JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 9 / 2009**
D380 keskiviikkoisin 12-14 ja 16-18.

1. Euklidista "koulu"-geometriaa:

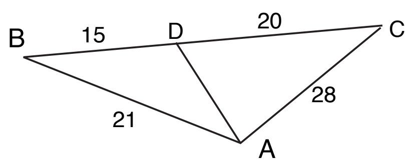
1. Miten konstruoidaan harpilla ja viivoittimella kahdelle erikokoiselle ympyrälle yhteinen tangentti. On eri tapauksia. Tutkitaan tarkasti vain tilanne, jossa ympyrät ovat toistensa ulkopuolella. (Muista kierroksen 8 tehtävä 7, jossa hahmoteltiin "koulugeometrian" tarkkuudella konstruktio ympyrän α tangentille, joka kulki α:n ulkopuolella olevan pisteen P kautta. ja kahdelle samankokoiselle ympyrälle yhteinen tangentti.)

2. Miten konstruoidaan ympyrä, joka kulkee annetun pisteen Q kautta ja sivuaa kahta toisensa pisteessä P leikkaavaa suoraa l ja m. Oletetaan, että Q ei ole kummallakaan suoralla. Vihje: Yhdenmuotoisuudesta on apua.

3. Miten konstruoit ympyrän, joka sivuaa kahta suoraa ja annettua ympyrää? On eri tapauksia. Tutkitaan tilanne, jossa ympyrä ei leikkaa suoria.

2. Trigonometriaa

4. Kuinka pitkä on seuraavassa kuvassa jana AD? (Vihje : sini- tai kosinilause)



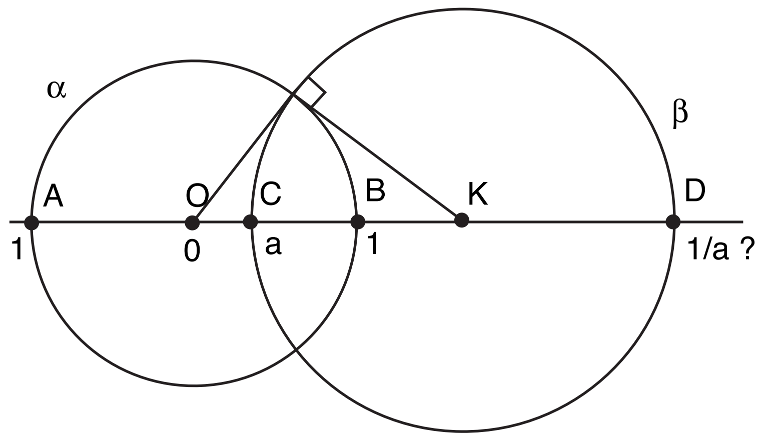
3. Poincaré

5. Piirrä vapaalla kädellä Poincarén malliin kolmio, jonka kulmasumma on
a) likimain 30.
b) likimain 150
c) lähes 180.
d) likimain 0
e) likimain 181

KÄÄNNÄ

4. Lisää inversiosta

6. (jatkoa kierroksen 8 tehtävälle 8.) Osoita, että $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ eli pisteet C ja D jakavat

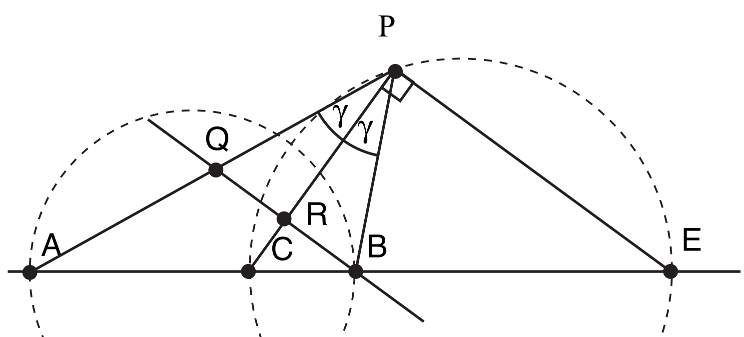


Yläpuolella pisteen nimi, alapuolella pisteen etäisyys pisteestä O

janan AB samassa suhteessa — toinen *sisäpuolitse* ja toinen *ulkopuolitse*. Huomaa, että samalla A ja B jakavat janan CD keskenään samassa suhteessa — toinen sisäpuolitse ja toinen ulkopuolitse. Tässä tilanteessa sanotaan, että pisteet A, B, C ja D muodostavat *harmonisen nelikön.*

Lukua $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (tässä $= 1$) sanotaan janojen CA, CB, DA ja DB (pituuksien) *kaksoissuhteeksi.*

7. (jatkoa) Edellinen tehtävä antaa aiheen kysyä, onko D:n lisäksi olemassa muitakin pisteitä P, joille $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ – ei tietenkään suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, mutta muualla tasossa! Todista *Apollonioksen lause*, jonka mukaan niiden pisteiden P joukko, joille ehto toteutuu, sisältyy ympyrään (on ympyrä), jonka halkaisija on CD. Voit laskea koordinaatein tai, mikä on nopeampaa, käyttää allaolevaa vihjettä:



Tarkastele pistettä P, jolla on ominaisuus $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$. Huomaa, että silloin γ:lla merkityt kulmat ovat todella samat (HT $3 \in 8$). Valitse E siten, että **kulma $\measuredangle CPE$ on suora.** Nyt P on käänteisen kehäkulmalauseen mukaan ympyrällä, jonka halkaisija on CE. Piirrä B:n kautta EP:n suuntainen suora ja todista, että silloin $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} (= \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}})$ ja siis $E = D$.