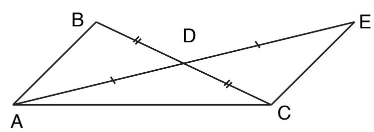
JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 7 / 2009**
D380 keskiviikkoisin 12-14 ja 16-18.

1. Saccherin ja Legendren lauseen 2.5.22 todistuksessa kolmiota $\triangle ABC$ muunnetaan kulmaa terävöittäen ja kulmien summan säilyttäen. Osoita, että se onnistuu seuraavalla tavalla (kuva alla): Olkoon D sivun BC keskipiste ja E puolisuoralla $\overrightarrow{AD}$ niin, että $AD \cong DE$. Näytä, että kolmiolla $\triangle AEC$ on sama kulmien mittalukujen summa kuin alkuperäisellä kolmiolla $\triangle ABC$ ja että joko $(\measuredangle EAC)^\circ$ tai $(\measuredangle AEC)^\circ$ on alle puolet luvusta $(\measuredangle BAC)^\circ$. Vihje: Osoita aluksi, että $\triangle BDA \cong \triangle CDE$ ja sitten, että $(\measuredangle EAC)^\circ + (\measuredangle AEC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ$).



2. Todista, että joukot D_1 ja $D_2 \subset \mathbf{R}$ toteuttavat Dedekindin ehdot, jos ja vain jos jollekin $a \in \mathbf{R}$ pätee jokin seuraavista neljästä vaihtoehdosta:
(1) $D_1 =]-\infty, a]$ ja $D_2 =]a, \infty[$
(2) $D_1 =]-\infty, a[$ ja $D_2 = [a, \infty[$
(3) $D_1 = [a, \infty[$ ja $D_2 =]-\infty, a[$
(4) $D_1 =]a, \infty[$ ja $D_2 =]-\infty, a]$.

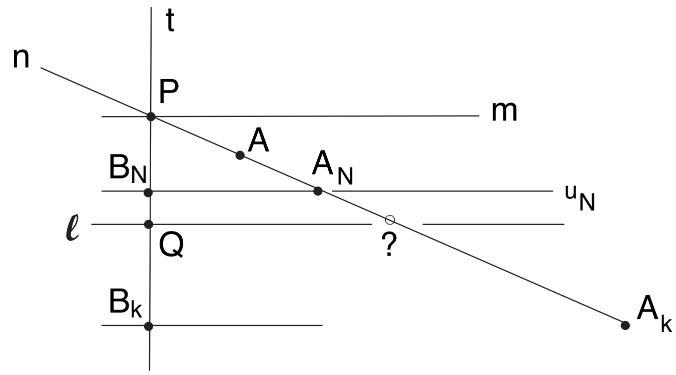
3. Todista lause 2.6.5: Olkoon α ympyrä ja $A, B \in \alpha \cup \{P \mid P \text{ on } \alpha\text{:n sisäpuolella}\}$ s.e. $A * C * B$. Tällöin C on α:n sisäpuolella.

4. Todista lause 2.6.8: Olkoon α O-keskinen r-säteinen ympyrä ja ℓ suora, joka kulkee pisteen $P \in \alpha$ kautta. Tällöin ℓ on α:n tangentti, jos ja vain jos ℓ on suoran $\overleftrightarrow{OP}$ normaali.

5. Todista lause 2.6.9: Olkoon AB jana ja ℓ sen keskinormaali ja $P \neq A, B$ mielivaltainen piste. Tällöin $\overline{AP} = \overline{BP}$, jos ja vain jos ℓ kulkee pisteen P kautta.

KÄÄNNÄ

6. Etsi virhe seuraavasta paralleeliaksiooman todistusyrityksestä:

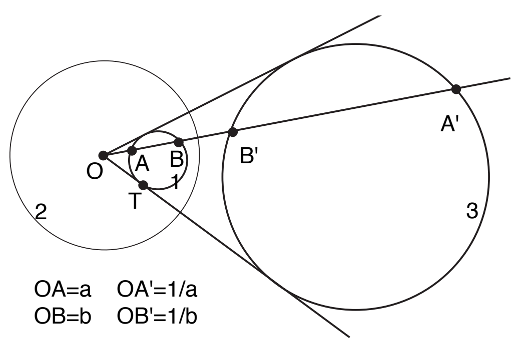


Olkoot ℓ, P, t, Q, m ja n kuten kierroksen 6 tehtävässä 6. Valitaan suoralta n piste A siten, että AQm. Valitaan sitten kaikilla $N \in \mathbf{N}$ piste $A_N \in \overrightarrow{PA}$ siten, että $\overline{PA_N} = N$. Olkoon u_N pisteen A_N kautta kulkeva $\overleftrightarrow{PQ}$:n normaali, joka leikatkoon $\overleftrightarrow{PQ}$:ta pisteessä B_N. Kun $N \to \infty$, niin $\overline{PA_N} \to \infty$, joten myös $\overline{PB_N} \to \infty$. Tällöin riittävän suurella k on voimassa $\overline{PB_k} > \overline{PQ}$, jolloin $B_k \ell P$. Koska $u_k \parallel \ell$, niin $A_k B_k \ell$. Siten $P \ell A_k$, joten PA_k leikkaa ℓ:ää. Koska $PA_k \subset n$, niin siis n leikkaa ℓ:ää. $\square$.

7. Olkoon ℓ suora ja H_1 ja H_2 sen määräämät puolitasot. Leikatkoon suora $s \neq \ell$ suoran ℓ pisteessä A. Osoita, että joukot $D_1 = \{P \mid P \text{ on suoralla } s \text{ ja puolitasossa } H_1\}$ ja $D_2 = \{P \mid P \text{ on suoralla } s \text{ ja puolitasossa } H_2\} \cup \{A\}$ toteuttavat Dedekindin ehdot. Mitä sanoo Dedekindin aksiooman väite tässä tilanteessa? (Miksi se on tylsää?)

Eukleideen (ja Steinerin) geometriaa

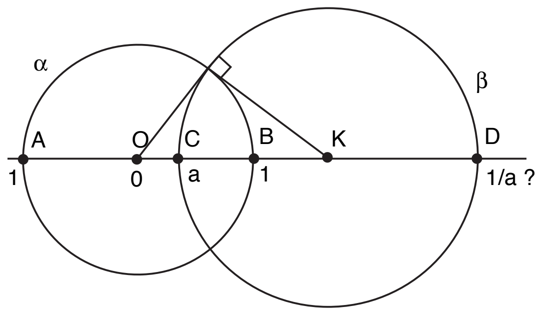
8. Perustele, miksi kuvan tilanteessa ympyrän 1 kuva inversiossa 1-säteisen ympyrän 2 suhteen eli joukko 3 on ympyrä. Vihje: $a : \frac{1}{b} = b : \frac{1}{a}$ ja koulutiedot homotetiasta. Vastaavalla tavalla voi todistaa, että yleensäkin ympyrän kuva inversiossa on ympyrä



(tai suora) – siis myös silloin, kun se leikkaa inversioympyrää 2.

ENSI KERTAAN

9. Tarkastellaan kuvan tilannetta, jossa ympyrät α ja β leikkaavat toisiaan suorakulmaisesti. Miksi C ja D ovat toistensa inversssit α:n suhteen? (Vastaavasti A ja B ovat sitten tietenkin toistensa inverssit β:n suhteen.)



Yläpuolella pisteen nimi, alapuolella pisteen etäisyys pisteestä O

****** LIIAN MUTKIKAS??? ENSI KERTAANTodista lause 2.6.4: Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $B * D * C$. Tällöin $\overline{AD} < \max\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.

*******LIIAN MUTKIKAS??? ENSI KERTAAN Todista, että Dedekindin aksiooma on riippumaton muista esittämistämme aksioomista, sillä on olemassa malli, jossa aksioomat (H1)–(H13) ja Arkhimedeen aksiooma pätevät, mutta Dedekindin aksiooma ei päde.

ENSI KERTAAN

10. Tarkastellaan kuvan tilannetta, jossa ympyrät α ja β leikkaavat toisiaan suorakulmaisesti. Miksi C ja D ovat toistensa inversssit α:n suhteen? (Vastaavasti A ja B ovat sitten tietenkin toistensa inverssit β:n suhteen.)

11. (jatkoa) Osoita, että $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ eli pisteet C ja D jakavat janan AB samassa suhteessa — toinen *sisäpuolitse* ja toinen *ulkopuolitse*. Huomaa, että samalla A ja B jakavat janan CD keskenään samassa suhteessa — toinen sisäpuolitse ja toinen ulkopuolitse. Tässä tilanteessa sanotaan, että pisteet A, B, C ja D muodostavat *harmonisen nelikön*.

Lukua $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (tässä $= 1$) sanotaan janojen CA, CB, DA ja DB (pituuksien) *kaksoissuhteeksi* .

Olkoon OI annettu jana. Tällöin on tasan 1 tapa liittää jokaiseen janaan $AB, \ldots$ reaaliluku $\overline{AB}$ siten, että

(1) $\overline{AB} > 0$.
(2) $\overline{OI} = 1$.
(3) $\overline{AB} = \overline{CD}$, joss $AB \cong CD$.
(4) $\overline{AB} < \overline{CD}$, joss $AB < CD$.
(5) $A * B * C$, joss $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
(6) Jokaista lukua $0 < x$ kohti on olemassa jana AB, jolla $\overline{AB} = x$.

On tasan 1 tapa liittää jokaiseen kulmaan $\measuredangle A, \measuredangle B, \ldots$ reaaliluku $(\measuredangle A)\circ$ siten, että

(1) $0 < (\measuredangle A)\circ < 180$
(2) $(\measuredangle A)\circ = 90$, joss $\measuredangle A$ on suora kulma.
(3) $(\measuredangle A)\circ = (\measuredangle B)\circ$, joss $\measuredangle A \cong \measuredangle B$.
(4) $(\measuredangle A)\circ < (\measuredangle B)\circ$, joss $\measuredangle A < \measuredangle B$.
(5) Jos $\overrightarrow{AC}$ on kulman $\measuredangle DAB$ sisällä, niin $(\measuredangle DAB)\circ = (\measuredangle DAC) \circ +(\measuredangle CAB)\circ$
(6) Jokaista lukua $0 < x < 180$ kohti on olemassa kulma $\measuredangle A$, jolla $(\measuredangle A)\circ = x$.
(7) Jos $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ ovat täydennyskulmat, niin $(\measuredangle A) \circ +(\measuredangle B)\circ = 180$.