q = P$, niin $A * B * i(Q)$ ja $\overline{B\,i(Q)} = \overline{A\,i(Q)} - \overline{AB} = \overline{A\,i(P)} - \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)} = b$ ja asia on selvä.



KUVA 173: $i(\ell) \subset \beta \setminus \{A\}$

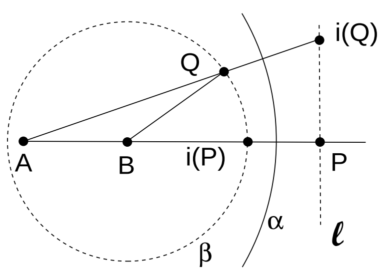
Olkoon siis $Q \neq P$. Koska $B \in \overrightarrow{AP} \setminus \{A\}$ ja $i(Q) \in \overrightarrow{AQ} \setminus \{A\}$, niin $\measuredangle QAP = \measuredangle i(Q)AB$. Koska $\measuredangle APQ$ on suora, pätee tällöin $\cos(\measuredangle i(Q)AB) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}$. Kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle B\, i(Q)A$ antaa

$$\begin{aligned}
\overline{i(Q)B}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - 2\overline{AB}\;\overline{A\,i(Q)}\cos(\measuredangle i(Q)AB) \\
&= \overline{AB}^2 + \overline{A\,i(Q)}\Big(\overline{A\,i(Q)} - 2\overline{AB}\,\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\Big) \\
&= \overline{AB}^2 + \overline{A\,i(Q)}\Big(\frac{a^2}{\overline{AQ}} - 2\cdot\frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}\,\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\Big) \\
&= \overline{AB}^2 + \frac{\overline{A\,i(Q)}}{\overline{AQ}}\Big(a^2 - \frac{a^2}{\overline{AP}}\cdot\overline{AP}\Big) = \overline{AB}^2.
\end{aligned}$$

Siten $\overline{i(Q)B} = \overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)} = b$.

(2) Todistetaan nyt päinvastainen inkluusio $i(\ell) \supset \beta \setminus \{A\}$: Olkoon $Q \in \beta \setminus \{A\}$. Jos $Q \in \overrightarrow{AB}$, niin $Q = i(P)$, sillä kohdan (1) mukaan $i(P) \in \beta \setminus \{A\}$ ja toisaalta $A \in \beta$, koska $\overline{AB} = b$. Nyt lauseen 2.6.1 nojalla suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ ja ympyrällä β ei ole muita leikkauspisteitä kuin A ja $i(P)$. Koska $Q \neq A$, niin on oltava $Q = i(P)$. Siis asia on selvä, jos $Q \in \overrightarrow{AB}$.

Olkoon siis $Q \notin \overrightarrow{AB}$. Tällöin $\triangle QAB$ on kolmio, jolloin kuvauksen i määritelmän nojalla myös $\triangle i(Q)AP$ on kolmio ja $\measuredangle QAB = \measuredangle i(Q)AP$. Merkitään tätä kulmaa $\measuredangle A$.



KUVA 174: $i(\ell) \supset \beta \setminus \{A\}$

Kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle QAB$ antaa $\overline{BQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AB}\;\overline{AQ}\,\cos\measuredangle A$. Koska $Q \in \beta$, niin $\overline{BQ}^2 = b^2 = \overline{AB}^2$, joten tässä on oltava $\overline{AQ}^2 - 2\overline{AB}\;\overline{AQ}\,\cos\measuredangle A =$

0 ja siis $\overline{AQ} - 2\,\overline{AB}\ \cos\measuredangle A = 0$, ja edelleen $\cos\measuredangle A = \frac{\overline{AQ}}{2\,\overline{AB}}$. Toisaalta kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle i(Q)AP$ antaa

$$
\begin{aligned}
\overline{P\,i(Q)}^2 &= \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - 2\,\overline{AP}\ \overline{A\,i(Q)}\ \cos\measuredangle A \\
&= \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - 2\,\overline{AP}\ \frac{a^2}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{2\overline{AB}} \\
&= \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - \ \overline{AP}\,a^2\ \frac{1}{\frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}} \\
&= \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - \ 2\,a^2\,\overline{AP}\frac{\overline{AP}}{a^2} \\
(*) \qquad &= \overline{A\,i(Q)}^2 - \overline{AP}^2.
\end{aligned}
$$

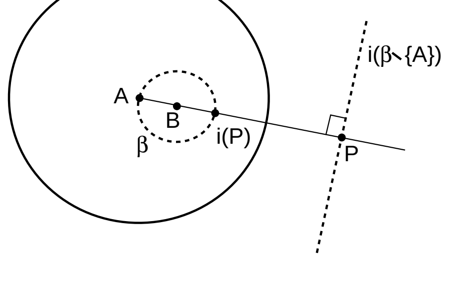
Käytetään uudelleen kosinilausetta kolmioon $i(Q)AP$:

$$\overline{A\,i(Q)}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{P\,i(Q)}^2 - 2\,\overline{AP}\ \overline{P\,i(Q)}\ \cos(\measuredangle AP\,i(Q))$$

ja sijoitetaan tämä kaavaan $(*)$, jolloin $0 = -2\overline{AP}\ \overline{P\,i(Q)}\ \cos(\measuredangle AP\,i(Q))$, joten $\cos(\measuredangle AP\,i(Q)) = 0$. Kosinin määritelmän mukaan näin on ainoastaan silloin, kun $\measuredangle AP\,i(Q)$ on suora kulma. Siten $\overleftrightarrow{P\,i(Q)}$ on $\overleftrightarrow{AP}$:n normaali. Pisteen P määritelmän mukaan myös ℓ on P:n kautta kulkeva suoran $\overleftrightarrow{AP}$ normaali, joten lauseen 2.4.16 nojalla tällöin $\ell = \overleftrightarrow{P\,i(Q)}$ ja siis $i(Q) \in \ell$. Nyt kohdassa (2) on siis todistettu, että $i(Q) \in \ell$ kaikilla $Q \in \beta \setminus \{A\}$. Siten $i(\beta \setminus \{A\}) \subset \ell$, jolloin, koska $i(i(Q)) = Q$ kaikilla Q, niin $\beta \setminus \{A\} = i(i(\beta \setminus \{A\})) \subset i(\ell)$. $\square$

LAUSE 4.1.6. *Olkoon α ympyrä, keskipiste A, säde a ja i peilaus α:n suhteen. Tällöin i kuvaa A:n kautta kulkevan ympyrän suoraksi. Tarkemmin: Olkoon β ympyrä, B sen keskipiste, b sen säde siten, että $A \in \beta$. Tällöin $i(\beta \setminus \{A\})$ on suoran $\overleftrightarrow{AB}$ normaali, joka kulkee pisteen P kautta, missä $P \in \overleftrightarrow{AB}$ siten, että*

$$\overline{AP} = \frac{a^2}{2b}.$$



Kuva 175: Keskipisteen kautta kulkevan ympyrän inversio

Todistus. Koska $A \in \beta$, niin $A \neq B$, joten $\overleftrightarrow{AB}$ on määritelty. Valitaan P kuten väitteessä ja olkoon ℓ pisteen P kautta kulkeva $\overleftrightarrow{AB}$:n normaali. Pitää osoittaa, että $i(\beta \smallsetminus \{A\}) = \ell$.

Nyt ℓ ei kulje A:n kautta ja $\overleftrightarrow{AP}$ on ℓ:n normaali, joten lauseen 4.1.5 nojalla $i(\ell) = \gamma \smallsetminus \{A\}$, missä γ on ympyrä, jonka keskipiste on $C \in \overrightarrow{AP}$ siten, että $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}$ ja säde on $c = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}$. Nyt

$$\overline{A\,i(P)} = \frac{a^2}{\overline{AP}} = \frac{a^2}{a^2\ /\ 2b} = 2b,$$

joten $\overline{AC} = \frac{1}{2}2b = b$. Toisaalta myös $B \in \overrightarrow{AP}$ ja koska $A \in \beta$, niin $\overline{AP} = b$. Siten aksiooman (H8) nojalla $C = B$. Lisäksi $c = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)} = b$, joten $\gamma = \beta$. Näin on nähty, että $i(\ell) = \beta \smallsetminus \{A\}$, joten $i(\beta \smallsetminus \{A\}) = i(i(\ell)) = \ell$. □

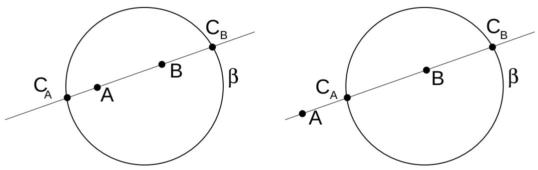
Huomautus 39. Seuraavassa tarkastelemme usein suoraa, joka leikkaa ympyrää. Käytämme seuraavaa merkintäsopimusta.

Jos $A \neq B$ ovat pisteitä ympyrän β sisäpuolella, niin lauseen 2.6.6 nojalla suora $\overleftrightarrow{AB}$ leikkaa ympyrää γ kahdessa eri pisteessä C_1 ja C_2, joille pätee $C_1 * A * C_2$ ja $C_1 * B * C_2$. Tällöin pätee jompikumpi seuraavista

(1) $C_1 * A * B$ ja $A * B * C_2$, tai
(2) $C_2 * A * B$ ja $A * B * C_1$.

Merkitään seuraavassa C_A:lla sitä pistettä C_j, jolle pätee $C_A * A * B$ ja C_B:llä sitä pistettä C_j, jolle pätee $A * B * C_B$.

Jos A on β:n ulkopuolella ja B sisäpuolella, niin toisella C_j:llä on $A * C_j * B$ ja toisella $A * B * C_j$. Tässä tilanteessa merkitään C_A:lla sitä C_j:tä, jolla pätee $A * C_A * B$ ja C_B:llä sitä C_j:tä, jolla pätee $A * B * C_B$.



Kuva 176: Suoran ja ympyrän leikkauspisteiden nimet

LAUSE 4.1.7. *Olkoon α ympyrä, keskipiste A, säde a ja i peilaus α:n suhteen. Olkoon β ympyrä, keskipiste B, säde b siten, että $A \notin \beta$. Tällöin $i(\beta)$ on ympyrä. Tarkemmin:*

1° *Jos $A = B$, niin $i(\beta)$ on ympyrä, jonka keskipiste on A ja säde on a^2/b.*

2° *Jos A on β:n sisäpuolella ja $A \neq B$, niin $i(\beta)$ on ympyrä, jonka keskipiste on $P \in \overrightarrow{AC_A}$ siten, että $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\big)$ ja säde on $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\big)$.*

3° *Jos A on β:n ulkopuolella, niin $i(\beta)$ on ympyrä, jonka keskipiste on $P \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\big)$ ja säde on $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\big)$.*

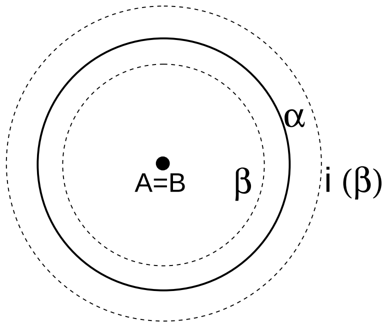
Huomautus 40. Janojen pituuksiksi ehdotetut erotukset ovat positiivisia ja väitteet siis siltä osin järkeviä, sillä tapauksessa 2° on $C_A * A * B$ ja $A * B * C_B$ ja siis, koska B on ympyrän β keskipiste, niin $\overline{AC_A} < \overline{C_A B} = b = \overline{BC_B} < \overline{AC_B}$, jolloin

$$\overline{A\,i(C_A)} = \frac{a^2}{\overline{AC_A}} > \frac{a^2}{\overline{AC_B}} = \overline{A\,i(C_B)},$$

joten $\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)} > 0$. Vastaavasti tapauksessa 3° on $A * C_A * B$ ja $A * B * C_B$, joten tässäkin $\overline{AC_A} < \overline{AB} < \overline{AC_B}$, ja siis $\overline{A\,i(C_A)} > \overline{A\,i(C_B)}$, jolloin $\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)} > 0$.

Lauseen 4.1.7 todistus.

Tapaus 1°: Tässä on oletettu, että $A = B$. On osoitettava, että $i(\beta) = \gamma$, missä γ on A-keskinen ja a^2/b-säteinen ympyrä.

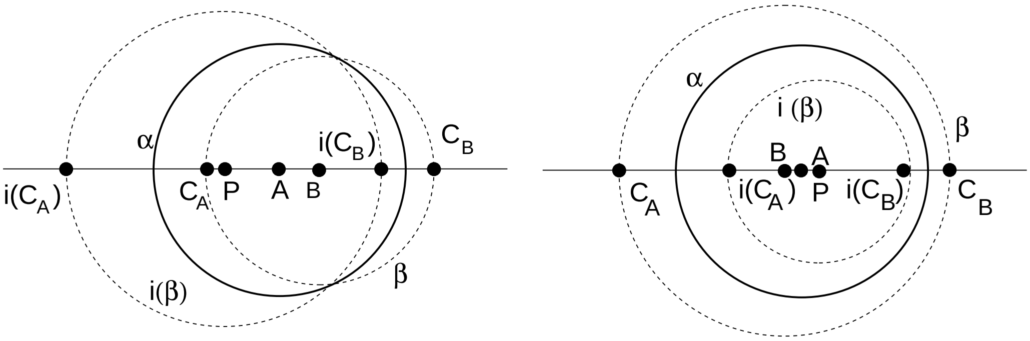


Kuva 177: Samakeskisen ympyrän inversio

Jos $P \in \beta$, niin $\overline{AP} = \overline{BP} = b$, ja siten kuvauksen i määritelmän mukaan $\overline{A\,i(P)} = a^2/b$, joten $i(P) \in \gamma$. Siten $i(\beta) \subset \gamma$.

Vastaavasti, jos $P \in \gamma$, niin $\overline{A\,i(P)} = a^2/\left(a^2\ /\ b\right) = b$, joten $i(P) \in \beta$. Siten $i(\gamma) \subset \beta$, jolloin $\gamma = i(i(\gamma)) < i(\beta)$. Näin $i(\beta) \supset \gamma$. Siis $i(\beta) = \gamma$.

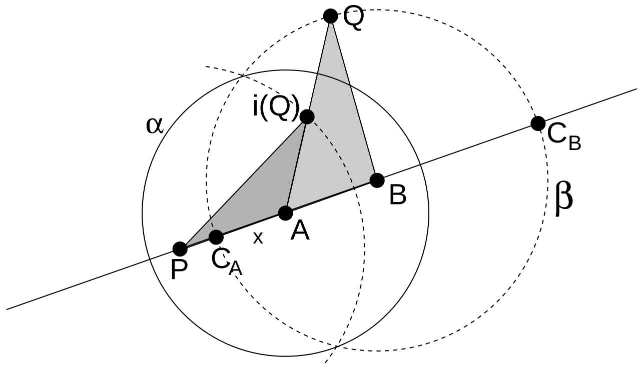
Tapaus 2°: Olkoon nyt A kuvattavan ympyrän β sisäpuolella mutta $A \neq B$. Olkoon $P \in \overline{AC_A}$ siten, että $\overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\right)$ ja $c = \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\right)$ sekä γ P-keskinen, c-säteinen ympyrä. Pitää osoittaa, että $i(\beta) = \gamma$.



Kuva 178: Ympyrän inversio, kun A on β:n sisäpuolella

Osoitetaan ensin, että $i(\beta) \subset \gamma$: Olkoon $Q \in \beta$. On osoitettava, että $i(Q) \in \gamma$. Käsitellään ensin erikoistapaukset: Jos $Q \in \overleftrightarrow{AB}$, niin joko $Q = C_A$ tai $Q = C_B$. Päätellään, että kummassakin tapauksessa on $i(Q) \in \gamma$: Olkoon ensin $Q = C_B$. Koska γ:n keskipiste P on puolisuoralla $\overrightarrow{AC_A}$ ja $C_A * A * C_B$, niin $P * A * C_B$, jolloin myös $P * A * i(C_B)$, sillä $i(Q) \in \overrightarrow{AQ}$ kaikilla Q. Tällöin $\overline{P\,i(C_B)} = \overline{PA} + \overline{A\,i(C_B)} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\big) + \overline{A\,i(C_B)} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\big) = c$ ja siten $i(C_B) = i(Q) \in \gamma$, kuten pitikin. Olkoon sitten $Q = C_A$. Nyt $i(C_A) \in \overrightarrow{AC_A}$ ja koska P:n määritelmän mukaan $P \in \overrightarrow{AC_A}$ ja $\overline{AP} < \overline{A\,i(C_A)}$, niin $i(C_A) * P * A$. Tällöin $\overline{P\,i(C_A)} = \overline{A\,i(C_A)} - \overline{AP} = \overline{A\,i(C_A)} - \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\big) = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\big) = c$, ja siten myös $i(C_A) = i(Q) \in \gamma$. Pisteiden C_A ja C_B kuvat ovat siis ympyrällä γ, kuten pitääkin.

Voidaan siis olettaa, että kuvattava piste Q ei ole suoralla $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{C_AC_B}$, vaan $\triangle QAB$ on kolmio. Koska $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ja $i(Q) \in \overrightarrow{AQ} \setminus \{A\}$, niin myös $\triangle PA\,i(Q)$ on tällöin kolmio. Merkitään nyt $x = \overline{AC_A}$. Koska $C_A * B * C_B$, niin $\overline{C_AC_B} = \overline{C_AB} + \overline{BC_B} = 2b$ ja tällöin, koska $C_A * A * C_B$, pätee $\overline{AC_B} = \overline{C_AC_B} - \overline{AC_A} = 2b - x$ ja, koska $C_A * A * B$, niin $\overline{AB} = \overline{C_AB} - \overline{AC_A} = b - x$.



Kuva 179: Kosinilauseen käyttö

Edelleen i:n määritelmän mukaan $\overline{A\,i(C_A)} = \frac{a^2}{\overline{AC_A}} = \frac{a^2}{x}$ ja $\overline{A\,i(C_B)} = \frac{a^2}{2b-x}$, jolloin $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{2b-x}\big)$. Jos merkitään vielä $y = \overline{AQ}$, niin $\overline{A\,i(Q)} = \frac{a^2}{y}$.

Koska $C_A * A * B$ ja $P \in \overrightarrow{AC_A}$, niin $P * A * B$. Koska lisäksi $i(Q) \in \overrightarrow{AQ} \setminus \{A\}$, niin kulmat $\measuredangle i(Q)AP = \measuredangle QAP$ ja $\measuredangle QAB$ ovat toistensa täydennyskulmia. Kosinin määritelmän mukaan tällöin

$$(*) \qquad \cos\measuredangle QAB = -\cos\measuredangle i(Q)AP.$$

Kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle QAB$ antaa

$$\overline{BQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\,\overline{AB}\;\overline{AQ}\cos\measuredangle QAB, \text{eli}$$
$$b^2 = (b-x)^2 + y^2 - 2\,(b-x)\,y\cos\measuredangle QAB,$$

josta saadaan käyttäen tietoa $(*)$

$$\cos\measuredangle i(Q)AP = -\frac{(b-x)^2 + y^2 - b^2}{2\,(b-x)\,y} = \frac{2bx - x^2 - y^2}{2\,(b-x)\,y}.$$

Toisaalta kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle i(Q)AP$ antaa

$$\overline{P\,i(Q)}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - 2\,\overline{AP}\;\overline{A\,i(Q)}\,\cos\measuredangle i(Q)AP,$$

joten

$$\begin{aligned}
\overline{P\,i(Q)}^2 &= \left(\frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{2b-x}\Big)\right)^2 + \Big(\frac{a^2}{y}\Big)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\,\Big(\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{2b-x}\Big)\cdot\frac{a^2}{y}\cdot\frac{2bx - x^2 - y^2}{2(b-x)y}\\
&= a^4\left[\frac{1}{4}\left(\frac{2b-2x}{x(2b-x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2b-2x}{x(2b-x)}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{x(2b-x)y^2}{2(b-x)y}\right]\\
&= a^4\left[\left(\frac{b-x}{x(2b-x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2(b-x)\,x\,(2b-x)}{x(2b-x)\,y\,2(b-x)\,y} + \frac{2(b-x)y^2}{x(2b-x)y\,2\,(b-x)y}\right]\\
&= a^4\left[\left(\frac{b-x}{x(2b-x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x(2b-x)}\right]\\
&= a^4\,\frac{b^2 - 2bx + x^2 + 2bx - x^2}{x^2(2b-x)^2}\\
&= \left[a^2\frac{b}{x(2b-x)}\right]^2.
\end{aligned}$$

Siten

$$\overline{P\,i(Q)} = a^2\cdot\frac{b}{x(2b-x)} = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{x} + \frac{1}{2b-x}\big) = \tfrac{1}{2}\big(\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{2b-x}\big) = \tfrac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\big) = c,$$

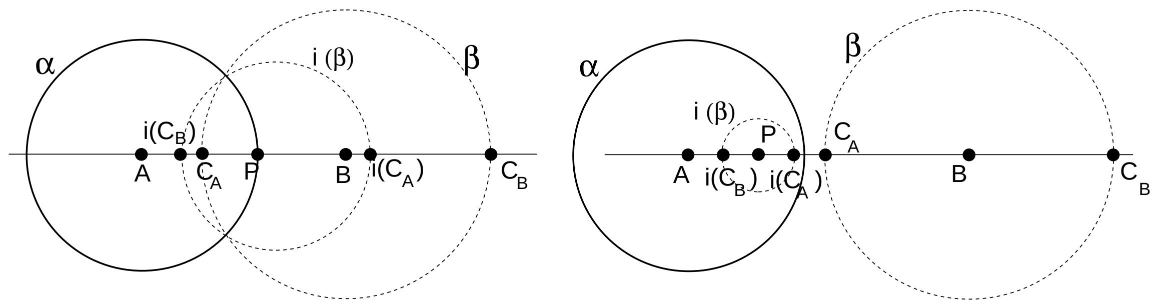
joten $i(Q) \in \gamma$. On siis näytetty, että tapauksessa 2° pätee $i(\beta) \subset \gamma$.

Osoitetaan sitten $i(\beta) \supset \gamma$ eli käänteinen inkluusio. Selvitetään ensin pisteiden $i(C_A)$, P, A ja $i(C_B)$ sijainti suoralla $\overleftrightarrow{AP}$: Koska $\overline{AP} < c$, niin A on γ:n sisäpuolella. Lisäksi $\overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{AB}$ ja koska $C_A, C_B \in \overleftrightarrow{AB}$, niin lauseen 4.1.5 mukaan $i(C_A)$, $i(C_B) \in \overleftrightarrow{AP}$. Toisaalta C_A, $C_B \in \beta$, joten juuri edellä todistetun inkluusion nojalla $i(C_A)$, $i(C_B) \in \gamma$. Siten $i(C_A)$ ja $i(C_B)$ ovat suoran $\overleftrightarrow{AP}$ ja γ:n leikkauspisteet. Koska A ja P ovat γ:n sisäpuolella, niin lauseen 2.6.5 nojalla joko $i(C_A) * A * P$ tai $i(C_A) * P * A$. Koska $\overline{Ai(C_A)} = \frac{1}{2}\Big(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\Big) = \overline{AP} + c > c = \overline{P\,i(C_A)}$, niin on oltava $i(C_A) * P * A$. Tällöin $P * A * i(C_B)$.

Inkluusion $i(\beta) \supset \gamma$ todistamiseksi voidaan nyt **soveltaa jo todistamaamme inkluusiota ympyrään** γ. Tämän mukaan $i(\gamma) \subset \delta$, missä δ on D-keskinen d-säteinen ympyrä, jonka keskipiste on sellainen $D \in \overrightarrow{A\,i(C_B)}$, että $\overline{AD} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(i(C_B))} - \overline{A\,i(i(C_A))}\big) = \frac{1}{2}\big(\overline{AC_B} - \overline{AC_A}\big)$ ja säde $d = \frac{1}{2}\big(\overline{AC_B} + \overline{AC_A}\big)$. Koska $C_A * A * B$ ja $P \in \overrightarrow{AC_A} \setminus \{A\}$, niin $P * A * B$ ja koska $P * A * i(C_B)$, niin $\overrightarrow{A\,i(C_B)} = \overrightarrow{AB}$, jolloin $D \in \overrightarrow{AB}$. Käyttäen toisensuuntaisen inkluusion todistuksen merkintöjä saadaan

$\overline{AB} = b - x = \frac{1}{2}(2b - x - x) = \frac{1}{2}\left(AC_B - \overline{AC_A})\right) = \overline{AD}$, joten aksiooman (H8) nojalla on oltava $B = D$. Lisäksi $d = \frac{1}{2}(2b-x+x) = b$, joten $\delta = \beta$. Siten $i(\gamma) \subset \beta$, jolloin $\gamma = i(i(\gamma)) \subset i(\beta)$. Näin on tapaus 2° kokonaan selvitetty.

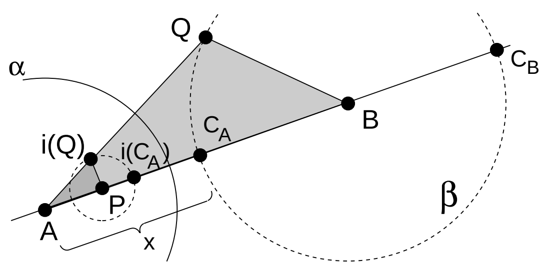
Tapaus 3°: Tarkastellaan lopuksi tilannetta, jossa inversioympyrän keskipiste A on kuvattavan ympyrän β ulkopuolella. Nyt osoitetaan, että $i(\beta) = \gamma$, missä γ:n keskipiste on sellainen $P \in \overrightarrow{AB}$, että $\overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\right)$ ja säde $c = \frac{1}{2}(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)})$.



Kuva 180: Ympyrän inversio, kun A on β:n ulkopuolella

Osoitetaan ensin, että $i(\beta) \subset \gamma$. Olkoon $Q \in \beta$. Selvitetään taas ensin erikoistapaus $Q \in \overleftrightarrow{AB}$, jossa joko $Q = C_A$ tai sitten $Q = C_B$. Katsotaan pisteiden A, $i(C_B)$, P ja $i(C_A)$ järjestys suoralla $\overleftrightarrow{AP}$: Koska $A * C_A * C_B$, niin lauseen 4.1.4 nojalla $A * i(C_B) * i(C_A)$, jolloin $\overline{A\,i(C_B)} < \overline{A\,i(C_A)}$. Koska $i(C_A)$, $i(C_B)$, $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ja $\overline{A\,i(C_B)} = \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_B)} + \overline{A\,i(C_B)}\right) < \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\right) = \overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\right) < \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_A)}\right) = \overline{A\,i(C_A)}$, niin on oltava $A * i(C_B) * P$ ja $A * P * i(C_A)$. Jos nyt olisi $Q = C_A$, niin olisi $\overline{P\,i(Q)} = \overline{A\,i(C_A)} - \overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_A)}\right) = c$, joten $Q \in \gamma$. Vastaava päättely saadaan C_B:llekin.

Voidaan siis olettaa, että $Q \neq C_A$, C_B, jolloin $\triangle QAB$ on kolmio. Koska $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ja $i(Q) \in \overrightarrow{AQ} \setminus \{A\}$, niin myös $\triangle PA\,i(Q)$ on tällöin kolmio.



Kuva 182: Kosinilauseen käyttö, kun A on β:n ulkopuolella

Merkitään, kuten edellä, $x = \overline{AC_A}$. Myös nyt käsiteltävässä tilanteessa on $C_A * B * C_B$, joten $\overline{C_AC_B} = 2b$, mutta nyt $A * C_A * C_B$, joten $\overline{AC_B} = \overline{AC_A} + \overline{C_AC_B} = 2b + x$

ja, koska $A * C_A * B$, niin $\overline{AB} = \overline{AC_A} + \overline{C_A B} = b + x$. Edelleen $\overline{A\,i(C_A)} = \frac{a^2}{x}$ ja $\overline{A\,i(C_B)} = \frac{a^2}{2b+x}$, jolloin $\overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{2b+x}\right)$. Jos merkitään vielä $y = \overline{AQ}$, niin $\overline{A\,i(Q)} = \frac{a^2}{y}$.

Koska $i(Q) \in \overrightarrow{AQ} \smallsetminus \{A\}$ ja $P \in \overline{AB} \smallsetminus \{A\}$, niin $\measuredangle QAB = \measuredangle i(Q)AP$, joten myös $\cos(\measuredangle QAB) = \cos(\measuredangle i(Q)AP)$. Kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle QAB$ antaa nyt

$$b^2 = (b+x)^2 + y^2 - 2(b+x)y\cos(\measuredangle QAB),$$

josta saadaan

$$\cos(\measuredangle QAB) = \frac{(b+x)^2 + y^2 - b^2}{2(b+x)y} = \frac{2bx + x^2 + y^2}{2(b+x)y}.$$

Toisaalta kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle i(Q)AP$ antaa

$$\overline{Pi(Q)}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - 2\overline{AP}\,\overline{A\,i(Q)}\cos(\measuredangle i(Q)AP),$$

joten

$$\begin{aligned}
\overline{Pi(Q)}^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{2b+x}\right)\right)^2 + \left(\frac{a^2}{y}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{2b+x}\right)\cdot\frac{a^2}{y}\cdot\frac{2bx + x^2 + y^2}{2(b+x)y} \\
&= a^4\left[\frac{1}{4}\left(\frac{2b+2x}{x(2b+x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2b+2x}{x(2b+x)}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{x(2b+x)+y^2}{2(b+x)y}\right] \\
&= a^4\left[\left(\frac{b+x}{x(2b+x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2(b+x)\cdot x(2b+x)}{x(2b+x)\cdot y\cdot 2(b+x)y} - \frac{2(b+x)y^2}{x(2b+x)y2(b+x)y}\right] \\
&= a^4\left[\left(\frac{b+x}{x(2b+x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x(2b+x)}\right] \\
&= a^4\,\frac{b^2 + 2xb + x^2 - 2xb - x^2}{(x(2b+x))^2} = \left(a^2\cdot\frac{b}{x(2b+x)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned}
\overline{Pi(Q)} &= a^2\frac{b}{x(2b+x)} = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2b+x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{2b+x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\right) = c,
\end{aligned}$$

joten $i(Q) \in \gamma$.

Osoitetaan lopuksi, että $\gamma \subset i(\beta)$. Koska nyt $\overline{AP} > c$, niin A on γ:n ulkopuolella. Kuten kohdassa 2° ovat nytkin $i(C_A)$ ja $i(C_B)$ ympyrän γ ja suoran $\overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{AB}$ leikkauspisteet. Koska $C_A, C_B \in \overrightarrow{AB}$, niin $i(C_A)$ ja $i(C_B) \in \overrightarrow{AB}$. Koska lisäksi $A*C_A*C_B$, niin lauseen 4.1.4 mukaan $A*i(C_B)*i(C_A)$. Koska P on γ:n keskipiste, on oltava $i(C_A)*P*i(C_B)$ lauseen 2.6.6 nojalla. Tällöin $A*i(C_B)*P$ ja $A*P*i(C_A)$.

Inkluusion $i(\beta) \supset \gamma$ todistamiseksi voidaan nyt taas soveltaa jo todistamaamme inkluusiota ympyrään γ ja huomataan, että $i(\gamma) \subset \delta$, missä δ on D-keskinen, d-säteinen ympyrä, missä $D \in \overrightarrow{AP}$ s.e. $\overline{AD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AC_B} - \overline{AC_A}\right)$. Tällöin $\overline{AB} = b+x = \frac{1}{2}(2b+x+x) = \frac{1}{2}\left(\overline{AC_B} + \overline{AC_A}\right) = \overline{AD}$ ja, koska $B \in \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$, niin aksiooman (H8) nojalla on oltava $B = D$. Lisäksi $d = \frac{1}{2}(2b+x-x) = b$, joten $\delta = \beta$. Siten $i(\gamma) \subset \beta$, jolloin $\gamma = i(i(\gamma)) \subset i(\beta)$. Kaikenkaikkiaan $\gamma = i(\beta)$. $\square$

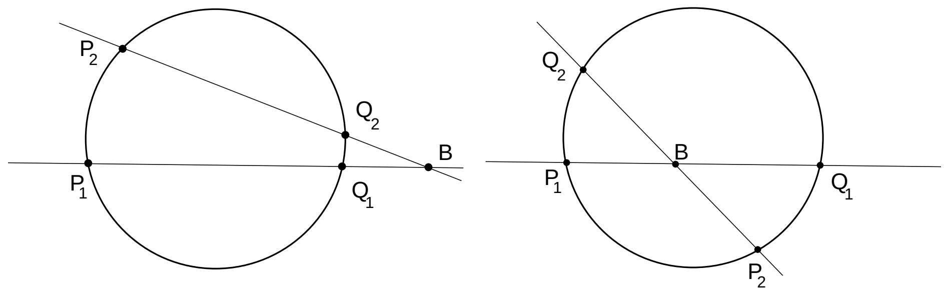
Pisteen potenssi ympyrän suhteen.

Määritelmä 4.3. Olkoon α ympyrä, keskipiste A, säde a. Määritellään *pisteen* $B \notin \alpha \cup \{A\}$ *potenssi ympyrän* α *suhteen*, $P(B,\alpha)$, seuraavasti: jos B on α:n sisäpuolella, niin $P(B,\alpha) = a^2 - \overline{AB}^2$, ja jos B on α:n ulkopuolella, niin $P(B,\alpha) = \overline{AB}^2 - a^2$. Siis aina $P(B,\alpha) > 0$.

Seuraavan lauseen avulla näkee, että potenssilla $P(B,\alpha)$ on se merkillinen ominaisuus, että jos B:n kautta kulkeva suora leikkaa α:aa pisteissä P ja Q, niin aina

$$\overline{BP} \cdot \overline{BQ} = P(B,\alpha),$$

riippumatta suorasta ℓ.

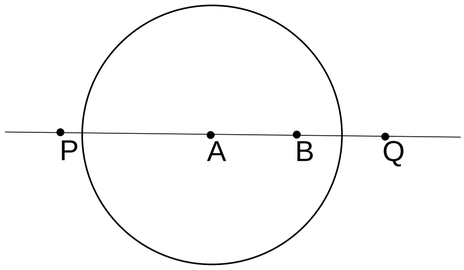


KUVA 184: $P(B,\alpha) = \overline{BP_1} \cdot \overline{BQ_1} = \overline{BP_2} \cdot \overline{BQ_2}$

LAUSE 4.1.8. *Olkoon α A-keskinen a-säteinen ympyrä ja $B \notin \alpha$, $B \neq A$. Olkoon lisäksi ℓ pisteen B kautta kulkeva suora, joka leikkaa α:aa pisteissä P ja Q, $P \neq Q$. Tällöin $\overline{BP} \cdot \overline{BQ} = P(B,\alpha)$.*

Todistus. Tässä on kaksi tapausta sen mukaan, onko B ympyrän α sisällä (tapaus a) vai ulkopuolella (tapaus b). Kummassakin tapauksessa on taas kaksi eri mahdollisuutta: Suora ℓ voi kulkea (tapaus i) tai olla kulkematta (tapaus ii) keskipisteen A kautta.

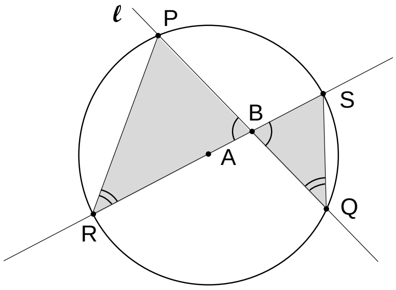
Tapaus ai): Vaihtamalla tarvittaessa merkintöjä ($P \leftrightarrow Q$) voidaan olettaa, että $P * A * B$ ja $A * B * Q$.



Kuva 185: Tapaus ai)

Tällöin $\overline{BP} = \overline{AB} + \overline{AP} = \overline{AB} + a$ ja $\overline{BQ} = \overline{AQ} - \overline{AB} = a - \overline{AB}$. Siten $\overline{BP} \cdot \overline{BQ} = (\overline{AB} + a)(a - \overline{AB}) = a^2 - \overline{AB}^2 = P(B, \alpha)$.

Tapaus aii): Lauseen 2.6.6. nojalla $\overleftrightarrow{AB}$ leikkaa α:aa kahdessa eri pisteessä R ja S, olkoot ne nimetty niin, että $R * A * B$ ja $A * B * S$ (ja $R * B * S$).



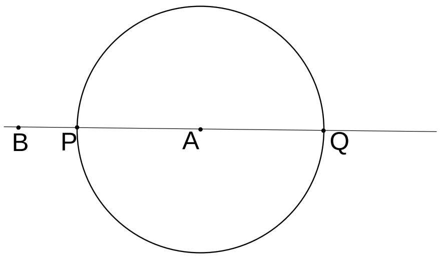
Kuva 186: Tapaus aii)

Koska $P * B * Q$, niin lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle PBR \cong \measuredangle SBQ$. Lisäksi $QB\overleftrightarrow{PS}$ ja $RB\overleftrightarrow{PS}$, joten $QR\overleftrightarrow{PS}$. Tällöin voidaan soveltaa lausetta 3.1.21, jonka mukaan $\measuredangle PRS \cong \measuredangle PQS$, joten $\measuredangle PRB \cong \measuredangle BQS$. Koska kolmioissa $\triangle PBR$ ja $\triangle BSQ$ kulmasumma on 180, niin pätee myös $\measuredangle RPB \cong \measuredangle BSQ$ ja kolmiot $\triangle PBR$ ja $\triangle SBQ$ ovat siten samanmuotoisia. Lauseen 3.1.10 nojalla tällöin

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{RB}}{\overline{BQ}}.$$

Näin ollen $\overline{PB} \cdot \overline{BQ} = \overline{BR} \cdot \overline{BS}$. Nyt $\overleftrightarrow{BS}$ kulkee A:n kautta, joten kohdan ai) mukaan $\overline{BR} \cdot \overline{BS} = P(B, \alpha)$.

Tapaus bi):

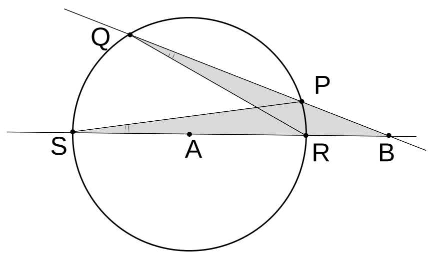


Kuva 187: Tapaus bi)

Tässä $B * P * Q$ tai $B * Q * P$, ja vaihtamalla tarvittaessa merkintöjä $(P \leftrightarrow Q)$ voidaan olettaa, että $B * P * Q$. Koska $P * A * Q$, niin $B * P * A$ ja $B * A * Q$. Tällöin $\overline{BP} = \overline{BA} - \overline{PA} = \overline{BA} - a$ ja $\overline{BQ} = \overline{BA} - \overline{AQ} = \overline{BA} + a$. Siten

$$\overline{BP} \cdot \overline{BQ} = (\overline{AB} - a) \cdot (\overline{BA} + a) = \overline{AB}^2 - a^2 = P(B, \alpha).$$

Tapaus bii):



Kuva 188: Tapaus bii)

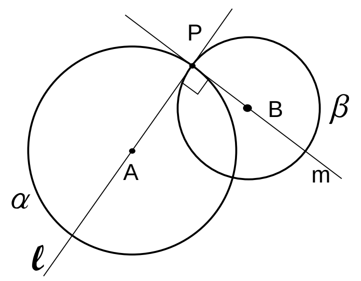
Tässä voidaan taas olettaa, että $B * P * Q$. Suora $\overleftrightarrow{BA}$ leikkaa lauseen 2.6.6 mukaan α:aa pisteissä R, S siten, että $R * A * S$. Voidaan olettaa, että $B * R * A$, jolloin $B * R * S$. Tällöin $\overleftrightarrow{SPRB}$. Koska $B * P * Q$, niin $\overleftrightarrow{BPRQ}$ ja (H7):n nojalla $\overleftrightarrow{QSPR}$. Tällöin 3.1.21:n mukaan $\measuredangle PSR \cong \measuredangle PQR$ ja siten $\measuredangle PSB \cong \measuredangle BQR$. Koska kolmioissa $\triangle BQR$ ja $\triangle BPS$ on kulma $\measuredangle B$ yhteinen ja kulmasumma 180, on myös $\measuredangle BQR \cong \measuredangle BPS$. Siten $\triangle BQR \sim \triangle BPS$. Tällöin lauseen 3.1.10 nojalla

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BR}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}},$$

josta saadaan $\overline{PB} \cdot \overline{BQ} = \overline{BR} \cdot \overline{BS}$. Kohdan bi) nojalla $\overline{BR} \cdot \overline{BS} = P(B, \alpha)$ tässä viimeisessäkin tapauksessa. □

Ortogonaalisista ympyröistä.

Määritelmä 4.4. Kaksi ympyrää α ja β (keskipisteet A ja B, säteet a ja b) ovat *ortogonaalisia*, jos ne leikkaavat toisiaan joissakin pisteissä P ja Q ja niiden tangentit pisteessä P ovat toistensa normaalit ja myös tangentit toisessa leikkauspisteessä Q ovat toistensa normaalit.

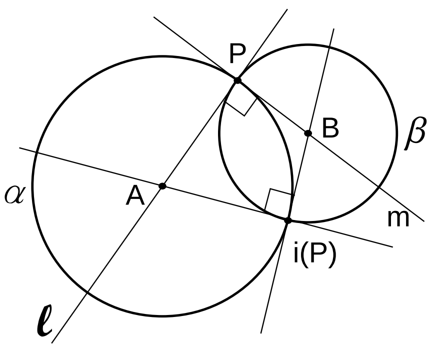


Kuva 189: Ortogonaaliset ympyrät

LAUSE 4.1.9. *Olkoot α ja β kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteissä P ja Q. Olkoon α:n keskipiste A ja β:n keskipiste B. Tällöin α ja β ovat ortogonaalisia, jos ja vain jos P:n kautta kulkeva α:n tangentti kulkee B:n kautta.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Olkoon ℓ pisteen P kautta kulkeva β:n tangentti ja m pisteen P kautta kulkeva α:n tangentti. Oletuksen nojalla $\ell \perp m$. Lauseen 2.6.8 mukaan $\overleftrightarrow{AP} \perp m$. Tällöin lauseen 2.4.16 mukaan $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$ ja väite seuraa.

"$\Leftarrow$":



Kuva 190: Ortogonaalisuusehto

Olkoon ℓ pisteen P kautta kulkeva ympyrän β tangentti. Lauseen 2.6.8 mukaan $\ell \perp \overleftrightarrow{BP}$, jolloin saadaan, käyttäen lausetta 2.6.8 toiseen suuntaan, että $\overleftrightarrow{BP}$ on ympyrän α tangentti, ja siis P:n kautta kulkevat tangentit ovat toistensa normaaleja. Pitää vielä osoittaa toisen leikkauspisteen Q olemassaolo ja Q:n kautta kulkevien tangenttien kohtisuoruus. Koska $\overleftrightarrow{BP} \perp \overleftrightarrow{AP}$, niin $A \neq B$ ja $P \notin \overleftrightarrow{AP}$. Olkoon i peilaus suoran $\overleftrightarrow{AB}$ suhteen, jolloin $i(P) \neq P$. Lauseen 4.1.2 nojalla $BP \cong i(B)i(P)$ ja silloin $\overline{BP} = \overline{B\,i(P)}$, joten $i(P) \in \beta$. Vastaavasti päätellään, että $i(P) \in \alpha$. Siten $i(P) \neq P$ on haettu α:n ja β:n toinen leikkauspiste. Koska $\measuredangle BPA$ on suora kulma, niin 4.1.2:n nojalla myös $\measuredangle i(B)i(P)i(A) = \measuredangle B\,i(P)A$ on suora kulma. Lauseen 2.6.8 mukaan tällöin $\overleftrightarrow{B\,i(P)}$ on α:n tangentti ja $\overleftrightarrow{A\,i(P)}$ on β:n tangentti ja väite seuraa. □

LAUSE 4.1.10. *Olkoot α ja β ortogonaalisia ympyröitä, keskipisteinään A ja B. Tällöin A on on β:n ulkopuolella ja B on on α:n ulkopuolella.*

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

LAUSE 4.1.11. *Olkoot α ja β ympyröitä, keskipisteinään A ja B ja säteinä a ja b. Tällöin α ja β ovat ortogonaalisia ympyröitä, jos ja vain jos B on on α:n ulkopuolella ja*

$$b^2 = P(B, \alpha),$$

missä $P(B,\alpha)$ on pisteen B potenssi ympyrän α suhteen.

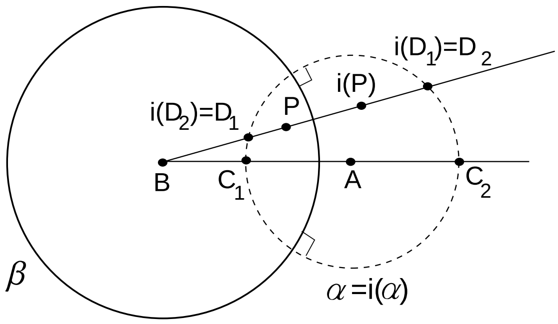
Todistus. "$\Rightarrow$": Lauseen 4.1.10 nojalla B on ympyrän α ulkopuolella. Olkoon P ympyröiden α ja β leikkauspiste. Ortogonaalisuuden nojalla $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{BP}$, joten kulma $\measuredangle APB$ on suora. Koska $P \in \alpha$, niin $\overline{AP} = a$ ja vastaavasti $\overline{BP} = b$. Pythagoraan lause antaa $\overline{AB}^2 - b^2 = a^2$, joten $b^2 = \overline{AB}^2 - a^2 = P(B, \alpha)$.

"$\Leftarrow$": Koska B on ympyrän α ulkopuolella, niin $P(B,\alpha) = \overline{AB}^2 - a^2$ ja siten $\overline{AB}^2 - b^2 = a^2$. Nyt ei voi olla $\overline{AB} - b \geq a$, sillä jos näin olisi, niin olisi myös $\overline{AB} + b > a$ ja siten $\overline{AB}^2 - b^2 = (\overline{AB} - b)(\overline{AB} + b) > a^2$. Siis on oltava $\overline{AB} - b < a$. Vastaavasti päätellään, että $\overline{AB} + b > a$. Koska $b^2 = \overline{AB}^2 - a^2 < \overline{AB}^2$, niin $b < \overline{AB}$. Näin ollen voidaan valita S siten, että $A * S * B$ ja $\overline{BS} = b$. Valitaan lisäksi piste T siten, että $A * B * T$ ja $\overline{BT} = b$. Tällöin S ja T ovat ympyrällä β ja A, S, B, T samalla suoralla tässä järjestyksessä. Lisäksi $\overline{AS} = \overline{AB} - b < a$, joten S on α:n sisäpuolella ja $\overline{AT} = \overline{AB} + b > a$, joten T on α:n ulkopuolella. Tällöin lauseen 2.6.12 nojalla ympyrät α ja β leikkavat toisensa. Olkoon P niiden yhteinen piste. P ei voi olla suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, sillä S ja T ovat tällä suoralla ja lisäksi ympyrällä β, mutta kumpikaan näistä ei ole ympyrällä α eikä lauseen 2.6.11 mukaan muita suoran $\overleftrightarrow{AB}$ ja ympyrän α yhteisiä pisteitä ole olemassa. Siten $\triangle APB$ on kolmio. Kosinilauseen nojalla

$$\overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PA} \cdot \overline{PB} \cos \measuredangle P.$$

Nyt $\overline{PA} = a$ ja $\overline{PB} = b$, joten $\cos \measuredangle P = \frac{1}{ab}\big(a^2 + b^2 - \overline{AB}^2\big) = 0$, koska $\overline{AB}^2 - b^2 = a^2$. Siten kosinin määritelmän mukaan $\measuredangle P$ on suora. Tällöin $\overleftrightarrow{AP}$ on β:n tangentti ja kulkee A:n kautta, joten α ja β ovat ortogonaalisia lauseen 3.1.2b nojalla. $\square$

LAUSE 4.1.12. *Olkoot α ja β ortogonaalisia ympyröitä keskipisteinään A ja B ja säteinä a ja b. Olkoon i* **peilaus β:n suhteen.** *Tällöin $i(\alpha) = \alpha$. Lisäksi piste P on α:n sisäpuolella, jos ja vain jos myös sen kuva $i(P)$ on α:n sisäpuolella.*



KUVA 191: LAUSE 4.1.12

Todistus. Olkoot A ja B sekä a ja b ympyröiden α ja β keskipisteet ja säteet. Peilauksen määritelmän mukaan, kun $P \neq B$, niin $i(P) \in \overrightarrow{BP}$ ja $\overline{B\,i(P)} = \frac{b^2}{\overline{BP}}$. Lauseen 4.1.10 mukaan B on α:n ulkopuolella, joten $\overrightarrow{BA}$ leikkaa α:aa kahdessa pisteessä C_1 ja C_2 siten, että $B * C_1 * C_2$ (lause 2.6.2). Lauseen 4.1.7 kohdan 3° mukaan $i(\alpha)$ on ympyrä, jonka keskipiste P kuuluu puolisuoralle $\overrightarrow{BA}$ ja jolla $\overline{BP} = \frac{1}{2}\big(\overline{B\,i(C_1)} + \overline{B\,i(C_2)}\big)$, ja säde s on $\frac{1}{2}\big(\overline{B\,i(C_2)} - \overline{B\,i(C_1)}\big)$. Koska $B * C_1 * A$, niin $\overline{BC_1} = \overline{BA} - a$, joten $\overline{B\,i(C_1)} = \frac{b^2}{\overline{BA} - a}$ ja koska $B * A * C_2$, niin $\overline{BC_2} = \overline{BA} + a$, ja $\overline{B\,i(C_2)} = \frac{b^2}{\overline{BA} + a}$. Siten

$$\overline{BP} = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{\overline{BA} - a} + \frac{b^2}{\overline{BA} + a}\right) = \frac{b^2\,\overline{BA}}{\overline{BA}^2 - a^2} = \frac{b^2\,\overline{BA}}{P(B,\alpha)} = \overline{BA},$$

missä viimeinen yhtälö seuraa ympyröiden α ja β ortogonaalisuudesta ja lauseesta 4.1.11. Koska $P \in \overrightarrow{BA}$, niin on siis $P = A$.

Vastaava lasku antaa $s = b^2/P(B,\alpha) = a$, joten $i(\alpha) = \alpha$.

Todistetaan sitten väitteen jälkimmäinen osa, jonka mukaan P on α:n sisäpuolella, jos ja vain jos $i(P)$ on α:n sisäpuolella.

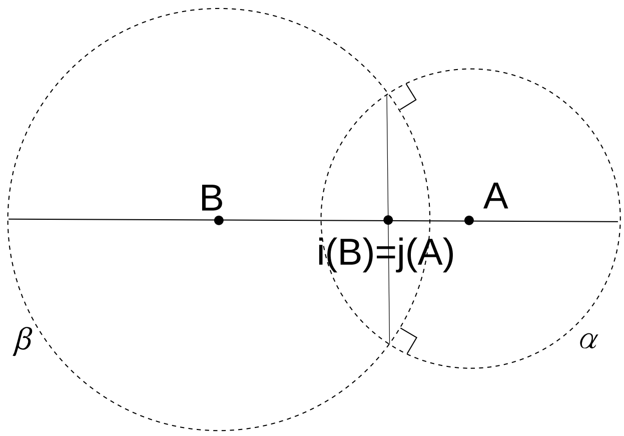
1°: Oletetaan ensin, että P on α:n sisäpuolella. Tällöin $\overrightarrow{BP}$ leikkaa ympyrää α kahdessa pisteessä D_1 ja D_2, joille $B * D_1 * D_2$. Lauseen 4.1.4 nojalla $B * D_1 * P$ ja $B * i(D_2) * i(D_1)$ sekä $B * i(P) * i(D_1)$ ja vielä $B * i(D_2) * i(P)$, mistä voidaan päätellä, että $i(D_2) * i(P) * i(D_1)$. Nyt lauseen alkuosan nojalla $i(D_1)$, $i(D_2) \in \alpha$, joten $i(P)$ on α sisäpuolella.
2°: Olkoon seuraavaksi $i(P)$ ympyrän α sisäpuolella. Tällöin on kohdan 1° nojalla myös $P = i(i(P))$ ympyrän α:n sisäpuolella. □

Lauseelle 4.1.12 pätee myös käänteinen tulos, jonka mukaan α ja β ovat ortogonaalisia ainoastaan silloin, kun $i(\alpha) = \alpha$. Itse asiassa pätee vielä voimakkaampi.

LAUSE 4.1.13. *Olkoot α ja β ympyröitä ja i peilaus β:n suhteen. Tällöin α ja β ovat ortogonaalisia mikäli on olemassa edes yksi piste $P \in \alpha \setminus \beta$, jolle $i(P) \in \alpha$.*

*Todistus.*Olkoot ympyröiden α ja β keskipisteet A ja B ja säteet a ja b. Koska $P \notin \beta$, niin $i(P) \neq P$. Koska $i(P) \in \overrightarrow{BP}$, niin $B * P * i(P)$ tai $B * i(P) * P$. Lauseen 2.6.6. nojalla kummassakin tapauksessa B on α:n ulkopuolella. Tällöin lauseen 4.1.11 nojalla riittää osoittaa, että $b^2 = P(B,\alpha)$. Koska $P \neq i(P) \in \alpha$, niin lauseen 4.1.8 nojalla $P(B,\alpha) = \overline{BP} \cdot \overline{B\,i(P)}$. Inversiokuvauksen i määritelmän mukaan $\overline{B\,i(P)} = \frac{b^2}{\overline{BP}}$, joten saadaan $P(B,\alpha) = \overline{BP} \cdot \frac{b^2}{\overline{BP}} = b^2$, kuten pitääkin. □

LAUSE 4.1.14. *Olkoot α ja β ortogonaalisia ympyröitä, keskipisteet A ja B, sekä i peilaus α:n ja j peilaus β:n suhteen. Tällöin $i(B) = j(A)$.*



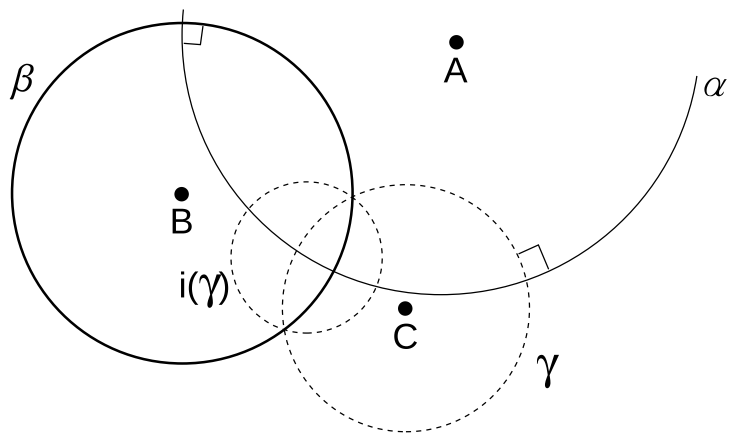
Kuva 192: Keskipisteiden peilikuva

Todistus. Olkoot α:n ja β:n säteet a ja b. Lauseen 4.1.10 mukaan A on β:n ulkopuolella ja B α:n ulkopuolella, eli $\overline{AB} > a$ ja $\overline{AB} > b$. Koska $i(B) \in \overrightarrow{AB}$ ja $\overline{A\,i(B)} = \frac{a^2}{\overline{AB}} < \frac{a^2}{a} = a < \overline{AB}$, niin $i(B) \in AB \subset \overrightarrow{BA}$. Koska myös $j(A) \in \overrightarrow{BA}$, niin riittää osoittaa, että $\overline{B\,i(B)} = \overline{Bj(A)}$. Koska $i(B) \in AB$, niin

$\overline{B\,i(B)} = \overline{AB} - \overline{Ai(B)} = \overline{AB} - \frac{a^2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AB}}\left(\overline{AB}^2 - a^2\right) = \frac{1}{\overline{AB}}P(B,\alpha)$. Lauseen 4.1.11 ja α:n ja β:n ortogonaalisuuden nojalla $P(B,\alpha) = b^2$, joten $\overline{B\,i(B)} = \frac{b^2}{\overline{AB}}$. Toisaalta j:n määritelmän mukaan $\overline{Bj(A)} = \frac{b^2}{\overline{BA}}$, joten $\overline{B\,i(B)} = \overline{Bj(A)}$. □

Todistetaan vielä yksi seuraavassa luvussa tarvittava[23] tulos, joka koskee ortogonaalisuuden säilymistä inversioissa:

LAUSE 4.1.15. *Olkoot β ja γ ympyröitä, jotka molemmat ovat ortogonaalisia jotakin kolmatta ympyrää α kohtaan. Oletetaan lisäksi, että γ ei kulje β:n keskipisteen kautta.* **Olkoon i peilaus β:n suhteen.** *Tällöin myös $i(\gamma)$ on ympyrä, joka on α:a vastaan ortogonaalinen.*



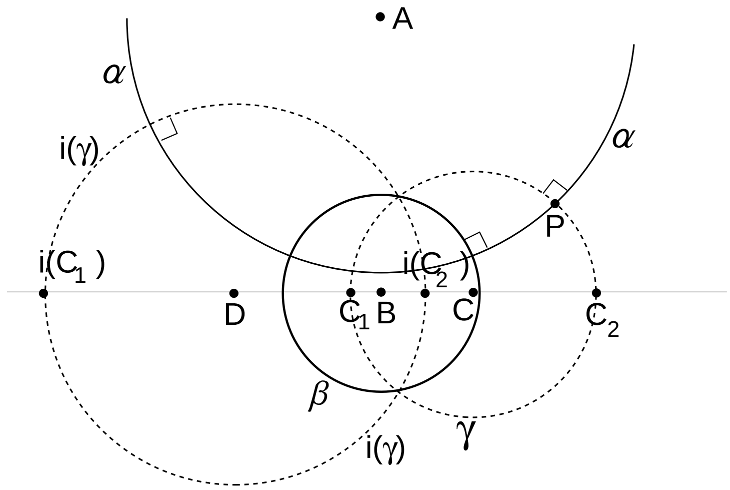
KUVA 193: $i(\gamma) \perp \alpha$

Todistus. Olkoot A, B ja C ympyröiden α, β ja γ keskipisteet ja a, b ja c niiden säteet vastaavassa järjestyksessä. Koska $B \notin \gamma$, niin on kaksi mahdollisuutta: a) B on γ:n sisäpuolella tai sitten b) B on γ:n ulkopuolella.

Tapaus a): Jos B on γ:n sisäpuolella niin voi olla $B = C$, jolloin oletuksen ja lauseen 4.1.11 nojalla $b^2 = P(B,\alpha) = c^2$, joten $b = c$ ja siten $\beta = \gamma$ ja väite pätee triviaalisti, sillä $i(\beta) = \beta$.

Voidaan siis olettaa, että $B \neq C$. Olkoot C_1 ja C_2 suoran $\overleftrightarrow{BC}$ ja ympyrän γ leikkauspisteet siten, että $C_1 * B * C$ ja $B * C * C_2$ (Ks. lause 2.6.6 ja kuva 194).

[23](Euklidisilla) ortogonaalisilla ympyröillä ja inversiolla on huomattavaa merkitystä epäeuklidisessa geometriassa, koska Poincarén mallin käsittely perustuu niihin.



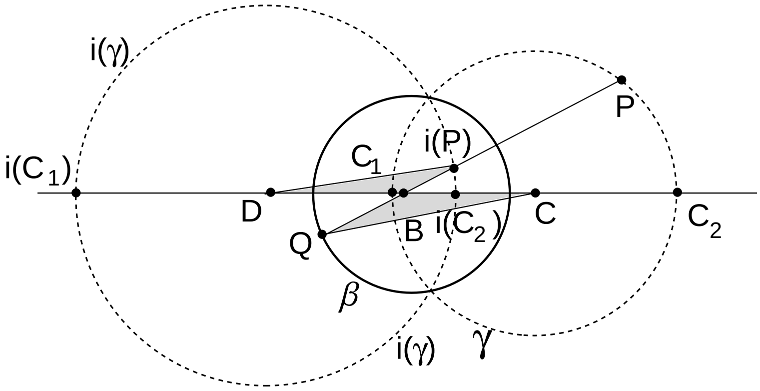
Kuva 194: Tässä B on γ:n sisäpuolella

Lauseen 4.1.7 kohdan 2° mukaan $i(\gamma)$ on ympyrä, jonka keskipiste on $D \in \overrightarrow{BC_1}$ siten, että $\overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} - \overline{B\,i(C_2)}\right)$ ja säde on $d = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} + \overline{B\,i(C_2)}\right)$.

Tavoitteena on osoittaa, että $i(\gamma)$:n ja α:n tangentit niiden leikkauskohdassa ovat toistensa normaaleja, eli että $i(\gamma)$:n tangentti tuossa pisteessä kulkee keskipisteen A kautta, kun tiedetään, että vastaava pätee γ:n ja α:n tangenteille niiden leikkauskohdassa $P \in \alpha \cap \gamma$. Ideana on huomio, että $i(\alpha) = \alpha$, joten $i(P) \in \alpha \cap i(\gamma)$. Osoittautuu, että on tarpeellista tietää, että piste $P \in \alpha \cap \gamma$ voidaan valita siten, että $P \neq C_1$, C_2. Aloitamme todistamalla tämän. Antiteesi: P:n valinta ei onnistu. Koska α ja γ leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä, niin tämä on mahdollista vain, jos nämä pisteet ovat juuri C_1 ja C_2. Jos ℓ_1 on C_1:n kautta kulkeva $\overleftrightarrow{CC_1}$:n normaali, niin ℓ_1 on γ:n tangentti ja kulkee lauseen 4.1.9 mukaan A:n kautta. Vastaavasti, jos ℓ_2 on C_2:n kautta kulkeva $\overleftrightarrow{CC_2}$:n normaali, niin myös ℓ_2 on γ:n tangentti ja kulkee sekin lauseen 4.1.9 mukaan A:n kautta. Koska $C_1 \neq C_2$, niin ℓ_1 ja ℓ_2 ovat saman suoran eri normaaleina yhdensuuntaiset, eivätkä voi leikata A:ssa. Antiteesi on väärä eli piste $P \in \alpha \cap \gamma$ voidaan valita siten, että $P \neq C_1$, C_2.

Seuraavaksi osoitetaan toinen aputulos: $P \neq i(P)$. Koska i on inversio ympyrässä β, niin tälle riittää, että $P \notin \beta$. Tehdään antiteesi: $P \in \beta$. Olkoon ℓ pisteen P kautta kulkeva β:n tangentti ja m P:n kautta kulkeva γ:n tangentti. Koska sekä β että γ ovat ortogonaalisia α:n kanssa, niin lauseen 4.1.9 nojalla sekä ℓ että m kulkevat A:n kautta. Koska $P \in \alpha$, niin $P \neq A$, jolloin $\ell = \overleftrightarrow{PA} = m$. Nyt $\overleftrightarrow{BP} \perp \ell$ ja $\overleftrightarrow{CP} \perp m$, joten $\overleftrightarrow{BP}$ ja $\overleftrightarrow{CP}$ ovat saman suoran $\ell = m$ pisteen P kautta kulkevia normaaleja ja siten samoja eli $\overleftrightarrow{BP} = \overleftrightarrow{CP}$. Siten $P \in \overleftrightarrow{BC}$. Koska $P \in \gamma$ ja C_1 ja C_2 ovat $\overleftrightarrow{BC}$:n ja γ:n ainoat leikkauspisteet, on oltava joko $P = C_1$ tai $P = C_2$, mikä on vastoin P:n valintaa. Siis $P \notin \beta$ ja erityisesti $i(P) \neq P$.

Piste P on valittu joukosta $\alpha \cap \gamma$, joten triviaalisti $i(P) \in i(\gamma)$ ja lauseen 4.1.12 nojalla $i(P) \in \alpha$. Siten $i(P)$ on ympyröiden α ja $i(\gamma)$ leikkauspiste, joten 4.1.9:n nojalla riittää osoittaa, että $i(P)$:n kautta kulkeva $i(\gamma)$:n tangentti kulkee A:n kautta. Koska B on γ:n sisällä ja $P \in \gamma$, niin $\overleftrightarrow{BP}$ leikkaa γ:aa myös jossakin pisteessä Q, jolle pätee $Q * B * P$. (Lause 2.6.6.)



KUVA 195: $\triangle DB\,i(P) \cong \triangle CBQ$

Todistuksen seuraavana vaiheena osoitetaan, että kolmiot $\triangle DB\,i(P)$ ja $\triangle CBQ$ ovat samanmuotoiset. Pisteen C_1:n valinnan nojalla $C_1 * B * C$ ja koska $D \in \overrightarrow{BC_1} \setminus \{B\}$, niin $D * B * C$. Koska $i(P) \in \overrightarrow{BP}$ ja $Q * B * P$, niin $i(P) * B * Q$. Koska $P \neq C_1, C_2$, niin $P \notin \overleftrightarrow{BC}$, jolloin $\measuredangle DB\,i(P)$ on kulma. Tällöin ristikulmalauseen 2.4.6 mukaan $\measuredangle DB\,i(P) \cong \measuredangle CBQ$. Koska $C_1 * B * C$, ja $B * C * C_2$, niin $\overline{BC_1} = \overline{C_1C} - \overline{BC} = c - \overline{BC}$ ja $\overline{BC_2} = \overline{BC} + \overline{CC_2} = \overline{BC} + c$. Siten $\overline{BC_2} - \overline{BC_1} = 2\overline{BC}$ ja $\overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} - \overline{B\,i(C_2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{\overline{BC_1}} - \frac{b^2}{\overline{BC_2}}\right) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{\overline{BC_2}-\overline{BC_1}}{\overline{BC_1}\cdot\overline{BC_2}}\right) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{2\overline{BC}}{\overline{BC_1}\cdot\overline{BC_2}}\right)$. Toisaalta lauseen 4.1.8 nojalla $\overline{BC_1} \cdot \overline{BC_2} = P(B,\gamma) = \overline{BQ} \cdot \overline{BP}$. Tällöin $\overline{BD} = \frac{b^2}{2}\frac{2\overline{BC}}{\overline{BC_1}\cdot\overline{BC_2}} = \frac{b^2}{2}\frac{2\overline{BC}}{\overline{BQ}\cdot\overline{BP}}$. Tässä $\frac{b^2}{\overline{BP}} = \overline{B\,i(P)}$, joten saadaan $\overline{BD} = \frac{\overline{BC}\,\overline{B\,i(P)}}{\overline{BQ}}$ ja edelleen

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B\,i(P)}}{\overline{BQ}}.$$

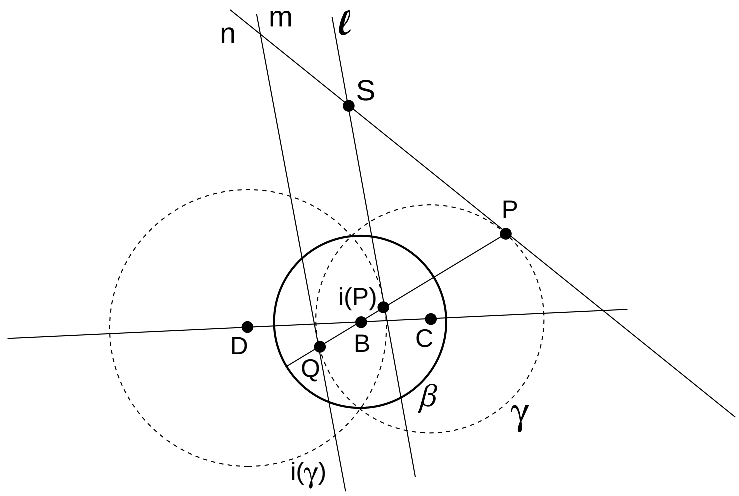
Merkitään tätä suhdetta luvulla k. Nyt ehdon $\measuredangle DB\,i(P) \cong \measuredangle CBQ$ ja kosinilauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\overline{Di(P)}^2 &= \overline{BD}^2 + \overline{B\,i(P)}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{B\,i(P)} \cos \measuredangle DB\,i(P) \\
&= k^2\overline{BC}^2 + k^2\overline{BQ}^2 + k\overline{BC} \cdot k\overline{BQ} \cos \measuredangle CBQ \\
&= k^2\overline{CQ}^2
\end{aligned}$$

ja siten myös $\frac{\overline{Di(P)}}{\overline{CQ}} = k$. Tällöin lauseen 3.1.12 nojalla $\triangle DB\,i(P) \sim \triangle CBQ$.

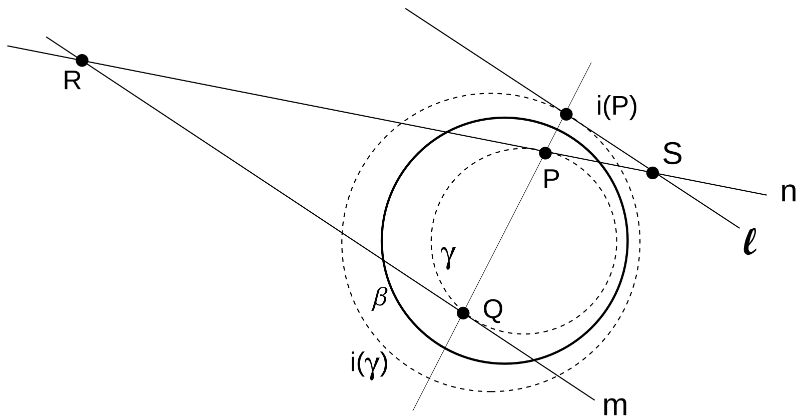
Erityisesti siis $\measuredangle i(P)DB \cong \measuredangle QCB$. Koska $D{*}B{*}C$, niin $\measuredangle i(P)DB \cong \measuredangle i(P)DC$ ja $\measuredangle QCB \cong \measuredangle QCD$ ja, koska $i(P) * B * Q$, voidaan soveltaa lausetta 2.4.15, jonka mukaan suorat $\overleftrightarrow{Di(P)}$ ja $\overleftrightarrow{CQ}$ ovat yhdensuuntaisia.

Olkoon nyt ℓ pisteen $i(P)$ kautta kulkeva $i(\gamma)$:n tangentti. Kuten edellä todettiin, riittää osoittaa, että ℓ kulkee A:n kautta. Olkoon lisäksi m pisteen Q kautta kulkeva ympyrän γ tangentti ja n pisteen P kautta kulkeva γ:n tangentti.



Kuva 196: ℓ kulkee A:n kautta

Koska D on $i(\gamma)$:n keskipiste, niin $\overleftrightarrow{Di(P)} \perp \ell$ ja vastaavasti $\overleftrightarrow{CQ} \perp m$. Koska siis $\overleftrightarrow{Di(P)} \parallel \overleftrightarrow{CQ}$, niin lauseen 3.1.6 nojalla $\ell \parallel m$. Koska $\overleftrightarrow{PQ}$ leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{BC}$ pisteessä $B \neq C$, niin $\overleftrightarrow{PQ}$ ei kulje γ:n keskipisteen C kautta. Tällöin lauseen 3.1.3 nojalla m ja n leikkaavat toisensa jossakin pisteessä R siten, että $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle RQP$. Koska $\ell \parallel m$, niin lauseen 3.1.2 nojalla myös ℓ ja m leikkaavat toisensa, olkoon leikkauspiste S. Koska $P \neq i(P) \in \overrightarrow{BP}$, ja $Q * B * P$, niin joko $Q * P * i(P)$ tai $Q * i(P) * P$.

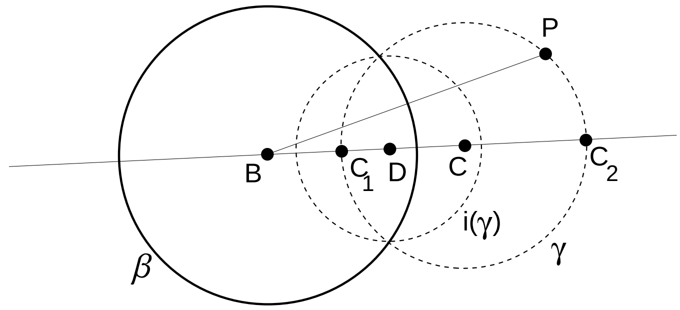


Kuva 197: $\triangle QPR \sim \triangle i(P)PS$

Kummassakin tapauksessa voidaan lauseen 3.1.11 tai sen jälkeisen huomautuksen avulla päätellä, että $\triangle QPR \sim \triangle i(P)PS$. Koska $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle RQP$ niin tällöin $\measuredangle S\,i(P)P \cong \measuredangle RQP \cong \measuredangle RPQ \cong \measuredangle SP\,i(P)$, josta edelleen lauseen 2.4.9 b):n nojalla $SP \cong S\,i(P)$. Lauseen 2.6.9 nojalla tällöin S on janan $P\,i(P)$ keskinormaalilla. Koska P, $i(P) \in \alpha$, niin $AP \cong A\,i(P)$ ja lauseen 2.6.9 nojalla myös A on janan $P\,i(P)$ keskinormaalilla. Koska n on γ:n pisteen P kautta kulkeva tangentti, niin lauseen 4.1.9 nojalla n kulkee A:n kautta. Toisaalta S:n valinnan nojalla $S \in n$. Siten pisteet A ja S ovat molemmat sekä n:llä että janan $P\,i(P)$ keskinormaalilla

Koska n kulkee P:n kautta mutta keskinormaali ei, niin nämä ovat eri suoria, ja voivat siis leikata vain yhdessä pisteessä. Siis $A = S$. Koska S:n valinnan nojalla $S \in \ell$, niin $A \in \ell$ ja väite on todistettu tapauksessa a).

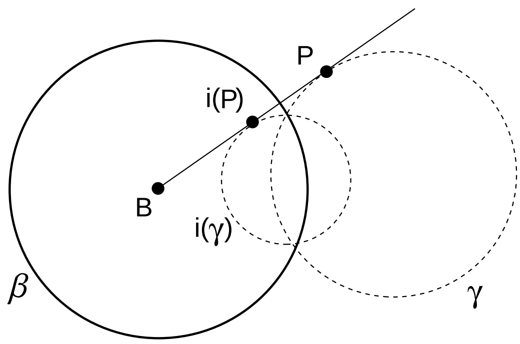
Tapaus b): Olkoon B ympyrän γ ulkopuolella. Lauseen 2.6.6. mukaisesti $\overleftrightarrow{BC}$ leikkaa γ:aa kahdessa pisteessä, olkoot ne C_1 ja C_2, siten, että $B * C_1 * C_2$ ja $C_1 * C * C_2$. Lauseen 4.1.7 kohdan 3° mukaan $i(\gamma)$ on ympyrä, jonka keskipiste on $D \in \overrightarrow{BC}$ siten, että $\overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} + \overline{B\,i(C_2)}\right)$ ja säde on $s = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} - \overline{B\,i(C_2)}\right)$.



Kuva 198: Tapaus b)

Kuten tapauksessa a) nähdään nytkin, että voidaan valita piste $P \in \alpha \cap \gamma$ siten, että $P \neq C_1, C_2$, jolloin $P \notin \beta$ ja $i(P) \neq P$ ja riittää osoittaa, että $i(P)$:n kautta kulkeva $i(\gamma)$:n tangentti kulkee A:n kautta.

Nyt $\overleftrightarrow{BP}$ leikkaa γ:aa ainakin pisteessä P, mutta ei välttämättä muualla, vaan $\overleftrightarrow{BP}$ voi olla γ:n tangentti. Saadaan siis kaksi tapausta: i) $\overleftrightarrow{BP}$ on γ:n tangentti tai ii) $\overleftrightarrow{BP}$ leikkaa γ:aa jossakin toisessa pisteessä Q.

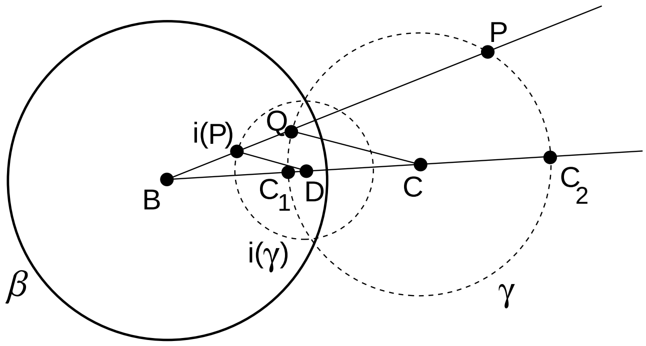


Kuva 199: Tapaus i)

Tapaus i): Jos $\overleftrightarrow{BP}$ on γ:n tangentti, niin $\overleftrightarrow{BP}$ on myös $i(\gamma)$:n tangentti, mikä perustellaan seuraavasti: $i(P)$ on $\overleftrightarrow{BP}$:n ja $i(\gamma)$:n leikkauspiste ja muita leikkauspisteitä ei ole, sillä jos $S \in \overleftrightarrow{BP} \cap i(\gamma)$, niin $S \neq B$, joten $i(S) \in \overleftrightarrow{BP} \cap i(i(\gamma)) = \overleftrightarrow{BP} \cap \gamma$ ja siten $i(S) = P$ ja silloin $S = i(i(S)) = i(P)$.

Koska $P \in \alpha \cap \gamma$, niin $\overleftrightarrow{BP}$ kulkee A:n kautta, koska α ja γ ovat ortogonaalisia (lause 4.1.9). Toisaalta $i(P) \in \alpha \cap i(\gamma)$ (lause 4.1.12), ja $i(\gamma)$:n ja α:n ortogonaalisuus seuraa siis tapauksessa i) lauseesta 4.1.9.

Tapaus ii): Oletetaan nyt, että $\overleftrightarrow{BP} \cap \gamma = \{P, Q\}$, $P \neq Q$.



Kuva 200: Tapaus ii)

Koska B on γ:n ulkopuolella, on joko $B * Q * P$ tai $B * P * Q$. Koska $B * C_1 * C_2$ ja $C_1 * C * C_2$, niin $\overline{BC_2} - \overline{BC_2} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_1C} + \overline{CC_2} = 2\overline{C_1C}$ ja tällöin, koska $B * C_1 * C_2$, niin:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} + \overline{B\,i(C_2)}\right)}{\overline{BC_1} + \overline{C_1C}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{\overline{BC_1}} + \frac{b^2}{\overline{BC_2}}\right)}{\overline{BC_1} + \frac{1}{2}\left(\overline{BC_2} - \overline{BC_1}\right)} \\ &= b^2\,\frac{\frac{1}{\overline{BC_1}} + \frac{1}{\overline{BC_2}}}{\overline{BC_1} + \overline{BC_2}} = \frac{b^2}{\overline{BC_1} \cdot \overline{BC_2}}.\end{aligned}$$

Toisaalta $\frac{\overline{B\,i(P)}}{\overline{BQ}} = \frac{b^2}{\overline{BQ} \cdot \overline{BP}}$. Lauseen 4.1.8 nojalla $\overline{BQ} \cdot \overline{BP} = \overline{BC_1} \cdot \overline{BC_2}$, joten saadaan

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{b^2}{\overline{BC_1} \cdot \overline{BC_2}} = \frac{b^2}{\overline{BQ} \cdot \overline{BP}} = \frac{\overline{B\,i(P)}}{\overline{BQ}}.$$

Nyt $D \in \overrightarrow{BC}$ ja $iP \in \overrightarrow{BQ}$ sekä tapauksessa $B * P * Q$ että tapauksessa $B * Q * P$, joten $\measuredangle DB(i)P = \measuredangle CBQ$. Tällöin, aivan samoin kuin kohdassa a), nähdään, että $\triangle DB(i)P \sim \triangle CBQ$. Täsmälleen samalla päätelyllä kuin kohdassa a) voidaan tästä päätellä, että $i(P)$:n kautta kulkeva $i(\gamma)$:n tangentti kulkee A:n kautta ja väite seuraa. $\square$

4.2. Poincarén malli.

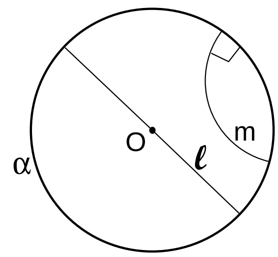
Tässä luvussa esitellään ns. Poincarén[24] malli, joka toteuttaa kaikki muut Hilbertin aksioomat paitsi paralleeliaksiooman. Tällaisen mallin olemassaolo osoittaa, että **paralleeliaksioomaa ei voi todistaa muiden aksioomien avulla**. Samalla malli antaa välineen havainnollistaa seuraavan luvun 3.3 tuloksia eli *hyperbolista geometriaa*, jossa oletetaan paralleeliaksiooman sijasta sen negaatio. Tällöinhän syntyy aivan uudenlaista geometriaa ja tuloksia, jotka tuntuvat ihmeellisiltä — esimerkiksi KKK-sääntö kolmioiden yhtenevyydelle on voimassa.

[24] Jules Henri Poincaré 1854–1912. Ranska.

Tarkastellaan jotakin euklidisen geometrian mallia; tällaisiahan on olemassa, esimerkiksi tavallinen koordinaattigeometria $\mathbb{R}^2$:ssa. Kiinnitetään jokin piste O. Olkoon α O-keskinen 1-säteinen ympyrä. Merkitään

$$\mathcal{A} = \{P \mid P \text{ on } \alpha\text{:n sisäpuolella } \}.$$

Sovitaan, että Poincarén mallin "pisteet" ovat $\mathcal{A}$:n pisteet. Erotukseksi euklidisista pisteistä kutsutaan näitä tarvittaessa $\mathcal{P}$-pisteiksi. Poincarén mallin suorat eli $\mathcal{P}$-suorat määritellään seuraavasti: ℓ on $\mathcal{P}$-suora, mikäli $\ell = \mathcal{A} \cap \beta$, missä β on joko O:n kautta kulkeva suora tai α:n kanssa ortogonaalinen ympyrä. Jos β on suora, kutsutaan vastaavaa $\mathcal{P}$-suoraa $\mathcal{A} \cap \beta$ ensimmäisen tyypin suoraksi, muuten toisen tyypin suoraksi.



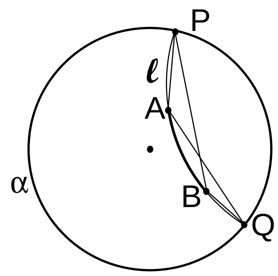
Kuva 201: Tyyppien 1 ja 2 suorat

Relaatio *piste sisältyy suoraan* määritellään tavallisen joukko-opin mielessä, kuten käyttämässämme euklidisen geometrian mallissa: $P \in \ell$.

Välissäolo ja yhtenevyys aiotaan määritellä "janan pituuden" käsitteen avulla. Pituuskäsite on ensin määriteltävä malliin sopivasti. Sitä varten otetaan käyttöön ns. hyperbolisen etäisyyden käsite: Olkoon ℓ $\mathcal{P}$-suora. Lauseiden 2.6.2 ja 2.6.12 nojalla ℓ leikkaa α:aa täsmälleen kahdessa $\mathcal{P}$-pisteessä, olkoot ne P ja Q. Olkoot A ja B $\mathcal{P}$-suoran ℓ eri pisteitä. Sanotaan, että luku

$$d(A,B) = \left| \log \frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}} \right| \in \mathbb{R}$$

on A:n ja B:n *hyperbolinen etäisyys.*



Kuva 202: Hyperbolinen etäisyys

Huomautus 41. Määritelmä on vähän huonosti asetettu: Onko kahdella $\mathcal{P}$-pisteellä aina hyperbolinen etäisyys, ts. onko olemassa $\mathcal{P}$-suoraa ℓ, joka kulkee niiden kautta, ja toisaalta, onko $d(A, B)$ yksikäsitteinen. Pisteiden P ja Q nimienvaihto ei tietenkään muuta $d(A, B)$:n lukuarvoa, mutta voisiko ehkä olla olemassa kaksi tällaista $\mathcal{P}$-suoraa, jolloin saataisin kokonaan eri pisteet P ja Q ja näistä syntyvät etäisyydet voisivat — ainakin periaatteessa — olla eri lukuja. Nämä ongelmat poistuvat, kun osoitetaan, että (H1) pätee. Tätä ei kuitenkaan tehdä vielä.

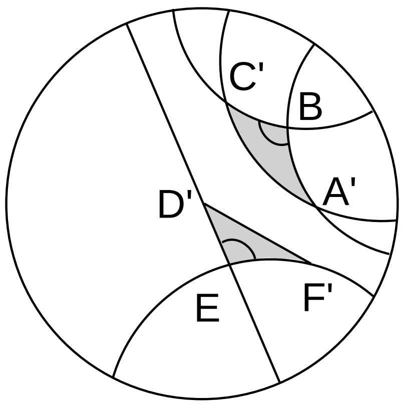
Kun nyt etäisyyskäsite on määritelty, niin voidaan määritellä välissäolo: Olkoot A, B, C eri $\mathcal{P}$-pisteitä. Sanotaan, että B on A:n ja B:n *välissä*, $A * B * C$, mikäli A, B ja C ovat samalla $\mathcal{P}$-suoralla ja

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$

Janojen yhtenevyys määritellään näin: Janat AB ja CD ovat *yhteneviä*, $AB \cong CD$, mikäli

$$d(A, B) = d(C, D).$$

Kulmien yhtenevyys määritellään SSS-säännön inspiroimina seuraavasti: Kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ ovat *yhtenevät*, $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, mikäli seuraava pätee: Jos $A' \in \overrightarrow{BA}$, $C' \in \overrightarrow{BC}$, $F' \in \overrightarrow{EF}$ ja $D' \in \overrightarrow{ED}$ siten, että $BA' \cong ED'$ ja $BC' \cong EF'$, niin $F'D' \cong A'C'$.



Kuva 203: Yhtenevät $\mathcal{P}$-kulmat

Tässä luvussa tullaan siis osoittamaan, että Poincarén mallissa kaikki aksioomat (H1)–(H13) sekä Dedekindin aksiooma pätevät, mutta paralleeliaksiooma ei. Jo tässä vaiheessa on luvassa, että paralleeliaksiooma todellakaan ei päde, ovathan edellisessä kuvassa suorat $\overleftrightarrow{ED'}$ ja $\overleftrightarrow{EF'}$ suoran $\overleftrightarrow{A'C'}$ suuntaisia.

Hilbertin aksioomia käsiteltäessä todistusstrategia on samantapainen kuin osoitettaessa harjoitustehtävänä, että koordinaattigeometria on euklidisen geometrian malli: Siirretään tarkasteltava tilanne "helppoon paikkaan", yleensä origoon, jolloin tutkittavista suorista monet ovat 1. tyyppiä ja niitä on helppo käsitellä. Koordinaattitasomallissa $\mathbb{R}^2$ siirtämiseen käytetään tason siirtoja ja kiertoja. Poincarén mallissa euklidiset siirrot eivät tule kyseeseen, eivät liioin kierrot muiden pisteiden kuin origon ympäri, mutta näitä kuvauksia vastaavat ns. *liikkeet*, jotka määritellään seuraavassa. Taustalla on havainto, että euklidisessakin tapauksessa siirrot ja kierrot voi toteuttaa yhdistelminä peilauksistasuoran suhteen.

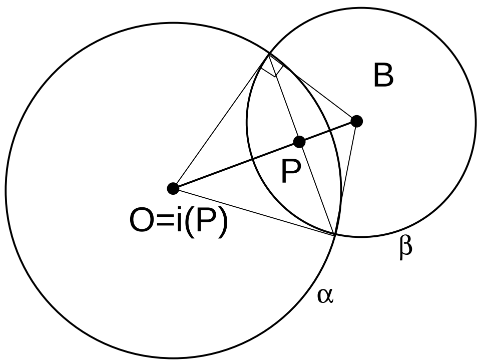
Määritelmä 4.5. *Liike* on peilaus β:n suhteen, missä β on joko O:n kautta kulkeva suora tai α:n kanssa ortogonaalinen ympyrä.

Huomautus 42. Liike on määritelty jokaisessa $\mathcal{P}$-pisteesä P, sillä ainoa ongelma voisi tulla ortogonaalisen ympyrän β keskipisteessä, mutta lauseen 4.1.10 nojalla tämä on α:n ulkopuolella, eikä siis ole $\mathcal{P}$-piste.

LAUSE 4.2.1. *Olkoon P $\mathcal{P}$-piste ja i liike. Tällöin $i(P)$ on $\mathcal{P}$-piste.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

LAUSE 4.2.2. *Jokainen liike on bijektio $\{\mathcal{P}$-pisteet $\} \to \{\mathcal{P}$-pisteet.$\}$*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

LAUSE 4.2.3. *Olkoon P $\mathcal{P}$-piste. Tällöin on olemassa liike i siten, että $i(P) = O$.*
Todistus. Jos $P = O$, niin asia on selvä, peilaussuoraksi kelpaa mikä tahansa ensimmäisen tyypin suora. Olkoon siis $P \neq O$. On löydettävä peilaus j, joka vie P:n keskipisteeksi O. ehdokkaan löytämiseksi arvioidaan, että mikään 1. tyypin suora ei ainakaan kelpaa ja koetetaan sitten löytää yksinkertainen ehdokas sopivan symmetristä kuviota apuna käyttäen.



Kuva 204: Pisteen P siirto origoon liikkeellä

Kuvasta 204 saa seuraavan idean: Olkoon j peilaus α:n suhteen ja β ympyrä, jonka keskipiste on $B = j(P)$ ja säde

$$b = \sqrt{\frac{1}{\overline{OP}^2} - 1}.$$

Koska P on 1-säteisen ympyrän α sisäpuolella, niin $\overline{OP} < 1$, joten $\frac{1}{\overline{OP}^2} - 1 > 0$ ja neliöjuuri on siis hyvin määritelty positiiviluku. Koska P on α:n sisäpuolella, niin $B = j(P)$ on α:n ulkopuolella ja

$$P(B, \alpha) = \overline{OB}^2 - 1^2 = \frac{1}{\overline{OP}^2} - 1 = b^2,$$

jolloin lauseen 4.1.11 mukaan β on α:n kanssa ortogonaalinen. Olkoon i nyt peilaus β:n suhteen. Nyt i on liike ja lisäksi pätee $i(P) = O$, sillä B:n valinnan nojalla

$O * P * B$, joten $i(P) \in \overrightarrow{BO}$ ja

$$\overline{Bi(P)} = \frac{b^2}{\overline{BP}} = \frac{\frac{1}{\overline{OP}^2} - 1}{\overline{OB} - \overline{OP}} = \frac{\frac{1}{\overline{OP}^2} - 1}{\frac{1}{\overline{OP}} - \overline{OP}} = \frac{1}{\overline{OP}} = \overline{OB}.$$

□

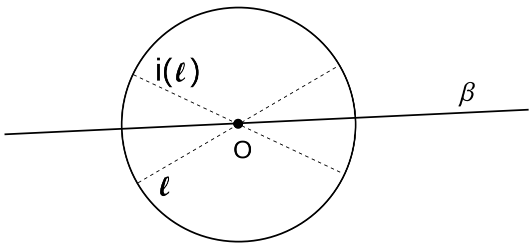
LAUSE 4.2.4. *Pisteen O kautta ei kulje yhtään tyyppiä 2 olevaa suoraa.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Seuraava lause sanoo, että liikkeet kelpaavat siinä mielessä euklidisen tason kiertojen ja siirtojen korvikkeeksi, että ne kuvaavat Poincarén mallin suorat saman mallin suoriksi.

LAUSE 4.2.5. *Olkoon ℓ $\mathcal{P}$-suora ja i liike. Tällöin $i(\ell)$ on $\mathcal{P}$-suora.*
Todistus. Olkoon i peilaus β:n suhteen, missä β on joko O:n kautta kulkeva suora (tapaus a) tai α:n kanssa ortogonaalinen ympyrä (tapaus b).

Tapaus a) Olkoon β O:n kautta kulkeva suora. Tässä on kaksi alatapausta: joko ℓ on tyyppiä 1 tai tyyppiä 2.

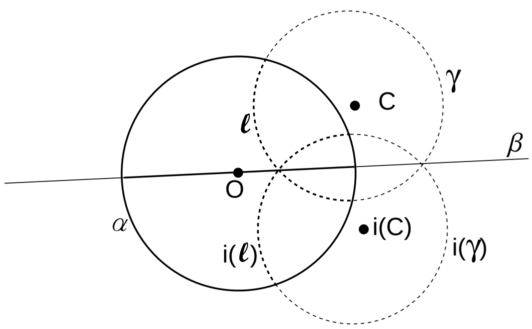
Tapaus a1°) Olkoon ℓ tyyppiä 1.



Kuva 205: β on euklidinen suora ja ℓ tyyppiä 1

Koska $i(O) = O$, niin lauseiden 4.1.1 ja 4.2.1 nojalla $i(\ell)$ on tyyppiä 1 oleva $\mathcal{P}$-suora.

Tapaus a2°) Oletetaan, että ℓ on tyyppiä 2, ts. $\ell = \mathcal{A} \cap \gamma$, missä γ on ympyrä, joka on ortogonaalinen α:n kanssa.



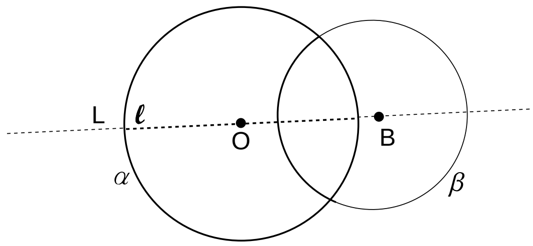
Kuva 206: β on euklidinen suora ja ℓ tyyppiä 2

Olkoon C ympyrän γ keskipiste ja c sen säde. Lauseen 4.1.3 nojalla $i(\gamma)$ on ympyrä, jonka keskipiste on $i(C)$ ja säde c. Lauseen 4.1.2 nojalla $CO \cong i(C)i(O)$, joten $\overline{CO} = \overline{i(C)O}$. Siten $P(i(C), \alpha) = \overline{Oi(C)}^2 - 1 = \overline{OC}^2 - 1 = P(C, \alpha) = c^2$, missä viimeinen yhtälö seuraa lauseesta 4.1.11. Käyttäen samaa lausetta toiseen suuntaan nähdään, että $i(\gamma)$ on ortogonaalinen α:n kanssa. Lauseen 4.2.2 nojalla $i(\ell) = i(\mathcal{A} \cap \gamma) = i(\mathcal{A}) \cap i(\gamma) = \mathcal{A} \cap i(\gamma)$, joten $i(\ell)$ on tyyppiä 2 oleva $\mathcal{P}$-suora.

Tapaus b) Oletetaan, että β on ympyrän α kanssa ortogonaalinen ympyrä. Tässäkin on kaksi eri tapausta; joko ℓ on tyyppiä 1 tai tyyppiä 2.

Tapaus b1°) Olkoon ℓ tyyppiä 1. Olkoon B ympyrän β keskipiste ja b sen säde. Olkoon $\ell = \mathcal{A} \cap L$, missä L on O:n kautta kulkeva euklidinen suora. Erotetaan vielä kaksi ala-alatapausta: i) $B \in L$ ja ii) $B \notin L$.

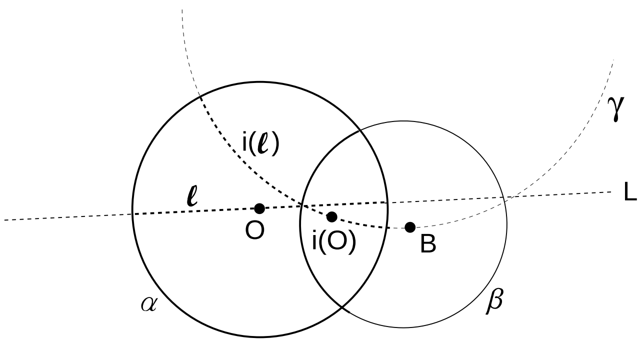
i) Lauseen 4.1.5 nojalla $i(L \setminus \{B\}) = L \setminus \{B\}$, joten $i(\ell) = i(\mathcal{A} \cap (L \setminus \{B\}) = i(\mathcal{A}) \cap i(L \setminus \{B\}) = \mathcal{A} \cap (L \setminus \{B\}) = \mathcal{A} \cap L = \ell$, joka on $\mathcal{P}$-suora.



KUVA 207: β ON EUKLIDINEN YMPYRÄ, $\ell = \mathcal{A} \cap L$ JA $B \in L$

Tässä käytettiin lausetta 4.1.10, jonka mukaan $\mathcal{A} \cap L = \mathcal{A} \cap (L \setminus \{B\})$ ja lausetta 4.1.12, jonka mukaan $i(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

ii) Olkoon $B \notin L$.

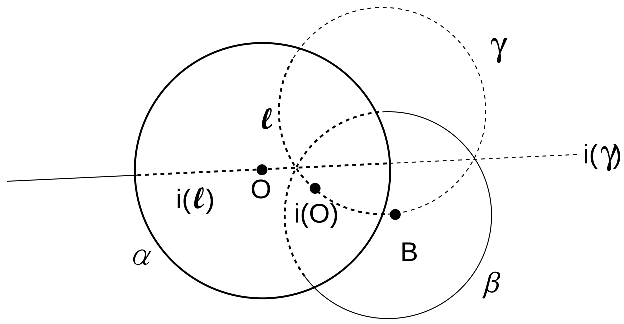


KUVA 208: β ON EUKLIDINEN YMPYRÄ, $\ell = \mathcal{A} \cap L$ JA $B \notin L$

Lauseen 4.1.6 nojalla $i(L) = \gamma \setminus \{B\}$, missä γ on B:n kautta kulkeva ympyrä. Tällöin $i(\ell) = i(\mathcal{A} \cap L) = i(\mathcal{A}) \cap i(L) = \mathcal{A} \cap \gamma$, joten $i(\ell)$ on $\mathcal{P}$-suora, mikäli γ ja α ovat ortogonaalisia. Olkoon j peilaus α:n suhteen. Koska $B \in \gamma \setminus \alpha$, niin lauseen 3.1.10 nojalla riittää osoittaa, että $j(B) \in \gamma$. Lauseen 4.1.14 mukaan $j(B) = i(O)$. Koska $O \in L$, niin $i(O) \in i(L) \subset \gamma$ ja asia on selvä.

Tapaus b2°) Oletetaan, että ℓ on tyyppiä 2, toisin sanoen $\ell = \mathcal{A} \cap \gamma$, missä γ on α:n kanssa ortogonaalinen ympyrä. Olkoot B ja C ympyröiden β ja γ keskipisteet ja b ja c niiden säteet. Erotetaan tässäkin kaksi alatapausta: i) $B \in \gamma$ ja ii) $B \notin \gamma$.

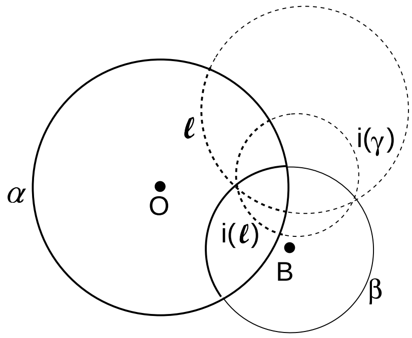
i) Oletetaan, että $B \in \gamma$.



KUVA 209: β ON EUKLIDINEN YMPYRÄ, $\ell = \mathcal{A} \cap \gamma$ JA $B \in \gamma$

Lauseen 4.1.7 nojalla $i(\gamma)$ on suora, josta puuttuu piste B, jolloin $i(\ell) = \mathcal{A} \cap i(\gamma)$ on $\mathcal{P}$-suora, mikäli $i(\gamma)$ kulkee O:n kautta. Olkoon taas j peilaus α:n suhteen, jolloin 4.1.14:n mukaan $j(B) = i(O)$. Koska $B \in \gamma$, niin tällöin $i(O) = j(B) \in j(\gamma)$. Koska α ja γ ovat ortogonaalisia, niin lauseen 4.1.12 nojalla $j(\gamma) = \gamma$ ja siten $i(O) \in \gamma$. Mutta tällöin $O = i(i(O)) \in i(\gamma)$.

ii) Olkoon $B \notin \gamma$. Tällöin lauseen 4.1.15 nojalla $i(\gamma)$ on α:n kanssa ortogonaalinen ympyrä ja $i(\ell) = i(\mathcal{A} \cap \gamma) = i(\mathcal{A}) \cap i(\gamma) = \mathcal{A} \cap i(\gamma)$ on $\mathcal{P}$-suora.



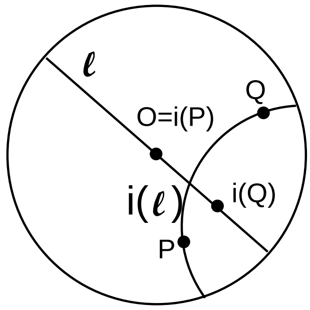
KUVA 210: β ON EUKLIDINEN YMPYRÄ, $\ell = \mathcal{A} \cap \gamma$ JA $B \notin \gamma$

□

Lauseen 4.2.5 avulla voidaan nyt todistaa, että Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H1).

LAUSE 4.2.6. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H1).*

Todistus. Olkoot P ja Q eri $\mathcal{P}$-pisteitä. Osoitetaan, että niiden kautta kulkee tasan yksi $\mathcal{P}$-suora. Lauseen 4.2.3 nojalla on olemassa liike i siten, että $i(P) = O$. Pisteiden $i(Q)(\neq i(P) = O)$ ja O kautta kulkee euklidinen suora L. Tällöin $\ell = \mathcal{A} \cap L$ on $\mathcal{P}$-suora ja pisteet O ja $i(Q)$ ovat $\mathcal{P}$-suoralla ℓ. Lauseen 4.2.5 nojalla $i(\ell)$ on $\mathcal{P}$-suora ja $P = i(i(P)) = i(O)$ ja $Q = i(i(Q)) \in \ell$.

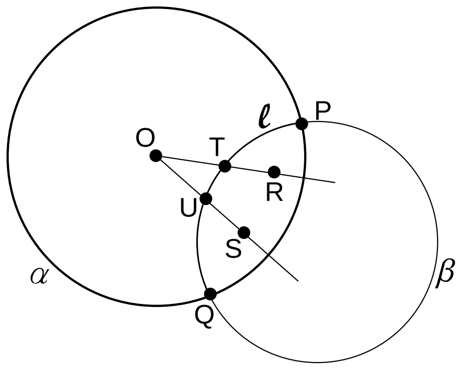


Kuva 211: Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H1)

Pitää vielä osoittaa $\mathcal{P}$-suoran yksikäsitteisyys. Olkoon m toinen $\mathcal{P}$-suora, joka kulkee P:n ja Q:n kautta. Tällöin lauseen 4.2.5 nojalla $i(m)$ on $\mathcal{P}$-suora, joka kulkee O:n ja $i(Q)$:n kautta. Lauseen 4.2.4 nojalla $i(m)$ on tyyppiä 1, siis muotoa $i(m) = \mathcal{A} \cap M$, missä M on euklidinen suora. Nyt M ja L kulkevat pisteiden O ja $i(Q)$ kautta, joten on $M = L$. Siten $i(m) = \mathcal{A} \cap M = \mathcal{A} \cap L = \ell$ ja edelleen $m = i(i(m)) = i(\ell)$. □

LAUSE 4.2.7. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H2).*
Todistus. Olkoon ℓ $\mathcal{P}$-suora. Osoitetaan, että ℓ:llä on ainakin kaksi pistettä. Jos ℓ on tyyppiä 1, niin $\ell = \mathcal{A} \cap L$, missä L on origon kautta kulkeva euklidinen suora. L leikkaa origokeskistä $\frac{1}{2}$-säteistä ympyrää lauseen 2.6.6 mukaan kahdessa eri pisteessä, jotka ovat $\mathcal{P}$-pisteitä ja myös suoran ℓ pisteitä.

Jos taas ℓ on tyyppiä 2, niin $\ell = \mathcal{A} \cap \beta$, missä β on α:n kanssa ortogonaalinen euklidinen ympyrä. Olkoot P ja Q ortogonaalisten ympyröiden α ja β leikkauspisteet.

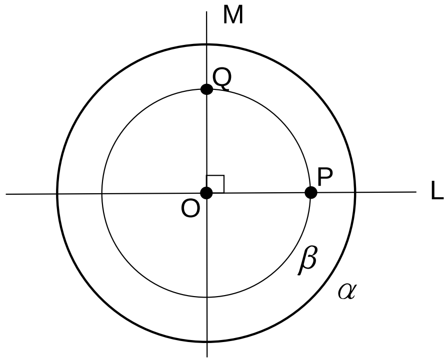


Kuva 212: Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H2)

Euklidiselta janalta PQ voidaan valita eri pisteet R, S ($\neq P, Q$). Lauseen 2.6.5 nojalla R ja S ovat ympyrän α sisällä. Lauseen 2.6.2 nojalla OR ja OS leikkaavat ympyrää β pisteissä T ja U, joilla $O * T * R$ ja $O * U * S$. Lauseen 2.6.5 nojalla U ja T ovat $\mathcal{P}$-pisteitä, välttämättä eri pisteitä ja U ja T ovat $\mathcal{P}$-suoralla ℓ. □

LAUSE 4.2.8. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H3).*
Todistus. Etsitään Poincarén mallista kolme pistettä, jotka eivät ole samalla $\mathcal{P}$-suoralla. Yhdeksi pisteeksi otetaan keskipiste O. Muut valitaan näin: Olkoon β O-keskinen $\frac{1}{2}$-säteinen ympyrä ja L jokin O:n kautta kulkeva euklidinen suora.

Lauseen 2.6.6 nojalla L leikkaa β:aa pisteessä P ja P on $\mathcal{P}$-piste. Olkoon M pisteen O kautta kulkeva L:n normaali. Se leikkaa myös β:aa; olkoon leikkauspiste Q, joka on $\mathcal{P}$-piste.



Kuva 213: Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H3)

Nyt pisteiden O, P ja Q kautta ei kulje mitään $\mathcal{P}$-suoraa, sillä 4.2.4:n nojalla sen tulisi olla tyyppiä 1, mikä ei ole mahdollista, sillä O, P ja Q eivät ole samalla euklidisella suoralla. □

Huomautus 43. Lauseesta 4.2.6 seuraa välittömästi, että pisteiden A ja B hyperbolinen etäisyys on yksikäsitteisesti määritelty. Lisäksi $d(A,B) = d(B,A)$, sillä

$$d(A,B) = \left|\log \frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}}\right| = \left|-\log \frac{1}{\frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}}}\right| = \left|\log \frac{\overline{BP}\,\overline{AQ}}{\overline{BQ}\,\overline{AP}}\right| = d(B,A).$$

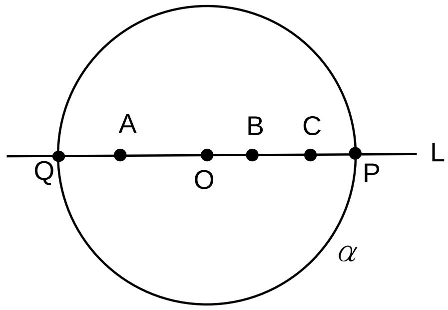
Näin myös hyperboliseen etäisyyteen perustuvat välissäolon ja yhtenevyyden määritelmät ovat järkeviä. Tämän huomion jälkeen voidaan lähteä todistamaan seuraavia aksioomia. (H4) on helppo:

LAUSE 4.2.9. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H4).*
Todistus. Olkoon $A*B*C$. Määritelmän mukaan A, B ja C ovat samalla suoralla ja $d(A,B)+d(B,C) = d(A,C)$. Tällöin myös $d(C,B)+d(B,A) = d(C,A)$ eli $C*B*A$. □

Muut välissäoloaksioomat ovat vähän vaikeampia verifioitavia. Ne todistetaan siirtämällä tarkastelu tyyppiä 1 olevalle suoralle. Tätä varten todistetaan ensin pari aputulosta.

LAUSE 4.2.10. *Jos ℓ on tyyppiä 1 oleva $\mathcal{P}$-suora ja $A, B, C \in \ell$, niin $A*B*C$ Poincarén mallin mielessä, jos ja vain jos $A*B*C$ euklidisessa mielessä.*

Todistus. Käytetään tässä selvyyden vuoksi merkintää $A \circ B \circ C$, kun B on A:n ja C:n välissä Poincarén mallin mielessä, so., kun $d(A,B)+d(B,C) = d(A,C)$. Olkoot P ja Q $\mathcal{P}$-suoran ℓ "päätepisteet" eli α:n ja L:n leikkauspisteet, missä $\ell = \mathcal{A} \cap L$.



Kuva 214: $A * B * C$ tyypin 1 suoralla

1°: Oletetaan aluksi $A \circ B \circ C$. Tämä merkitsee, että $d(A,B)+d(B,C) = d(A,C)$ eli

$$(*) \qquad \left|\log \frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}}\right| + \left|\log \frac{\overline{BP}\,\overline{CQ}}{\overline{BQ}\,\overline{CP}}\right| = \left|\log \frac{\overline{AP}\,\overline{CQ}}{\overline{AQ}\,\overline{CP}}\right|.$$

Muuttamalla tarvittaessa merkintöjä ($P \leftrightarrow Q$) voidaan olettaa, että $Q * A * C$, jolloin $A * C * P$ ja siten $\overline{CQ} > \overline{AQ}$ ja $\overline{AP} > \overline{CP}$. Tällöin $\frac{\overline{AP}\,\overline{CQ}}{\overline{AQ}\,\overline{CP}} > 1$ ja siis $\log \frac{\overline{AP}\,\overline{CQ}}{\overline{AQ}\,\overline{CP}} > 0$, joten

$$\left|\log \frac{\overline{AP}\,\overline{CQ}}{\overline{AQ}\,\overline{CP}}\right| = \log \frac{\overline{AP}\,\overline{CQ}}{\overline{AQ}\,\overline{CP}} = \log\left(\frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BP}\,\overline{CQ}}{\overline{BQ}\,\overline{CP}}\right) = \log \frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}} + \log \frac{\overline{BP}\,\overline{CQ}}{\overline{BQ}\,\overline{CP}}.$$

Siksi $(*)$ voi toteutua ainoastaan, mikäli alemmassa kaavassa kaikki yhteenlaskettavat ovat positiivisia eli kun

$$\frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}} > 1 \text{ ja } \frac{\overline{BP}\,\overline{CQ}}{\overline{BQ}\,\overline{CP}} > 1.$$

Olemme todistamassa, että $A * B * C$. Tälle riittää lauseen 2.3.4 nojalla, että $Q * A * B$ ja $Q * B * C$. Koska A ja B ovat ympyrän γ sisäpuolellaja $Q \in \gamma$, niin joko $Q * A * B$ tai $Q * B * A$. Jos olisi $Q * B * A$, niin $B * A * P$ ja $\overline{QB} < \overline{QA}$ ja $\overline{BP} > \overline{AP}$ ja tällöin olisi $\frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}} < 1$, ja näinhän ei ole. On siis oltava $Q * A * B$. Vastaavasti päätellään, että on $Q * B * C$ ja siis todella $A * B * C$.

2°: Oletetaan seuraavaksi, että $A*B*C$. Kuten edellisessä tarkastelussa nähdään nytkin, että (kun $Q * A * C$) kaavan $(*)$ logaritmit ovat positiivisia, joten $(*)$ pätee suoraan logaritmin ominaisuuden $\log(xy) = \log x + \log y$ nojalla ja siten $A \circ B \circ C$. □

Seuraava lause sanoo, että liikkeet ovat Poincarén mallin ”isometrisia isomorfismeja”, toisin sanoen että ne säilyttävät pisteiden väliset etäisyydet. **Tämä on hyvin merkityksellistä, koska välissäolo ja yhtenevyyskäsitteet on määritelty etäisyyden avulla ja nekin siis säilyvät liikkeissä.**

LAUSE 4.2.11 (Isometrialause). *Olkoon i liike ja A, B, C eri $\mathcal{P}$-pisteitä. Tällöin*

$$d(A,B) = d(i(A), i(B)).$$

Lisäksi pätee $A * B * C$, jos ja vain jos $i(A) * i(B) * i(C)$.

Todistus. Olkoon ℓ pisteiden A ja B kautta kulkeva $\mathcal{P}$-suora, $\ell = \mathcal{A} \cap \beta$, missä β on euklidinen suora tai ympyrä. Olkoot P ja Q suoran ℓ "päätepisteet", so. $\{P, Q\} = \alpha \cap \beta$, jolloin $i(P)$ ja $i(Q)$ ovat samassa mielessä $i(\ell)$:n päätepisteet. Olkoon i peilaus γ:n suhteen. Jos γ on suora, niin lauseen 4.1.2 nojalla i säilyttää euklidisten janojen pituudet, joten tietenkin

$$\frac{\overline{i(A)i(P)}\ \overline{i(B)i(Q)}}{\overline{i(A)\ i(Q)}\ \overline{i(B)i(P)}} = \frac{\overline{AP}\ \overline{BQ}}{\overline{AQ}\ \overline{BP}}$$

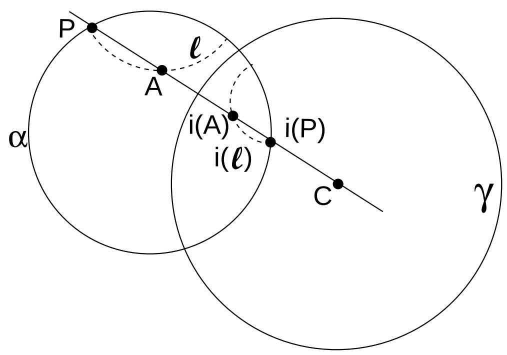
eli $d(i(A), i(B)) = d(A, B)$.

Voidaan siis olettaa, että γ on ympyrää α vastaan ortogonaalinen ympyrä, sen keskipiste C ja säde c. Osoitetaan, että

$$(*) \qquad \overline{i(A)i(P)} = \frac{c^2}{\overline{AC}\ \overline{CP}}\,\overline{AP}.$$

Tässä on kaksi mahdollisuutta: joko a) C, A ja P ovat samalla euklidisella suoralla tai b) ne eivät ole.

Tapaus a) Jos tutkittavat pisteet ovat samalla euklidisella suoralla, niin joko $C * A * P$ tai sitten $C * P * A$, sillä tapaus $A * C * P$ ei tule kysymykseen, koska jana AP on ympyrän α sisällä, mutta C sen ulkopulella.



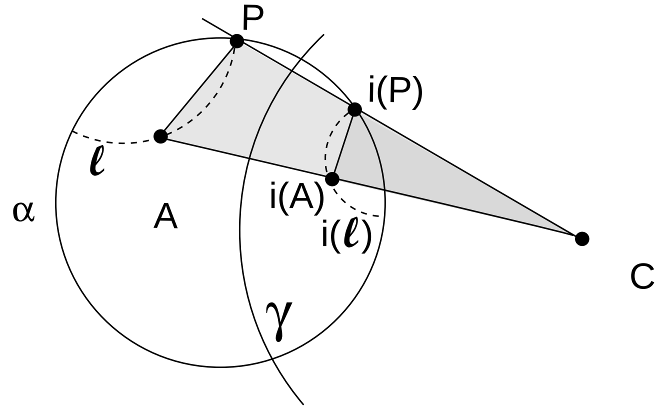
Kuva 215: Tapaus a) $C * A * P$

Tapauksessa $C*A*P$ saadaan $C*i(P)*i(A)$ ja kaava $(*)$ saadaan siis laskemalla

$$\overline{i(A)i(P)} = \overline{Ci(A)} - \overline{Ci(P)} = \frac{c^2}{\overline{CA}} - \frac{c^2}{\overline{CP}} = c^2\left(\frac{\overline{CP} - \overline{CA}}{\overline{CA} \cdot \overline{CP}}\right) = \frac{c^2}{\overline{AC}\ \overline{CP}} \cdot \overline{AP}.$$

Tapauksessa $C * P * A$ toimii vastaava päättely, merkkejä vaihtamalla.

Tapaus b) Kun C, A ja P eivät ole samalla suoralla, niin $\triangle ACP$ on kolmio, samoin $\triangle i(P)Ci(A)$, ja kulmat $\measuredangle ACP$ ja $\measuredangle i(P)C\,i(A)$ ovat yhtenevät.



KUVA 216: TAPAUS b) $\triangle ACP$ ON KOLMIO

Koska $\overline{Ci(A)} = \frac{b^2}{\overline{CA}}$ ja $\overline{Ci(P)} = \frac{b^2}{\overline{CP}}$, niin $\frac{\overline{Ci(A)}}{\overline{Ci(P)}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}}$. Tästä voidaan päätellä kosinilauseen avulla kuten lauseen 4.1.15 todistuksessa, että kolmiot $\triangle ACP$ ja $\triangle i(P)Ci(A)$ ovat samanmuotoiset. Tällöin on 3.1.10:n nojalla $\frac{\overline{i(A)i(P)}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{i(P)C}}{\overline{AC}} = \frac{c^2}{\overline{AC}\,\overline{CP}}$, joten

$$\overline{i(A)i(P)} = \frac{c^2}{\overline{AC}\,\overline{CP}} \cdot \overline{AP},$$

eli kaava $(*)$ pätee myös tapauksessa b).

Analogisesti kaavan $(*)$ kanssa saadaan vastaavanlaiset kaavat

$$\begin{aligned}
\overline{i(A)i(Q)} &= \frac{c^2}{\overline{AC}\,\overline{CQ}} \cdot \overline{AQ}, \\
\overline{i(B)i(P)} &= \frac{c^2}{\overline{BC}\,\overline{CP}} \cdot \overline{BP} \quad \text{ja} \\
\overline{i(B)i(Q)} &= \frac{c^2}{\overline{BC}\,\overline{CQ}} \cdot \overline{BQ}.
\end{aligned}$$

Varsinainen väite $d(i(A), i(B)) = d(A, B)$ saadaan yhdistämällä nämä:

$$\frac{\overline{i(A)i(P)} \cdot \overline{i(B)i(Q)}}{\overline{i(A)i(Q)} \cdot \overline{i(B)i(P)}} = \frac{\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}\cdot\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}\,\overline{CQ}}}{\frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}\,\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}\,\overline{CP}}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}}.$$

Lauseen lisäväite seuraa nyt suoraan välissäolon määritelmästä ja lauseesta 4.2.5.
□

LAUSE 4.2.12. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H5).*
Todistus. Olkoot A ja B eri $\mathcal{P}$-pisteitä ja ℓ niiden kautta kulkeva $\mathcal{P}$-suora. Pitää osoittaa, että ℓ:ltä löytyy pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja

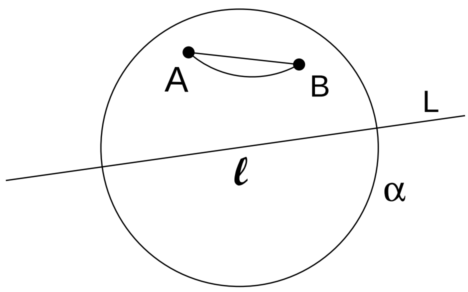
$A * B * E$. Lauseen 4.2.3 nojalla on olemassa liike i siten, että $i(A) = O$. Lauseen 4.2.5 mukaan $i(\ell)$ on $\mathcal{P}$-suora ja lauseen 4.2.4 mukaan tyyppiä 1, eli $i(\ell) = \mathcal{A} \cap L$, missä L on euklidinen suora. Olkoot $P, Q \in \alpha \cap L$ siten, että $P * O * i(B)$ ja $O * i(B) * Q$ euklidisessa mielessä. Valitaan pisteet R, S ja T siten, että $P * R * O$, $O * S * i(B)$ ja $i(B) * T * Q$. Tällöin R, S ja T ovat $\mathcal{P}$-pisteitä ja ne toteuttavat ehdot $R * O * i(B)$ ja $O * i(B) * T$. Lauseen 4.2.10 nojalla $R * O * i(B)$, $O * S * i(B)$ ja $O * i(B) * T$ myös $\mathcal{P}$-mielessä. Tällöin lauseen 4.2.11 mukaan $i(R) * i(O) * i(i(B))$, $i(O) * i(S) * i(i(B))$ ja $i(O) * i(i(B)) * i(T)$. Koska $i(i(B)) = B$ ja $i(O) = A$, niin $i(R)$, $i(S)$ ja $i(T)$ kelpaavat haetuiksi pisteiksi C, D ja E. □

LAUSE 4.2.13. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H6).*

Todistus. Olkoot A, B ja C eri $\mathcal{P}$-pisteitä $\mathcal{P}$-suoralla ℓ. Kuten lauseen 4.2.12 todistuksessa valitaan liike i s.e. $i(A) = O$, jolloin $i(\ell)$ on tyyppiä 1 oleva $\mathcal{P}$-suora. Tällöin täsmälleen yksi ehdoista $i(A)*i(B)*i(C)$, $i(B)*i(A)*i(C)$ ja $i(A)*i(C)*i(B)$ on voimassa euklidisessa mielessä ja siten lauseen 4.2.10 nojalla myös $\mathcal{P}$-mielessä. Lauseen 4.2.11 nojalla siis $\mathcal{P}$-mielessä täsmälleen yksi ehdoista $A * B * C$, $B * A * C$ ja $A * C * B$ on voimassa. □

Aksiooman (H7) todistamiseksi tarvitaan aputulos.

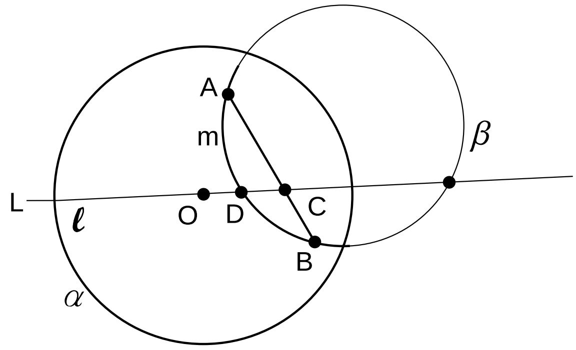
LAUSE 4.2.14. *Olkoon $\ell = \mathcal{A} \cap L$ tyyppiä 1 oleva $\mathcal{P}$-suora. Tällöin $\mathcal{P}$-pisteet $A, B \notin \ell$ ovat samalla puolella suoraa ℓ $\mathcal{P}$-mielessä, jos ja vain jos ne ovat samalla puolella euklidista suoraa L euklidisessa mielessä.*



Kuva 217: Samalla puolella 1. tyypin $\mathcal{P}$-suoraa ℓ

Todistus. 1°: Olkoot A ja B samalla puolella ℓ:ää $\mathcal{P}$-mielessä, ts. oletetaan, että A:n ja B:n välinen hyperbolinen eli $\mathcal{P}$-jana ei leikkaa suoraa ℓ. Pitää osoittaa, että A:n ja B:n välinen euklidinen jana ei leikkaa L:ää. Olkoon m pisteiden A ja B kautta kulkeva $\mathcal{P}$-suora ja AB pisteiden A ja B välinen euklidinen jana.

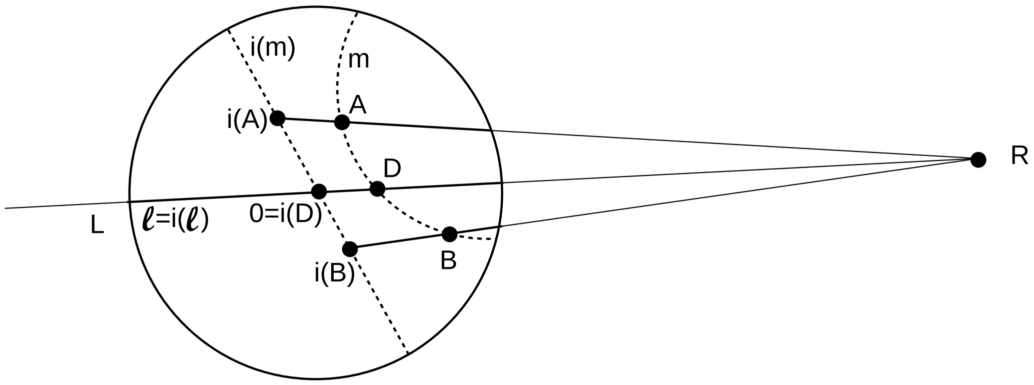
Antiteesi: AB leikkaa L:ää ja siis myös ℓ:ää pisteessä C. Jos m on tyyppiä 1, niin lauseen 4.2.10 nojalla AB on myös A:n ja B:n välinen $\mathcal{P}$-jana, joten joudutaan ristiriitaan oletuksen kanssa. Voidaan siis olettaa, että m on tyyppiä 2: $m = \mathcal{A} \cap \beta$, missä β on α:a vastaan ortogonaalinen ympyrä. On osoitettava, että m ja ℓ leikkaavat toisensa. Teemme sen seuraavasti:



Kuva 218: m ja ℓ leikkaavat

Lauseesta 2.6.5 seuraa, että C on β:n sisäpuolella, joten 2.6.6:n nojalla suora L leikkaa β:aa kahdessa pisteessä P ja Q. Ei voi olla $P \in \alpha$, sillä silloin 4.1.9:n nojalla L olisi β:n tangentti ja leikkauspisteitä olisi siis vain yksi. Siis $P \notin \alpha$. Jos merkitään peilausta α:n suhteen j:llä, niin 4.1.12:n mukaan $j(P) \in \beta$ ja joko P tai $j(P) \in \mathcal{A}$. Siten joko P tai $j(P)$ on ℓ:n ja m:n leikkauspiste, jollainen siis on olemassa.

Merkitään ℓ:n ja m:n leikkauspistettä D:llä. Koska m on tyyppiä 2, niin lauseen 4.2.4 nojalla $D \neq O$. Tällöin lauseen 4.2.3 mukaisesti on olemassa liike i siten, että $i(D) = O$. Tällöin sekä $i(\ell)$ että $i(m)$ kulkevat O:n kautta ja ovat siten 4.2.4:n ja 4.2.5:n mukaisesti tyyppiä 1 olevia suoria. Tämä on 4.1.3:n nojalla mahdollista vain, kun i on ympyräpeilaus ja 4.1.6:n mukaan peilausympyrän keskipiste R sisältyy suoraan L. Koska $i(A) \in \overrightarrow{RA}$, niin $A\,i(A)L$ euklidisessa mielessä ja vastaavasti $Bi(B)L$. Antiteesin nojalla ALB, joten $i(A)Li(B)$ eli $i(A)$:n ja $i(B)$:n välinen euklidinen jana leikkaa suoraa L.



Kuva 2191: Leikkauspiste on O

Toisaalta $i(A), i(B) \in i(m)$, joka on tyyppiä 2, joten $i(A)$:n ja $i(B)$:n välinen $\mathcal{P}$-jana on sama kuin euklidinen (4.2.10), joten tämä $\mathcal{P}$-jana leikkaa L : ää. Ainoa mahdollinen leikkauspiste on O eli $i(D)$. Siten $i(A)*i(D)*i(B)$ on totta $\mathcal{P}$-mielessä. Tällöin 4.2.11:n nojalla $A * D * B$ pätee $\mathcal{P}$-mielessä ja koska $D \in \ell$, niin $A\ell B$ olisi totta $\mathcal{P}$-mielessä, mikä on ristiriita.

2° : Olkoot A ja B euklidisessa mielessä samalla puolella suoraa L.

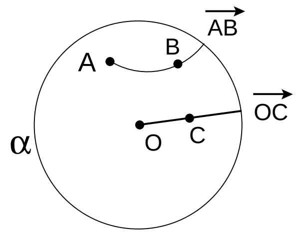
Antiteesi: A:n ja B:n välinen $\mathcal{P}$-jana leikkaa ℓ:ää pisteessä D. Valitaan taas liike i siten, että $i(D) = 0$, jolloin taas$i$ on ympyräpeilaus ja peilausympyrän keskipiste

$R \in L$. Taas $A\,i(A)L$ ja $Bi(B)L$, joten nyt oletuksen nojalla $i(A)i(B)L$. Koska $A{*}D{*}B$ $\mathcal{P}$-mielessä, niin $i(A){*}i(D){*}i(B)$ $\mathcal{P}$-mielessä ja myös euklidisessa mielessä, koska $i(m)$ on taas tyyppiä 1. Koska $i(D) = O \in L$, niin tällöin $i(A)Li(B)$, ja on taas saatu ristiriita. □

LAUSE 4.2.15. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H7).*
Todistus. Valitaan (H7):n oletusten suoralta ℓ jokin piste ja kuvataan se sopivalla liikkeellä i origoon O, jolloin $i(\ell)$ on tyyppiä 1. Väite seuraa nyt suoraan lauseesta 4.2.14, sillä 4.2.11:n nojalla $AB\ell$, jos ja vain jos $i(A)i(B)i(\ell)$. □

Yhtenevyysaksioomia varten todistetaan taas aputulos:

LAUSE 4.2.16. *Olkoon $\overrightarrow{AB}$ $\mathcal{P}$-puolisuora ja $C \neq O$ $\mathcal{P}$-piste. Tällöin on olemassa kuvaus f, joka on yhdistetty kuvaus liikkeistä s.e. $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OC}$, missä $\overrightarrow{OC}$ on $\mathcal{P}$-puolisuora.*



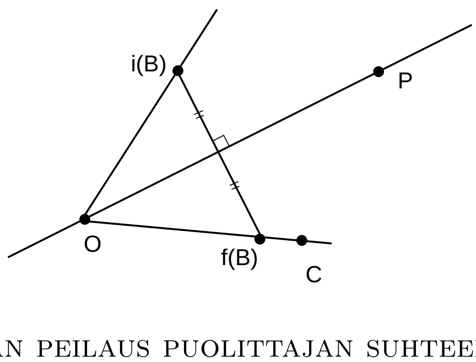
Kuva 220: $\mathcal{P}$-puolisuoran siirto origosta alkavaksi

Todistus. Lauseen 2.3.5 nojalla on olemassa liike i siten, että $i(A) = O$. Puomilauseen 2.3.11 mukaan $i(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{i(A)i(B)} = \overleftrightarrow{Oi(B)}$. Nyt sekä $\mathcal{P}$-suora $\overleftrightarrow{OC}$ että $\mathcal{P}$-suora $\overleftrightarrow{Oi(B)}$ ovat tyyppiä 1, joten $\mathcal{P}$-puolisuora $\overrightarrow{OC}$ on joukko $\overrightarrow{OC}^E \cap \mathcal{A}$, missä $\overrightarrow{OC}^E$ on euklidinen puolisuora ja vastaavasti $\overrightarrow{Oi(B)} = \overrightarrow{Oi(B)}^E \cap \mathcal{A}$.

a) Jos nyt $i(B) \in \overrightarrow{OC}$, niin $\overrightarrow{Oi(B)} = \overrightarrow{OC}$ lauseen 2.3.8 nojalla ja asia on selvä; voidaan asettaa $f = i$.

b) Jos $i(B) * O * C$, niin yhdistetään liikkeeseen i peilaus j O:n kautta kulkevan $\overrightarrow{OC}^E$:n normaalin suhteen, jolloin j on liike, ja asettamalla $f = j \circ i$ saadaan $f(B) \in \overrightarrow{OC}$, mistä väite taas seuraa.

c) Muussa tapauksessa $\measuredangle i(B)OC$ on (euklidinen) kulma.

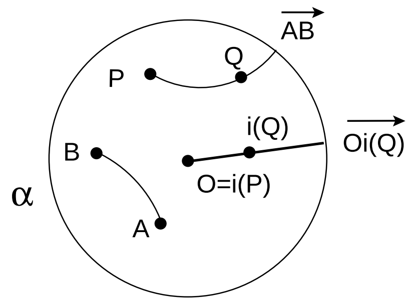


Kuva 221: Kulman peilaus puolittajan suhteen vaihtaa kyljet

Olkoon $\overrightarrow{OP}$ sen puolittaja ja $L = \overleftrightarrow{OP}$ sekä j peilaus L:n suhteen. Asettamalla $f = j \circ i$ saadaan taas $f(B) \in \overrightarrow{OC}$; tämähän seuraa SKS- säännöstä. Väite seuraa!
□

LAUSE 4.2.17. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H8).*

Todistus. Olkoot $A \neq B$ ja olkoon $\overrightarrow{PQ}$ puolisuora. Pitää osoittaa, että on olemassa yksikäsitteinen $R \in \overrightarrow{PQ} \setminus \{P\}$ siten, että $AB \cong PR$. Valitaan liike i siten, että $i(P) = O$. Lauseen 4.2.16 nojalla on olemassa liikkeiden yhdistelmä f siten, että $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{Oi(Q)}$. Määritellään $g = i \circ f$, jolloin $g(\overrightarrow{AB}) = i(\overrightarrow{Oi(Q)}) = i(\overrightarrow{i(P)i(Q)}) = i(i(\overrightarrow{PQ})) = \overrightarrow{PQ}$.



KUVA 222: LAUSEEN 4.2.17 TODISTUS

Lauseen 4.2.11 nojalla g säilyttää hyperboliset etäisyydet, joten $d(A, B) = d(g(A), g(B)) = d(P, g(B))$, joten $g(B) \in \overrightarrow{PQ}$ on haettu piste R, sillä $AB \cong Pg(B)$ määritelmän mukaan.

Toista tällaista pistettä $R \in \overrightarrow{PQ}$ ei voi olla. Jos nimittäin $R \neq g(B)$ olisi sellainen, niin $d(A, B) = d(P, R)$, joten lauseen 4.2.11 nojalla $d(O, i(R)) = d(O, f(B))$.

Toisaalta mielivaltaisen pisteen $S \neq O$ hyperbolinen etäisyys O:sta osataan laskea. Jos nimittäin T ja U ovat tyyppiä 1 olevan $\mathcal{P}$-suoran $\overleftrightarrow{OS}$ "päätepisteet", $T * O * S$, $O * S * U$, niin

$$d(O, S) = \left|\log \frac{\overline{OT}\,\overline{SU}}{\overline{OU}\,\overline{ST}}\right| = \left|\log \frac{1 \cdot (1 - \overline{OS})}{1 \cdot (1 + \overline{OS})}\right| = -\log \frac{1 - \overline{OS}}{1 + \overline{OS}}.$$

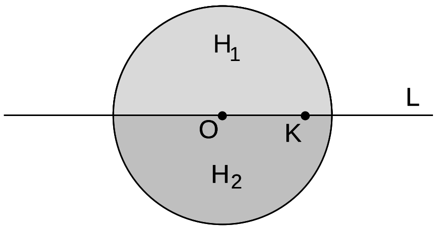
Soveltamalla tätä lauseketta saa ehto $d(Oi(R)) = d(O, f(B))$ muodon

$$-\log \frac{1 - \overline{Oi(R)}}{1 + \overline{Oi(R)}} = -\log \frac{1 - \overline{Of(B)}}{1 + \overline{Of(B)}},$$

josta edelleen $\overline{Oi(R)} = \overline{Of(B)}$. Koska $i(R)$ ja $f(B)$ kuuluvat samalle **euklidiselle** puolisuoralle $\overrightarrow{Oi(Q)}$ täytyy olla $i(R) = f(B)$, koska euklidinen malli toteuttaa Hilbertin aksiooman (H8). Tällöin kuitenkin $R = i(i(R)) = i(f(B)) = g(B)$, mikä antaa ristiriidan. □

LAUSE 4.2.18. *Poincarén malli toteuttaa aksioomat (H9) ja (H10).*
Todistus. Nämä aksioomat ovat suora seuraus määritelmästä. $\square$

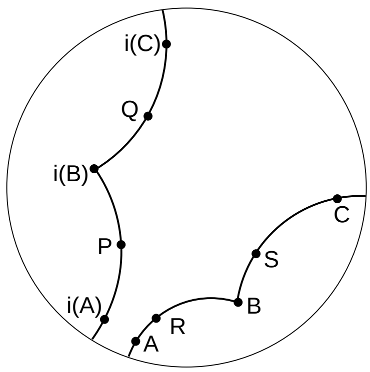
Aksioomia (H11)–(H13) varten kiinnitetään ensin seuraavat merkinnät: Olkoon $K \neq O$ $\mathcal{P}$-piste. $\mathcal{P}$-suora $\overleftrightarrow{OK}$ on tyyppiä 1 ja se jakaa $\mathcal{P}$-pisteet kahteen puolitasoon H_1 ja H_2, jotka ovat lauseen 4.2.14 perusteella joukkoja $\mathcal{A} \cap H_1'$ ja $\mathcal{A} \cap H_2'$, missä H_1' ja H_2' ovat euklidisen suoran L, jolla $\overleftrightarrow{OK} = \mathcal{A} \cap L$, määräämät puolitasot.



KUVA 223: $\mathcal{P}$-PUOLITASOT

LAUSE 4.2.19 (Kulmatarkkuuslause). *Liike säilyttää $\mathcal{P}$-kulmat, ts. jos i on liike ja $\measuredangle ABC$ on $\mathcal{P}$-kulma, niin $\measuredangle i(A)i(B)i(C) \cong \measuredangle ABC$.*

Todistus. Olkoon $P \in \overrightarrow{i(B)i(A)}$, $Q \in \overrightarrow{i(B)i(C)}$, $R \in \overrightarrow{RA}$, $S \in \overrightarrow{BC}$ siten, että $i(B)P \cong BR$ ja $i(B)Q \cong BS$. Lauseen 4.2.11 nojalla $BR \cong i(B)i(R)$ ja $i(R) \in i(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{i(B)i(A)}$. Nyt myös $P \in \overrightarrow{i(B)i(A)}$ ja $i(B)P \cong i(B)i(R)$. Aksiooman (H8) voimassaolon ilmaisevan lauseen 4.2.17 yksikäsitteisyyspuolen nojalla täytyy olla $P = i(R)$. Vastaavasti on oltava $Q = i(S)$. Tällöin $PQ = i(R)i(S)$. Lauseen 4.2.11 mukaan $i(R)i(S) \cong RS$, joten $PQ \cong RS$ ja väite seuraa määritelmän mukaisesti. $\square$



KUVA 224: LIIKE SÄILYTTÄÄ KULMAT

Määritelmä 4.6. Sanotaan, että $\{P \mid d(A,P) = p\}$, missä A on $\mathcal{P}$-piste ja p positiiviluku, on *$\mathcal{P}$-ympyrä.* A on sen *$\mathcal{P}$-keskipiste* ja p sen *$\mathcal{P}$-säde.*

LAUSE 4.2.20. *Jokainen $\mathcal{P}$-ympyrä on euklidinen ympyrä. $\mathcal{P}$-keskipiste* **ei** *kuitenkaan ole välttämättä sama kuin euklidinen. Tarkemmin:*

(1) *Jos β on $\mathcal{P}$-ympyrä, jonka $\mathcal{P}$-keskipiste on O ja $\mathcal{P}$-säde p, niin β on myös euklidinen ympyrä, jonka euklidinen keskipiste on O ja säde $\frac{e^p-1}{e^p+1}$.*

(2) *Jos taas β:n $\mathcal{P}$-keskipiste on $B \neq O$, niin β on euklidinen ympyrä, jonka keskipiste E on puolisuoralla $\overrightarrow{OB}$ siten, että*

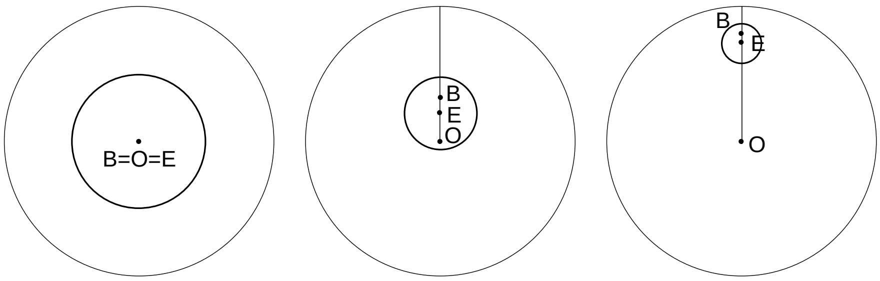
$$\overline{OE} = \frac{\overline{OB}(1 - r^2)}{1 - \overline{OB}^2 r^2}$$

ja säde

$$b = \frac{r(1 - \overline{OB}^2)}{1 - \overline{OB}^2 r^2},$$

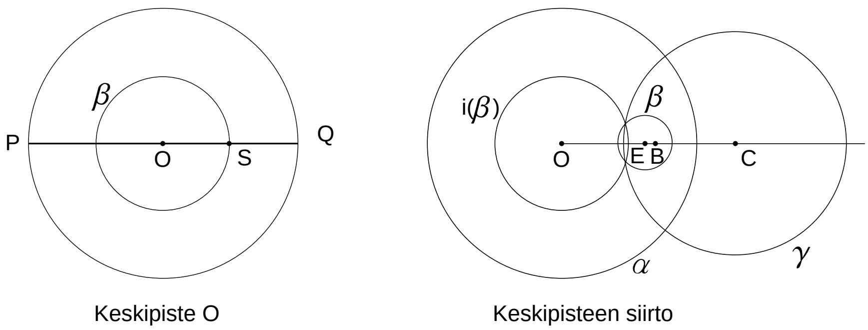
missä $r = \frac{e^p - 1}{e^p + 1}$.

Huomautus 44. Jollei B ole mallia edustavan ympyrän α keskipiste O, niin $\overline{OE} < \overline{OB}$, joten $O * E * B$. Lisäksi, kun $\overline{OB} \to 1$ eli kun B lähestyy mallia edustavan ympyrän α kehää, niin $\overline{OE} \to 1$ eli E lähestyy myös α:n kehää ja $b \to 0$. Siis jos $\mathcal{P}$-ympyrän β keskipiste on lähellä ympyrän α kehää, niin $\mathcal{P}$-ympyrä on euklidisessa mielessä pieni ympyrä.



Kuva 225: Samasäteisiä $\mathcal{P}$-ympyröitä

Lauseen 4.2.20 todistus Olkoon aluksi β:n keskipiste O. Olkoon $S \neq O$ jokin $\mathcal{P}$-piste ja $P, Q \in \alpha$ $\mathcal{P}$-suoran $\overleftrightarrow{OS}$ päätepisteet siten, että $P * O * S$ ja $O * S * Q$



Kuva 226: Lauseen 4.2.20 todistus

Tällöin $\overline{OP} = \overline{OQ} = 1$ ja $\overline{PS} = \overline{PO} + \overline{OS} = 1 + \overline{OS}$ ja $\overline{SQ} = \overline{OQ} - \overline{OS} = 1 - \overline{OS}$. Siten

$$d(O, S) = \left|\log \frac{\overline{OP}\,\overline{SQ}}{\overline{OQ}\,\overline{SP}}\right| = \left|\log \frac{1 - \overline{OS}}{1 + \overline{OS}}\right| = \log \frac{1 + \overline{OS}}{1 - \overline{OS}}.$$

Nyt saadaan $S \in \beta \iff d(O,S) = p \iff \log \frac{1+\overline{OS}}{1-\overline{OS}} = p \iff \frac{1+\overline{OS}}{1-\overline{OS}} = e^p \iff \overline{OS} = \frac{e^p-1}{e^p+1}$, joten $\beta = \{S \mid \overline{OS} = \frac{e^p-1}{e^p+1}\}$, ja tämä on O-keskinen euklidinen ympyrä, jonka säde on $r = \frac{e^p-1}{e^p+1}$.

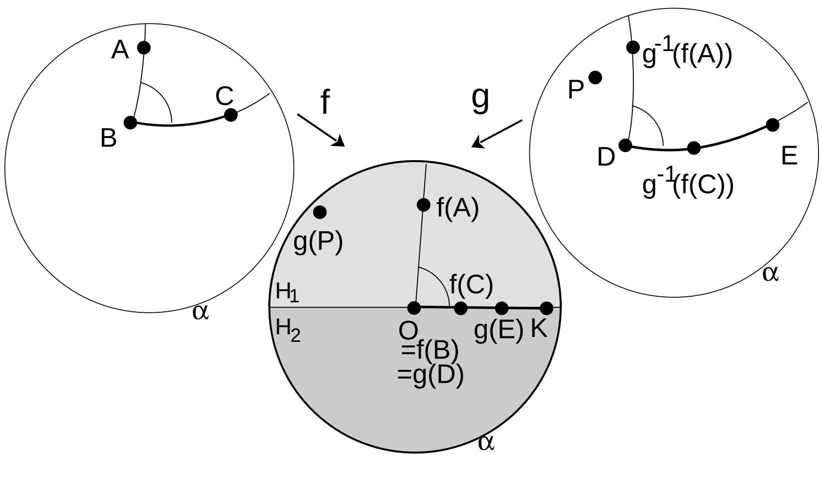
Olkoon seuraavaksi β:n keskipiste $B \neq 0$, $\beta = \{P \mid d(B,P) = p\}$. Lauseen 4.2.3 nojalla voidaan valita liike i siten, että $i(\beta) = O$ ja itse asiassa nimenomaan i:ksi kelpaa ympyräpeilaus γ:n suhteen, missä γ:n keskipiste C on puolisuoralla $\overrightarrow{OB}$. Koska i säilyttää hyperboliset etäisyydet, pätee kaikille $P \in \beta$

$$d(i(P)), O) = d(i(P), i(B)) = d(P,B) = p,$$

ja kääntäen, jos $d(Q,O) = p$, niin $d(i(Q),B) = d(i(Q),i(O)) = d(Q,O) = p$, joten $i(Q) \in \beta$ ja siten $Q = i(i(Q)) \in i(\beta)$. Yllätodetusta seuraa, että $i(\beta)$ on O-keskinen, p-säteinen $\mathcal{P}$-ympyrä. Origokeskisyyden nojalla $i(\beta)$ on O-keskinen r-säteinen euklidinen ympyrä. Koska $r < 1$ ja koska lauseen 4.1.10 nojalla γ:n keskipiste C on α:n ulkopuolella, niin C on $i(\beta)$:n ulkopuolella. Koska $\beta = i(i(\beta))$, niin lauseen 4.1.7 nojalla β on euklidinen ympyrä, jonka euklidiselle keskipisteelle E pätee $E \in \overrightarrow{OB}$. Pituuden $\overline{OE}$ ja säteen määrääminen jätetään harjoitustehtäväksi. Ne saa laskettua lauseen 4.1.7 avulla; $\overline{OC}$ ja γ:n säde löytyvät lauseesta 4.2.3.

LAUSE 4.2.21. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H11).*

Todistus. Olkoon $\measuredangle ABC$ $\mathcal{P}$-kulma, $\overrightarrow{DE}$ $\mathcal{P}$-puolisuora ja P piste siten, että $P \notin \overleftrightarrow{DE}$. On etsittävä $\mathcal{P}$-puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$. Merkitään taas Poincarén malliympyrän α keskipistettä O, valitaan jokin $\mathcal{P}$-piste $K \neq O$ ja merkitään tyypin 1 $\mathcal{P}$-suoran $\overleftrightarrow{OK}$ määräämiä $\mathcal{P}$-puolitasoja H_1 ja H_2. Lauseen 4.2.16 nojalla on olemassa liikkeiden yhdistelmä f siten, että $f(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OK}$. Nyt joko $f(A) \in H_1$ tai $f(A) \in H_2$. Jos $f(A) \in H_2$, niin lisätään f:ään peilaus $\overrightarrow{OK}$:n suhteen, jolloin $f(A) \in H_1$. Siis voidaan olettaa, että $f(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OK}$ ja $f(A) \in H_1$. Vastaavasti löydetään liikkeiden yhdistelmä g siten, että $g(\overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{OK}$ ja $g(P) \in H_1$.



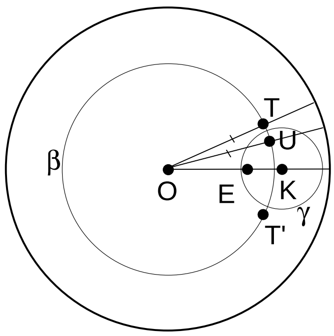
KUVA 227: POINCARÉN MALLI TOTEUTTAA AKSIOOMAN (H11)

Tällöin $(g^{-1}\circ f)(B) = g^{-1}(f(B)) = g^{-1}(O) = D$ ja $(g^{-1}\circ f)(C) \in g^{-1}(\overrightarrow{OK}) = \overrightarrow{DE}$. Lauseen 4.2.19 nojalla $\measuredangle(g^{-1}\circ f)(A)(g^{-1}\circ f)(B)(g^{-1}\circ f)(C) \cong \measuredangle ABC$. Koska $f(C) \in \overrightarrow{OK}$, niin siis $\overrightarrow{D(g^{-1}\circ f)(A)}$ on haettu puolisuora, mikäli $(g^{-1}\circ f)(A)$ ja P ovat samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{DE}$. Samalla puolella ne ovatkin, sillä $f(A)$ ja $g(P)$ ovat puolitasossa H_1, joten $f(A)g(P)\overleftrightarrow{OK}$ ja siten $g^{-1}f(A)g^{-1}(g(P))g^{-1}(\overleftrightarrow{OK})$ eli $(g^{-1}\circ f)(A)P\overleftrightarrow{DE}$. Näin on olemassaolo todistettu.

Yksikäsitteisyys tarkastetaan seuraavasti: Olkoot f ja g kuten edellä ja $\overrightarrow{DR}$ ja $\overrightarrow{DS}$ puolisuoria siten, että $\measuredangle EDR \cong \measuredangle ABC$ ja $\measuredangle EDC \cong \measuredangle ABC$ sekä $RP\overleftrightarrow{DE}$ ja $RS\overleftrightarrow{DE}$. On osoitettava, että $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DS}$. Riittää näyttää, että $\overrightarrow{Og(R)} = \overrightarrow{Og(S)}$. Ainakin $g(R)$ ja $g(S)$ ovat puolitasossa H_1. Lisäksi

$$\begin{aligned}\measuredangle g(R)OK &\cong \measuredangle g(R)g(D)g(E) \cong \measuredangle RDE \cong \measuredangle ABC\\ &\cong \measuredangle SDE \cong \measuredangle g(S)g(D)g(E) = \measuredangle g(S)OK,\end{aligned}$$

joten $\measuredangle g(R)OK \cong \measuredangle g(S)OK$. *(Huom: Tässä kohdassa käytettiin kulmien yhtenevyyden transitiivisuutta, joka todistetaan vasta seuraavana lauseena. Siinä todistuksessa ei kuitenkaan käytetä tätä tulosta, joten kiertopäättelyä ei tule. Voimme jatkaa päättelyä:)*

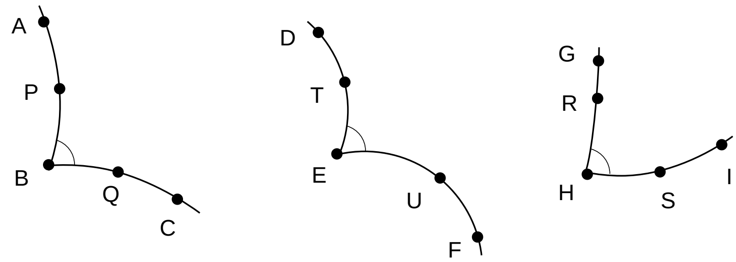


KUVA 228: AKSIOOMAN (H11) YKSIKÄSITTEISYYSPUOLI

Valitaan $T \in \overrightarrow{Og(R)} \setminus \{O\}$ *ja* $U \in \overrightarrow{Og(S)} \setminus \{O\}$ *siten, että* $OT \cong OU$, *jolloin* $U, T \in H_1$ *ja, koska* $\measuredangle g(R)OK \cong \measuredangle g(S)OK$, *niin kolmiot* $\triangle g(R)OK$ *ja* $\triangle g(S)OK$ *ovat yhtenevät ja siis erityisesti* $UK \cong TK$. *Merkitään* $p = d(U,K) = d(T,K)$ *ja* $q = d(U,O) = d(T,O)$, *jolloin siis* $U, T \in \beta$, *missä* β *on* O*-keskinen* q*-säteinen* $\mathcal{P}$*-ympyrä. ja* $U, T \in \gamma$, *missä* γ *on* K*-keskinen ja* p*-säteinen* $\mathcal{P}$*-ympyrä.*

Lauseen 4.2.20 nojalla β *on* O*-keskinen euklidinen ympyrä ja* γ *on* E*-keskinen euklidinen ympyrä, missä* $E \in \overrightarrow{OK} \setminus \{O\}$. *Lauseen 2.6.11 mukaan* β *ja* γ *leikkaavat korkeintaan kahdessa pisteessä. Nyt* T *on* β*:n ja* γ*:n leikkauspiste ja* $T \notin \overleftrightarrow{OE}$. *Kuten lauseen 2.6.12 todistuksessa nähdään nytkin, että tällöin* β *ja* γ *leikkaavat myös pisteessä* T', *joka on* T*:n peilauspiste euklidisen suoran* $\overleftrightarrow{OE}$ *suhteen. Mutta tällöin* $T' \in H_2$, *joten* $T' \neq U$. *Ympyröillä* β *ja* γ *on siis leikkauspisteet* T *ja* T' *ja* U *ja tiedämme, että* $T' \neq U$. *On siis oltava* $T = U$. *Tällöin* $\overrightarrow{Og(R)} = \overrightarrow{Og(S)}$ *ja siten* $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DS}$ *eli yksikäsitteisyyskin on todistettu.* □

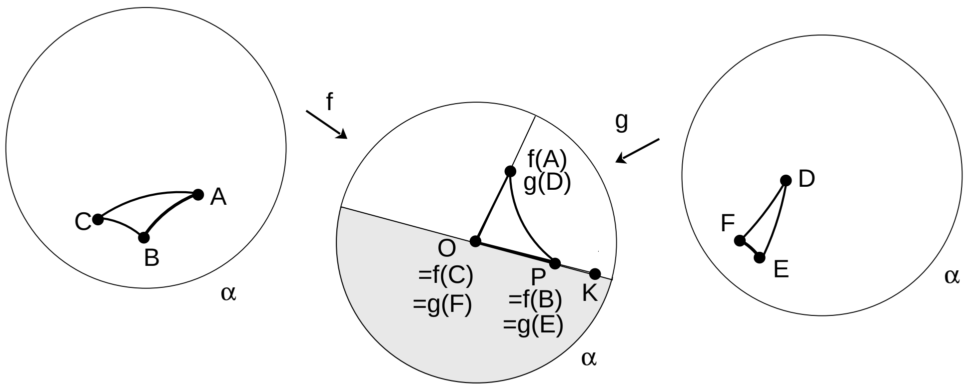
LAUSE 4.2.22. *Poincarén malli toteuttaa aksiooman (H12).*
Todistus. Poincarén mallissa kulmien yhtenevyysrelaation refleksiivisyys ja symmetrisyys ovat ilmeisiä, mutta transitiivisuus vaatii pienen perustelun. Olkoot siis $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ ja $\measuredangle DEF \cong \measuredangle GHI$ sekä $P \in \overrightarrow{BA}$, $Q \in \overrightarrow{BC}$, $R \in \overrightarrow{HG}$, $S \in \overrightarrow{HI}$ siten, että $BP \cong HR$ ja $BQ \cong HS$. Pitää osoittaa, että $PQ \cong RS$.



KUVA 229: POINCARÉN MALLI TOTEUTTAA AKSIOOMAN (H12)

Koska (H8) pätee, niin voidaan valita $T \in \overrightarrow{ED}$ siten, että $ET \cong BP$, jolloin aksiooman (H9) nojalla myös $ET \in HR$. Vastaavasti voidaan valita $U \in \overrightarrow{EF}$ siten, että $EU \cong BQ$ ja $EU \cong HS$. Koska nyt $ET \cong BP$ ja $EU \cong BQ$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, niin määritelmän mukaan $PQ \cong TU$. Vastaavasti päätellään, että $RS \cong TU$. Tällöin (H9):n nojalla $PQ \cong RS$. □

LAUSE 4.2.23. *Poincarén malli toteuttaa SKS-aksiooman (H13).*
Todistus. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ $\mathcal{P}$-kolmioita siten, että $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $AB \cong DE$ sekä $BC \cong EF$. On osoitettava, että $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Suoraan kulmien yhtenevyyden nojalla on $AC \cong DF$, joten vastinsivut ovat yhteneviä ja riittää siis todistaa, että vastinkulmat ovat yhteneviä. Oletuksen mukaan $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, joten riittää todistaa, että $\measuredangle C \cong \measuredangle F$ ja $\measuredangle A \cong \measuredangle D$. (Käytettävissä on nyt siis oletus SSS, itse asiassa peräti SSSK.)

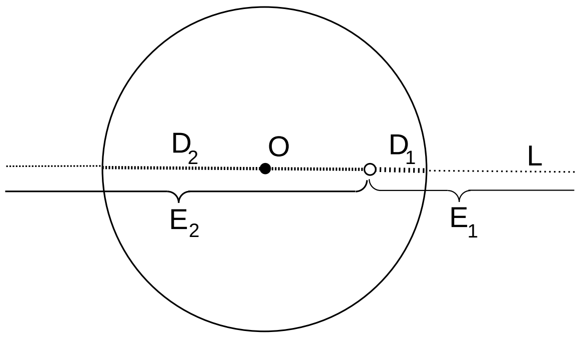


KUVA 230: POINCARÉN MALLI TOTEUTTAA SKS-AKSIOOMAN (H13)

Kuten lauseen 4.2.21 todistuksessa on nytkin olemassa liikkeiden yhdistelmä f siten, että $f(\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{OK}$ ja $f(A) \in H_1$ ja vastaavasti myös liikkeiden yhdistelmä g siten, että $g(\overrightarrow{FE}) = \overrightarrow{OK}$ ja $g(D) \in H_1$. Koska oletusten mukaan lisäksi $Of(B) = f(C)f(B) \cong CB \cong FE \cong g(F)g(E) = Og(E)$, niin $f(B) =$

$g(E)$. Merkitään $P = f(B) = g(E)$. Osoitetaan, että $f(A) = g(D)$: Koska $Of(A) = f(C)f(A) \cong CA \cong FD \cong g(F)g(D) = Og(D)$, niin $f(A)$ ja $g(D)$ ovat ainakin samalla O-keskisellä $\mathcal{P}$-ympyrällä. Koska $Pf(A) = f(B)f(A) \cong BA \cong ED \cong g(E)g(D) = Pg(D)$, niin $f(A)$ ja $f(D)$ ovat myös samalla P-keskisellä $\mathcal{P}$-ympyrällä. Koska lisäksi $f(A)$ ja $f(D)$ ovat puolitasossa H_1, niin aivan samoin kuin lauseen 4.2.21 todistuksessa nähdään nytkin, että tämä on mahdollista vain, kun $f(A) = g(D)$. Koska kulmat säilyvät liikkeissä, on siis $\measuredangle ACB \cong \measuredangle f(A)f(C)f(B) = \measuredangle g(D)OP = \measuredangle g(D)g(F)g(E) \cong \measuredangle DFE$, eli $\measuredangle C = \measuredangle F$. Samalla tavalla saadaan $\measuredangle A = \measuredangle D$. □

LAUSE 4.2.24. *Poincarén malli toteuttaa Dedekindin aksiooman.*
Todistus. Todistus perustuu luonnolliseti siihen, että pohjana oleva euklidinen malli toteuttaa Dedekindin aksiooman. Koska liikkeet säilyttävät välissäolon ja jokainen suora on liikkeellä kuvattavissa tyyppiä 1 olevaksi suoraksi, niin riittää osoittaa, että Dedekindin aksiooma toimii tyypin 1 suoralla ℓ. Olkoon siis $\ell = \mathcal{A} \cap L$, missä L on O:n kautta kulkeva euklidinen suora.



KUVA 231: POINCARÉN MALLI TOTEUTTAA DEDEKINDIN AKSIOOMAN

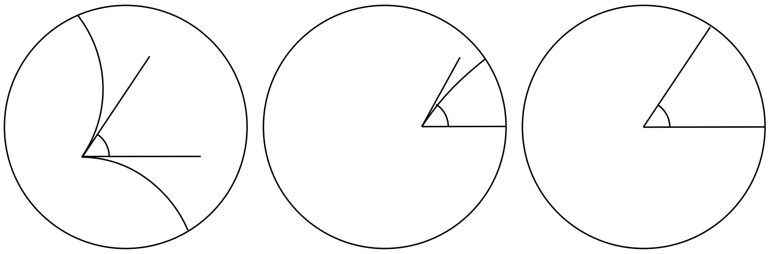
Olkoot D_1, $D_2 \subset \ell$ siten, että Dedekindin ehdot ovat voimassa. Määritellään

$$E_1 = D_1 \cup \{P \in L \mid \exists Q \in D_2,\ R \in D_1 \text{ s.e. } Q * R * P\}$$

ja $E_2 = L \setminus E_1$. Tarkastelemalla eri vaihtoehtoja nähdään helposti, mutta aika työläästi, että E_1 ja E_2 toteuttavat Dedekindin ehdot euklidisessa mielessä suoralla L. Koska euklidinen malli toteuttaa Dedekindin aksiooman, niin on olemassa piste $P \in L$, joka on E_1:n ja E_2:n ”välissä” aksiooman mielessä. Tällöin nähdään helposti, että $P \in \ell$ ja P on D_1:n ja D_2:n ”välissä” Poincarén mallin mielessä. Näin on todistettu, että Dedekindin aksiooma pätee tässäkin mallissa. □

Nyt on todettu, että Poincarén malli toteuttaa kaikki muut aksioomat, paitsi paralleeliaksiooman. Arkhimedeen aksioomaahan ei tarvitse tässä verifioida, koska se lauseen 2.6.13 mukaan seuraa jo todistamistamme. Koska aksioomat toteutuvat, voidaan malliin konstruoida jana- ja kulmamitta kuten aikaisemmin on esitetty. Minkälaisia nämä ovat? Janamitta riippuu tietenkin valitusta yksikköjanasta. Jos käytetään yksikköjanana janaa OI, missä O on α:n keskipiste ja I valittu niin, että $d(O,I) = 1$, eli $\overline{OI} = \frac{e-1}{e+1}$, niin hyperbolinen etäisyys toteuttaa lauseen 2.5.10 ehdot ja lauseen 2.5.10 mukaisesti tällöin **janamitta on yhtä suuri kuin hyperbolinen etäisyys**.

Kulmamitalle vastaava asia ei ole aivan yhtä selvä. Työtä aiheuttaa mm. se seikka, että lauseen 2.5.10 vastinetta kulmille ei ole todistettu edellä, vaikka se voitaisiin toki tehdä. Tulos on kuitenkin seuraava: Poincarén mallissa **kulmamitta on tangenttien välisen kulman euklidinen mitta**.



Kuva 232: Poincarén kulmamitta

LAUSE 4.2.25. *Poincarén malli ei toteuta paralleeliaksioomaa.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

4.3. Hyperbolista geometriaa.

Yritykset todistaa paralleeliaksiooma jatkuivat 1800-luvun lopulle asti. 1800-luvun alkupuolella kuitenkin kolme matemaatikkoa — toisistaan riippumatta — alkoivat miettiä, mitä tapahtuisi, jos paralleeliaksiooman sijasta oletettaiiin sen looginen negaatio, eli että suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkisi useampia sen suuntaisia suoria. Nämä matemaatikot olivat unkarilainen Janos Bolyai (1802–1860), saksalainen Carl Frierich Gauss (1777–1856) ja venäläinen Nikolai Ivanovits Lobatševski (1792–1856). He kehittivät tämän uuden ns. *hyperbolisen aksiooman* pohjalta geometrian, joka herätti ihmetystä. Gauss huomasi näennäisen paradoksin takaa seuraavaa:

Oletus, että kolmion kulmien summa on alle 180°*, johtaa merkilliseen geometriaan, aivan erilaiseen kuin omamme [euklidinen], kuitenkin täysin ristiriidattomaan. Olen tyydytyksekseni kehittänyt sitä niin pitkälle, että pystyn ratkaisemaan siinä kaikki ongelmat, poikkeuksena eräs vakio, jota ei voi määrätä a priori. Mitä suuremmaksi tämän vakion valitsee, sitä lähemmäs tulee euklidista geometriaa, ja kun se valitaan äärettömän suureksi, geometriat yhtyvät. Tämän geometrian teoreemat vaikuttavat paradoksaalisilta ja asiaan vihkiytymättömästä absurdedeilta; mutta hätäilemätön perusteellinen ajattelu paljastaa, että ne eivät sisällä yhtään mitään mahdotonta. Esimerkiksi kolmion kolme kulmaa tulevat miten pieniksi vain halutaan, kunhan sivut valitaan tarpeeksi suuriksi, mutta kolmion ala ei koskaan voi ylittää tiettyä raja-arvoa, riippumatta siitä, kuinka pitkiksi sivut valitaan, eikä edes koskaan saavuta tuota rajaa.*

Kaikki yritykseni löytää ristiriita tästä epäeuklidisesta geometriasta ovat epäonnistuneet, ja ainoa asia, jonka suhteen se on havaintojemme vastainen on se, että jos se olisi tosi, niin avaruudessa olisi olemassa itsestään määräytynyt lineaarinen suuruus [luonnollinen mittayksikkö], (jota me emme tunne). Mutta minusta näyttää sitä, että huolimatta metafyysikkojen mitäänsanomattomasta sanahelinästä tiedämme liian vähän avaruuden todellisesta luonteesta voidaksemme pitää täysin *mahdottomana sellaista, mikä näyttää meistä luonnottomalta. Jos tämä epäeuklidinen geometria olisi todellista, ja jos olisi mahdollista verrata mainitsemaani vakiota niihin suuruuksiin, joita kohtaamme mittauksissamme maan päällä ja avaruudessa, niin se voitaisiin määrätä a posteriori. Siksi olen joskus leikilläni toivonut, että euklidinen geometria ei pätisi, koska meillä silloin olisi absoluuttinen standardipituusmitta.*

Bolyai, Gauss ja Lobatševski eivät tietenkään tunteneet Poincarén mallia; itse asiassa he eivät tunteneet minkäänlaista mallia, joka osoittaisi, että hyperbolinen aksiooma ei johda ristiriitaan. Ensimmäisen tällainen mallin on keksinyt Eugenio Beltrami[25] v. 1868 ja ensimmäisenä tällaisen mallin on täysin oikeaksi todistanut Felix Klein[26] v.1871.

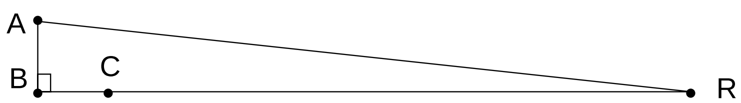
Hyperbolisen geometrian koko struktuuri, kaikki lauseet jne. olivat siis aluksi "tyhjän päällä" — ristiriidan löytyminen olisi romuttanut kaiken (mutta viimeinkin todistanut paralleeliaksiooman)! Siksi Gauss ei julkaissutkaan konstruktioitaan. Ristiriitaa ei kuitenkaan löytynyt (eikä koskaan löydy!), ja niinpä mekin tässä tutustumme joihinkin hyperbolisen geometrian perusasioihin.

Asetetaan ensin perusta:

(HYP) **Hyperbolinen aksiooma** On olemassa suora ℓ ja piste P suoran ℓ ulkopuolella siten, että P:n kautta kulkee ainakin kaksi eri ℓ:n suuntaista suoraa.

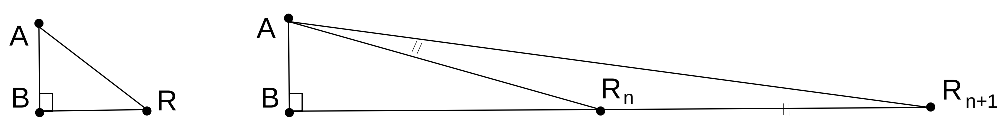
Osoitetaan tämän avulla ensin, että jokaisen kolmion defekti on aidosti positiivinen, eli kulmien summan asteluku aidosti alle 180. Todistetaan ensin kuitenkin Saccherin ja Legendre'in lauseen avulla aputulos, jossa ei tarvita hyperbolista aksioomaa. Aputulos pätee siis myös euklidisessa geometriassa.

LAUSE 4.3.1. *Olkoon $\measuredangle ABC$ suora kulma ja $a > 0$ positiivinen reaaliluku. Tällöin puolisuoralla $\overline{BC}$ on piste R siten, että $(\measuredangle BRA)^\circ < a$.*



Kuva 233: Aputulos

Todistus. Konstruoidaan jono $(R_n)_{N\in\mathbb{N}}$ puolisuoran $\overrightarrow{BC}$ pisteitä seuraavalla tavalla: valitaan ensin $R_1 \in \overrightarrow{BC}$ siten, että $AB \cong BR$ ja siten, kun R_n on valittu jatketaan valitsemalla $R_{n+1} \in \overrightarrow{BC}$ siten, että $B * R_n * R_{n+1}$ ja $R_nR_{n+1} \cong AR_n$, jolloin kolmio $\triangle R_{n+1}R_nA$ on tasakylkinen.



Kuva 234: Aputuloksen todistus

[25]Eugenio Beltrami 1835–1900, Italia

[26]Felix Christian Klein 1849–1925. Saksa

Osoittaan induktiolla, että $(\measuredangle BR_nA)^\circ \leq 2^{-n} \cdot 90$:

Kun $n = 1$, niin lauseen 2.4.1 nojalla $2(\measuredangle A)^\circ \cong (\measuredangle R_1)^\circ$. Koska $(\measuredangle B)^\circ = 90$, niin Saccherin ja Legendren lauseen nojalla $2 \cdot (\measuredangle R_1)^\circ + 90 \leq 180$, joten $\measuredangle(R_1)^\circ \leq 2^{-1} \cdot 90$, eli väite pätee tapauksessa $n = 1$.

Olkoon sitten väite tosi n:lle. Koska $B * R_n * R_{n+1}$, niin $(\measuredangle BR_nA)^\circ + (\measuredangle AR_nR_{n+1})^\circ = 180$, jolloin induktio-oletuksen nojalla

$$(*) \qquad (\measuredangle AR_nR_{n+1})^\circ \geq 180 - 2^{-n} \cdot 90.$$

Lauseen 2.4.1 nojalla $(\measuredangle R_nAR_{n+1})^\circ = (\measuredangle AR_{n+1}R_n)^\circ$, joten Saccherin ja Legendren lauseen mukaan

$$2(\measuredangle AR_{n+1}R_n)^\circ \leq 180 - (\measuredangle AR_nR_{n+1})^\circ,$$

joten $(*)$:n mukaan

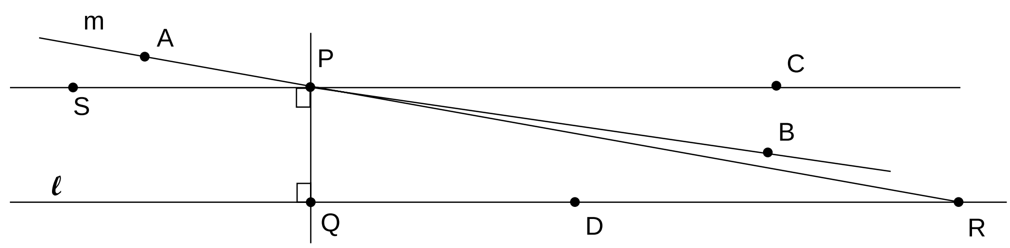
$$(\measuredangle AR_{n+1}R_n)^\circ \leq 90 - \frac{1}{2}\big(180 - 2^{-n} \cdot 90\big) = 2^{-(n+1)} \cdot 90.$$

Koska $\measuredangle AR_{n+1}R_n = \measuredangle AR_{n+1}B$, niin induktioväite $(n+1)$:lle pätee.

Valitaan lopuksi $n_0 \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $2^{-n} \cdot 90 < a$, jolloin $(\measuredangle BR_{n_0}A)^\circ \leq 2^{-n} \cdot 90 < a$ ja voidaan valita $R = R_{n_0}$. $\square$

LAUSE 4.3.2. *Jokaisen kolmion defekti on hyperbolisessa geometriassa aidosti positiivinen.*

Todistus. Lauseen 2.5.26 nojalla riittää löytää yksi tällainen kolmio. Hyperbolisen aksiooman nojalla on olemassa suora ℓ ja piste $P \notin \ell$ siten, että P:n kautta kulkee ainakin kaksi ℓ:n suuntaista suoraa. Olkoon $Q \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$ ja S sellainen piste, että $\overleftrightarrow{PS} \perp \overleftrightarrow{PQ}$, jolloin $\overleftrightarrow{PS} \parallel \ell$.



KUVA 235: AINAKIN YHDEN KOLMION DEFEKTI ON AIDOSTI POSITIIVINEN

Nyt siis P:n kautta kulkee jokin toinen suora $m \parallel \ell$, $m \neq \overleftrightarrow{PS}$. Valitaan $A \in m \setminus \{P\}$. Jos $A\overleftrightarrow{PS}Q$, niin valitaan piste B siten, että $A * P * B$. Jos taaas $AQ\overleftrightarrow{PS}$, niin asetetaan $B = A$. Kummassakin tapauksessa $B \in m \setminus \{P\}$ ja $QB\overleftrightarrow{PS}$.

Vastaavalla tavalla voidaan valita $C \in \overleftrightarrow{PS} \setminus \{P\}$ siten, että $BC\overleftrightarrow{PQ}$ ja $D \in \ell \setminus \{Q\}$ siten, että $DB\overleftrightarrow{PQ}$.

Merkitään $a = (\measuredangle CPB)^\circ$, jolloin $a > 0$. Lauseen 4.3.1 nojalla voidaan valita $R \in \overleftrightarrow{QD}$ siten, että

$$(*) \qquad (\measuredangle PRQ)^\circ < a.$$

Nyt R on kulman $\measuredangle QPB$ sisällä. Tämän voi perustella seuraavasti: $DR\overleftrightarrow{PQ}$ ja $BD\overleftrightarrow{PQ}$, joten $RB\overleftrightarrow{PQ}$ ja riittää osoittaa, että $RQ\overleftrightarrow{PB}$ eli RQm. Näin on, koska $m \parallel \ell$ ja siten m ei voi leikata edes suoraa $\overleftrightarrow{RQ}$ saati sitten janaa RQ.

Koska siis R todella on kulman $\measuredangle QPB$ sisällä, niin $\measuredangle QPR < \measuredangle QPB$ eli

$$(\measuredangle QPR)^\circ < (\measuredangle QPB)^\circ. \tag{$**$}$$

Toisaalta, koska $BQ\overleftrightarrow{PC}$ ja $BC\overleftrightarrow{PQ}$, niin B on kulman $\measuredangle QPC$ sisällä ja silloin

$$90 = (\measuredangle QPC)^\circ = (\measuredangle QPB)^\circ + (\measuredangle BPC)^\circ = (\measuredangle QPB)^\circ + a.$$

Kolmiossa $\triangle PQR$ saadaan tällöin $(*)$:n ja $(**)$:n nojalla

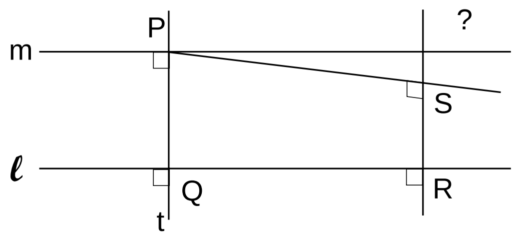
$$\begin{aligned}\mathrm{def}(\triangle PQR) &= 180 - (\measuredangle PQR)^\circ - (\measuredangle QRP)^\circ - (\measuredangle RPQ)^\circ \\ &> 180 - 90 - a - (\measuredangle QPB)^\circ \\ &= 90 - (a + (\measuredangle QPB)^\circ) = 90 - 90 = 0.\end{aligned}$$

□

Hyperbolinen aksiooma takaa, että on olemassa ainakin yksi suora ℓ ja suoran ℓ ulkopuolella piste P, jonka kautta kulkee useampia ℓ:n suuntaista suoria. Itse asiassa näin on asianlaita *jokaiselle* suoralle ja sen ulkopuolella olevalle pisteelle:

LAUSE 4.3.3. *Olkoon ℓ mielivaltainen suora ja P sen ulkopuolinen piste. Tällöin P:n kautta kulkee ainakain kaksi ℓ:n suuntaista suoraa.*

Todistus. Valitaan $Q \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$ ja olkoon m pisteen P kautta kulkeva $\overleftrightarrow{PQ}$:n normaali. Tällöin $m \parallel \ell$.



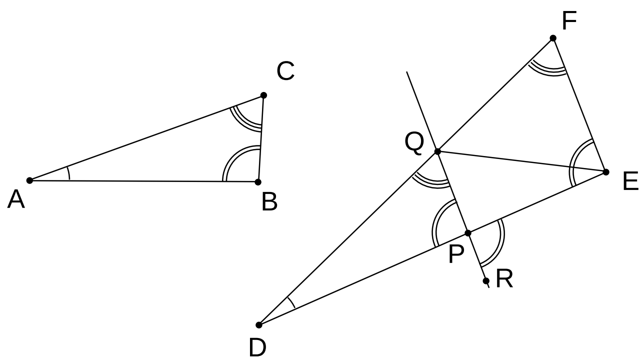
Kuva 236: Hyperbolinen aksiooma pätee kaikkialla

Valitaan $R \in \ell \setminus \{Q\}$ ja olkoon t pisteen R kautta kulkeva ℓ:n normaali. Valitaan $S \in t$ siten, että $\overleftrightarrow{PS} \perp t$. Koska $P \notin \ell$, niin $S \neq R$. Koska $\overleftrightarrow{PS}$ ja ℓ ovat t:n normaaleja, ne ovat yhdensuuntaisia. Väitteen todistamiseksi riittää nyt osoittaa, että $\overleftrightarrow{PS} \neq m$, ja tähän taas riittää se, että $S \notin m$. Tehdään antiteesi: $S \in m$. Tällöin $\square QRSP$ on suorakulmio, mikä lauseen 2.5.26 mukaan merkitsee sitä, että jokaisen kolmion defekti on nolla, mikä taas on vastoin lausetta 4.3.2 ja siis mahdotonta. □

Seuraava lause sanoo, että hyperbolisessa geometriassa kolmiot ovat yhtenevät, jos niillä on yhtenevät kulmat. Ei siis ole muita samanmuotoisia kolmioita kuin yhteneväiset.

LAUSE 4.3.4. (KKK-sääntö). *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita, joilla $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Todistus. Antiteesi: Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ eivät olekaan yhteneviä. KSK-säännön nojalla $\overline{AB} \neq \overline{DE}$, $\overline{BC} \neq \overline{EF}$ ja $\overline{CA} \neq \overline{FD}$. Kussakin näisstä on siis joko "$<$" tai "$>$". Vaihtamalla tarvittaessa merkintöjä ($A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ ja $C \leftrightarrow F$) voidaan saada aikaan, että ainakin kahdessa em. epäyhtälöistä esiintyy merkki "$<$". Vaihtamalla vielä merkintöjä voidaan olettaa, että $\overline{AB} < \overline{DE}$ ja $\overline{AC} < \overline{DF}$ ja $\overline{BC} \neq \overline{EF}$. Tällöin voidaan valita P ja Q siten, että $D * P * E$, $D * Q * F$, $\overline{AB} = \overline{DP}$ ja $\overline{AC} = \overline{DQ}$.



Kuva 237: KKK-sääntö

SKS-säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$. Oletuksen nojalla $\measuredangle E \cong \measuredangle DPQ$ ja $\measuredangle F \cong \measuredangle DQP$. Jos valitaan R siten, että $Q * P * R$, niin ristikulmille pätee $\measuredangle EPR \cong \measuredangle QPD$. Koska $F\overleftrightarrow{QE}D$ ja $Q\overleftrightarrow{ED}R$, niin $F\overleftrightarrow{ED}R$ ja $\measuredangle FEP \cong \measuredangle EPR$, jolloin lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$. Tällöin $\square FQPE$ on nelikulmio, jolla on ainakin yksi pari yhdensuuntaisia vastakkaisia sivuja, eli *puolisuunnikas.* Jätämme harjoitustehtäväksi todistaa, että tästä seuraa, että Q on kulman $\measuredangle E$ sisällä ja E on kulman $\measuredangle FQP$ sisällä. Tällöin

$$(\measuredangle FEQ)^\circ + (\measuredangle QEP)^\circ = (\measuredangle E)^\circ \quad \text{ja} \quad (\measuredangle FQE)^\circ + (\measuredangle EQP)^\circ = (\measuredangle FQP)^\circ.$$

Tästä saadaan

$$\operatorname{def}(\triangle FQE) + \operatorname{def}(\triangle EQP) = 360 - (\measuredangle F)^\circ - (\measuredangle E)^\circ - (\measuredangle EPQ)^\circ - (\measuredangle FQP)^\circ.$$

Koska $E * P * D$ ja $F * Q * D$, niin

$$(\measuredangle EPQ)^\circ = 180 - (\measuredangle QPD)^\circ \quad \text{ja } (\measuredangle FQP)^\circ = 180 - (\measuredangle PQD)^\circ.$$

Toisaalta $(\measuredangle QPD)^\circ = (\measuredangle E)^\circ$ ja $(\measuredangle PQD)^\circ = (\measuredangle F)^\circ$, joten saadaan

$$\operatorname{def}(\triangle FQE)+\operatorname{def}(\triangle EQP) = 360-(\measuredangle F)^\circ-(\measuredangle E)^\circ-(180-(\measuredangle E)^\circ)-(180-(\measuredangle F)^\circ) = 0.$$

Tämä on mahdotonta lauseen 4.3.2 nojalla. □

Euklidisessa geometriassa pätee lauseen 3.1.5 nojalla seuraava tulos: Jos $\ell \parallel m$, niin kaikki ℓ:n normaalit ovat myös m:n normaaleja. Erityisesti ℓ:llä ja m:llä on äärettömän monta yhteistä normaalia. Hyperbolisessa geometriassa kaikki on toisin.

LAUSE 4.3.5. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria. Tällöin ℓ:llä ja m:llä on korkeintaan yksi yhteinen normaali.*

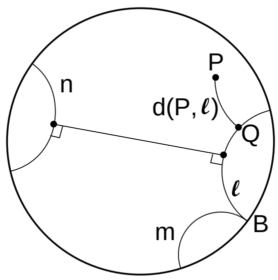
Todistus. Antiteesi: Olkoot n ja t suorien ℓ ja m yhteisiä normaaleja, mutta eri suoria. Tällöin leikkauspisteet muodostavat suorakulmion, mikä on lauseiden 2.5.26 ja 4.3.2 nojalla mahdotonta. □

Yhdensuuntaisilla suorilla on siis yksi tai ei yhtään yhteistä normaalia. Standardikonstruktiolla (kuten esimerkiksi lauseessa 2.4.17) saadaan aikaan yhdensuuntaisia, joilla on yhteinen normaali, mutta voidaan kysyä, onko yhdensuuntaisilla aina yhteistä normaalia. Vastaus on kuin onkin kielteinen: On olemassa yhdensuuntaisia, joilla ei ole yhteistä normaalia lainkaan. Tämä näkyy Poincarén mallissa ja todistetaan myöhemmin lauseenakin Useimmilla — mitä se sitten tarkoittaakin — yhdensuuntaisilla on yhteinen normaali. Jos näin on, sanotaan, että kyseiset suorat ovat *normaalisti yhdensuuntaisia*, muussa tapauksessa eli silloin, kun yhteistä normaalia ei ole, sanotaan, että ne ovat *asymptoottisesti yhdensuuntaisia.* Nimitys "asymptoottinen" selittyy myöhemmin, ks. huom. 45.

Asiaan liitty likeisesti käsite "pisteen etäisyys suorasta": Olkoon ℓ suora ja $P \notin \ell$ piste, sekä m pisten P kautta kulkeva ℓ:n normaali ja Q ℓ:n ja normaalin m leikkauspiste. Sanotaan, että *pisteen P etäisyys suorasta ℓ, $d(P, \ell)$*, on janan PQ pituus,

$$d(P, \ell) = \overline{PQ}.$$

Tältä asiat näyttävät Poincarén mallissa:

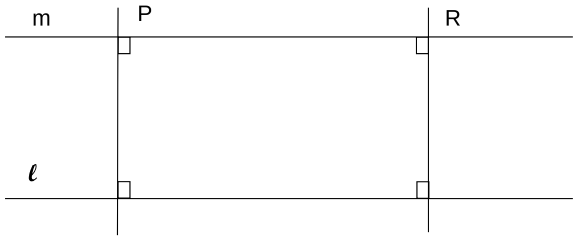


KUVA 238: YHDENSUUNTAISIA POINCARÉN MALLISSA

Kuvassa ℓ ja n ovat normaalisti yhdensuuntaisia, ℓ ja m asymptoottisesti yhdensuuntaisia. Huomaa, että tämä ei ole mitenkään itsestäänselvää!

Jos euklidisessa geometriassa ℓ ja m ovat yhdensuuntaisia ja $P, R \in m$, niin $d(P, \ell) = d(R, \ell)$. Tämä seuraa suoraan siitä, että euklidisessa geometriassa suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtenevät. Euklidisessa geometriassa voidaan täten määritellä *yhdensuuntaisten suorien ℓ ja m etäisyys* asettamalla

$$d(\ell, m) = d(P, \ell), \qquad \text{P mielivaltainen } \in m.$$

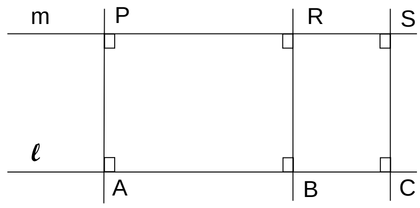


KUVA 239: EUKLIDISET YHDENSUUNTAISET

Hyperbolisessa geometriassa ei näin voi menetellä. Pätee näet seuraava lause.

LAUSE 4.3.6. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria. Tällöin $d(P,\ell) = d(R,\ell)$ korkeintaan kahdella eri pisteellä $P, R \in m$.*

Todistus. Antiteesi: Olkoot P, R, $S \in m$ eri pisteitä, joille pätee $d(P,\ell) = d(R,\ell) = d(S,\ell)$. Voidaan olettaa, että $P * R * S$. Olkoot A, B, $C \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$, $\overleftrightarrow{BR} \perp \ell$ ja $\overleftrightarrow{CS} \perp \ell$, jolloin $A * B * C$.



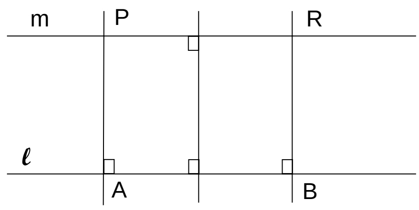
KUVA 240: NORMAALIT HYPERBOLISET YHDENSUUNTAISET

Pienenä harjoitustehtävänä voi osoittaa, että $\measuredangle APR \cong \measuredangle BRP$, $\measuredangle APS \cong \measuredangle CSP$ ja $\measuredangle BRS \cong \measuredangle CSR$. Tällöin, koska $P * Q * R$, kulma $\measuredangle PRB$ on yhtenevä täydennyskulmansa $\measuredangle BRS$ kanssa ja siten $\measuredangle PRB$ on suora. Tällöin myös $\measuredangle APE$ on suora ja siten $\square ABRP$ on suorakulmio, mikä hyperbolisessa geometriassa on mahdotonta. $\square$

Jos siis $a > 0$, niin 4.3.6:n nojalla on olemassa **korkeintaan** kaksi eri pistettä $P, R \in m$, s.e. $d(P,\ell) = d(R,\ell) = a$. Voi sattua, että tällaisia pisteitä on vain yksi tai ei yhtään. Jos niitä on kaksi, niin pätee seuraavaa:

LAUSE 4.3.7. *Olkoot ℓ ja m yhdensuuntaisia suoria ja P ja $R \in m$ eri pisteitä s.e. $d(P,\ell) = d(R,\ell) = a$. Tällöin ℓ ja m ovat* **normaalisti** *yhdensuuntaisia.*

Todistus. Olkoot A, $B \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{PA} \perp \ell$ ja $\overleftrightarrow{RB} \perp \ell$.



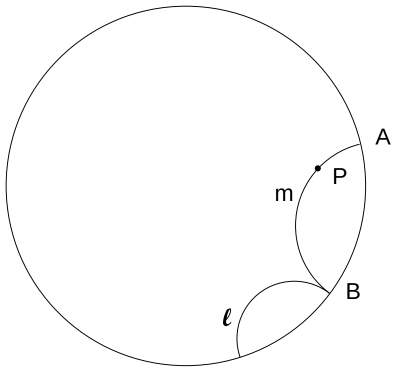
KUVA 241: KAKSI YHTÄ KAUKAISTA PISTETTÄ TUOTTAVAT YHTEISEN NORMAALIN

Pienenä harjoitustehtävänä voi osoittaa, että AB:n keskinormaali on PR:n keskinormaali ja siten ℓ:n ja m:n yhteinen normaali. □

Jos ℓ ja m ovat asymptoottisesti yhdensuuntaisia, niin lauseen 4.3.7. nojalla $d(P,\ell) \neq d(R,\ell) = a$ aina, kun $P, R \in m$ ovat eri pisteitä. Pätee enemmänkin:

LAUSE 4.3.8. *Olkoot ℓ ja m asymptoottisesti yhdensuuntaisia suoria ja $a > 0$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $P \in m$ siten, että $d(P,\ell) = a$.*

Todistus sivuutetaan, koska se on mutkikas, varsinkin olemassaolopuoli. Katsotaan kuitenkin mallia:



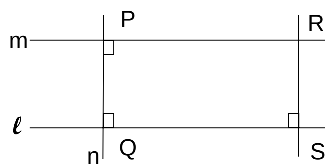
Kuva 242: Asymptoottisesti yhdensuuntaiset

Huomautus 45. Poincarén mallissa tilanne on seuraava: Jos A ja B ovat m:n (euklidiset) päätepisteet, kuten kuvassa, niin $d(P,\ell) \to \infty$, kun $P \to A$ ja $d(P,\ell) \to 0$, kun $P \to B$. Vastaava tilanne syntyy 4.3.8:n nojalla yleensäkin, erityisesti siis $d(P,\ell) \to 0$, kun P ”lähestyy suoran toista päätä” euklidisessa mielessä. (Tämän voisi tietysti ilmaista täsmällisemminkin). Tämä selittää nimen ”asymptoottisesti yhdensuuntaiset”.

Jos ℓ ja m ovat normaalisti yhdensuuntaiset ja $a > 0$, niin ”suurille” a löytyy sellainen $P \in m$, itse asiassa kaksikin sellaista, että $d(P,\ell) = a$, mutta ”pienille” a ei. Tämä näkyy seuraavasta:

LAUSE 4.3.9. *Olkoot ℓ ja m normaalisti yhdensuuntaisia ja n niiden yhteinen normaali. Olkoon P m:n ja n:n sekä Q suorien ℓ ja n yhteinen piste. Tällöin*

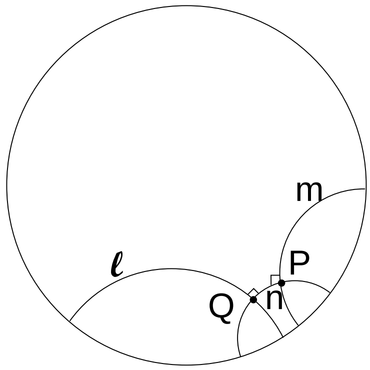
$$\overline{PQ} = \min\{d(R,\ell) \mid R \in m\}.$$



Kuva 243: Lause 4.3.9

Todistus. Suoraan määritelmän mukaan on $\overline{PQ} = d(P, \ell)$, joten riittää osoittaa, että $d(R, \ell) \geq \overline{PQ}$ kaikilla $R \in \ell \setminus \{P\}$. Olkoon $S \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{RS} \perp \ell$, jolloin $\overline{RS} = d(R, \ell)$. Pienenä harjoitustehtävänä voi todeta, että $(\measuredangle R)^\circ \leq 90$, ja koska hyperbolisessa geometriassa ei ole suorakulmioita, niin siis $(\measuredangle R)^\circ < 90$. Harjoitustehtäväksi jää myös osoittaa, että tällöin $\overline{PQ} < \overline{RS}$. $\square$

Poincarén mallissa normaali yhdensuuntaisuus ja lyhimmän etäisyyden kohta näyttävät siis tältä:



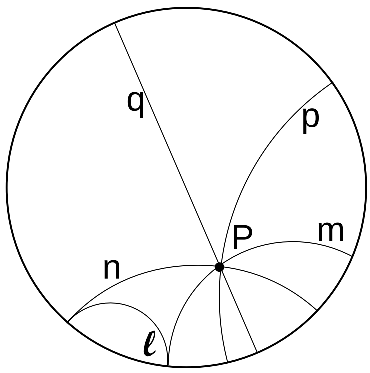
KUVA 244: LYHIN ETÄISYYS

Pisteessä $P \in m$ minimoituu etäisyys $d(P, \ell)$, missä $P \in m$ — jopa aidosti, kuten lauseen 4.3.9 todistuksesta näkyy.

Muotoillaan lopuksi vielä lause, joka kertoo, että asymptoottisia yhdensuuntaisia on todella olemassa hyperbolisessa geometriassa.

LAUSE 4.3.10. *Olkoon ℓ suora ja P piste sen ulkopuolella. Tällöin P:n kautta kulkee täsmälleen kaksi suoraa, jotka ovat ℓ:n kanssa asymptoottisesti yhdensuuntaisia. Kaikki muut P:n kautta kulkevat ℓ:n kanssa yhdensuuntaiset suorat — joita on äärettömän monta — ovat normaalisti yhdensuuntaisia.*

Dedekindin aksioomaan perustuva todistus sivuutetaan tekstin päättyessä tähän, vaikka päättely ei ole kovin hankala. Viimeisessä kuvassamme m ja n ovat ℓ:n kanssa asymptoottisesti yhdensuuntaiset ja p ja q ovat ℓ:n kanssa normaalisti yhdensuuntaiset.



KUVA 245: SUORIA POINCARÉN MALLISSA

4.4. Lopuksi.

Jos oletamme, että reaalilukujen järjestelmä on ristiriidaton eikä joukko-opissa eikä logiikassakaan ole ristiririitaa, niin koordinaattigeometria on olemassa ja on siis malli euklidiselle geometrialle, joka täten on ristiriidaton. Poincarén malli osoittaa tällöin, että myös hyperbolinen geometria on ristiriidaton, niin merkilliseltä kuin se aluksi saattaa vaikuttaakin. On edelleen helppoa konstruoida malli reaaliluvuille lähtemällä hyperbolisen geometrian suorasta. Siten olemme viime kädessä todistaneet, että nämä kaikki kolme järjestelmää ovat joko ristiriidattomia — tai sitten ristiriitaisia. Ristiriitaa ei ainakaan vielä ole löytynyt.

Hilbertin tasogeometrioiden aksioomat

(H1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa yksi ja vain yksi suora, joka kulkee sekä P:n että Q:n kautta.

(H2) Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi pistettä.

(H3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

(H4) Jos $A * B * C$, niin A, B ja C ovat eri pisteitä, joiden kaikkien kautta kulkee sama suora ja $C * B * A$.

(H5) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$.

(H6) Jos A, B ja C ovat eri pisteitä, jotka kuuluvat samalle suoralle, niin yksi ja vain yksi seuraavista ehdoista on voimassa:

$$A * B * C, \ A * C * B \text{ tai } B * A * C.$$

(H7) Olkoot ℓ suora sekä A, B ja C pisteitä, joiden kautta suora ℓ ei kulje. Tällöin on voimassa:

(i) jos $AB\ell$ ja $BC\ell$, niin $AC\ell$:
(ii) jos $A\ell B$ ja $B\ell C$, niin $AC\ell$.

(H8) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on mielivaltainen puolisuora, niin on olemassa yksi ja vain yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.

(H9) Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio eli:

(i) $AB \cong AB$ (relaatio $\cong$ on refleksiivinen).
(ii) Jos $AB \cong CD$, niin $CD \cong AB$ (relaatio $\cong$ on symmetrinen).
(iii) Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB \cong EF$ (relaatio $\cong$ on transitiivinen).

(H10) Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.

(H11) Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma, $\overrightarrow{DE}$ puolisuora ja P piste, joka ei sisälly suoraan $\overleftrightarrow{DE}$. Silloin on olemassa yksi ja vain yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$.

(H12) Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

(H13) (SKS) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(AA) (Arkhimedeen aksiooma.) Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * D * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$.

(DA) (Dedekindin aksiooma.) Olkoon ℓ suora, $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } \ell\}$ sen kaikkien pisteiden joukko ja D_1 ja $D_2 \subset L$ siten, että D_1 ja D_2 toteuttavat Dedekindin ehdot. Tällöin on olemassa tasan yksi piste $P \in L$ siten, että kaikille $Q, R \in L$ pätee $Q * P * R$, jos ja vain jos $Q \in D_1$ ja $R \in D_2$ tai $Q \in D_2$ ja $R \in D_1$.

Toinen seuraavista.

(PAR) (Euklidinen aksiooma) Jos ℓ on suora ja P piste, joka ei sisälly suoraan A, niin P:n kautta kulkee korkeintaan yksi ℓ:n kanssa yhdensuuntainen suora.

(HYP) (Hyperbolinen aksiooma) On olemassa suora ℓ ja piste P suoran ℓ ulkopuolella siten, että P:n kautta kulkee ainakin kaksi eri ℓ:n suuntaista suoraa.

HAKEMISTO