JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

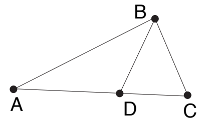
MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 6 / 2009**
D380 keskiviikkoisin 12-14 ja 16-18.

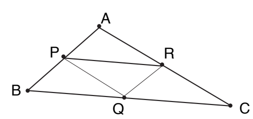
NEUTRAALIA JA HYPERBOLISTA GEOMETRIAA

Oletamme seuraavissa tehtävissä Hilbertin aksioomat (H1)-(H13) ja (AA).

1. Kolmion *defekti* Def($\triangle ABC$) on määritelmän 2.20 mukaan 180−(kulmien astelukujen summa). Defektin additiivisuuslauseen 3.5.24 mukaan kuvan tilanteessa Def($\triangle ABC$)=Def($\triangle ABD$)+Def($\triangle DBC$).



Osoita defektin avulla, että **hyperbolisessa** geometriassa, jossa **jokaisen kolmion defekti on aidosti positiivinen,** tapahtuu seuraavaa: Jos $\triangle ABC$ on kolmio ja



P, Q, R sivujen AB, BC ja CA keskipisteet, niin tällöin jokin yhtälöistä $\overline{PR} = \overline{BQ}$, $\overline{PQ} = \overline{AR}$, $\overline{QR} = \overline{BP}$ on VÄÄRIN.

2. Seuraako aksioomista (H1)-(H13) ja (AA), että on olemassa suunnikas? (Suunnikkaan määritelmä 3.1. on hyvä katsoa!)

3. Seuraako yhden suunnikkaan olemassaolosta, että paralleeliaksiooma on voimassa?

4. Todista lause 2.5.23 eli parannettu ulkokulmaepäyhtälö.

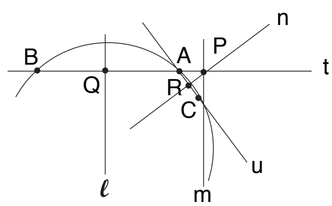
5. Todista lauseen 2.5.26 todistuksessa tarvittu lemma, jonka mukaan suorakulmiossa vastakkaiset sivut ovat yhtenevät.

6. Tarkastele monisteen luvussa I esitettyä Legendren (1700-luku) todistusyritystä paralleeliaksioomalle. Siinä on kymmenen perustelematonta kohtaa. Perustele niistä muutama kohta.

7. Etsi virhe seuraavasta paralleeliaksiooman todistusyrityksestä:

Olkoon ℓ suora ja P piste sen ulkopuolella. Olkoon t pisteen P kautta kulkeva ℓ:n normaali. Leikatkoon se ℓ:ää pisteessä Q. Olkoon m pisteen P kautta kulkeva t:n normaali. Tällöin $\ell \parallel m$. Olkoon $n \neq m$ jokin toinen P:n kautta kulkeva suora. Pitää osoittaa, että n ei ole ℓ:n suuntainen, vaan ne leikkaavat. Asia on selvä, jos $n = t$. Olkoon siis $n \neq t$. Valitaan A siten, että $P * A * Q$ ja valitaan B siten, että $A * Q * B$ ja $AQ \cong QB$. Olkoon u pisteen A kautta kulkeva n:n normaali. Leikatkoon u suoraa n

pisteessä R. Valitaan C siten, että $A*R*C$ ja $AR \cong RC$. Tällöin B, A ja C eivät ole samalla suoralla, joten niiden kautta kulkee yksikäsitteisesti määrätty ympyrä, jonka keskipiste on AB:n ja AC:n keskinormaalien leikkauspiste D. Mutta nytpä ℓ on AB:n ja n on AC:n keskinormaali, joten ℓ ja n leikkaavat pisteessä D. $\square$.



Eukleideen geomeriaa

8. a) Annettuna O-keskinen ympyrä α ja sitä pisteessä Q sivuava tangentti t . Hahmottele todistus sille, että t:n kuva inversiossa on ympyrä, jonka halkaisija on jana OQ. (Väitteessä on pieni virhe. Mikä?)

b) a) Annettuna O-keskinen ympyrä α ja sitä pisteissä Q ja R leikkaava suora s. Mikä on t:n kuva inversiossa? Pelkkä vastaus. Saa perustellakin.

c) Annettuna O-keskinen ympyrä α ja suora s, joka ei kulje keskipisteen kautta. Konstruoi harpilla ja viivoittimella suoran kuva inversiossa. (Miten kävisi, jos suora s kuitenkin kulkisi keskipiseen kautta?)

Tiedoksi

Janamitan perusominaisuudet Olkoon OI annettu jana. Tällöin on tasan 1 tapa liittää jokaiseen janaan $AB, \ldots$ reaaliluku $\overline{AB}$ siten, että

(1) $\overline{AB} > 0$.
(2) $\overline{OI} = 1$.
(3) $\overline{AB} = \overline{CD}$, joss $AB \cong CD$.
(4) $\overline{AB} < \overline{CD}$, joss $AB < CD$.
(5) $A * B * C$, joss $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
(6) Jokaista lukua $0 < x$ kohti on olemassa jana AB, jolla $\overline{AB} = x$.

Kulmamitan perusominaisuudet On tasan 1 tapa liittää jokaiseen kulmaan $\measuredangle A, \measuredangle B, \ldots$ reaaliluku $(\measuredangle A)^\circ$ siten, että

(1) $0 < (\measuredangle A)^\circ < 180$
(2) $(\measuredangle A)^\circ = 90$, joss $\measuredangle A$ on suora kulma.
(3) $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle B)^\circ$, joss $\measuredangle A \cong \measuredangle B$.
(4) $(\measuredangle A)^\circ < (\measuredangle B)^\circ$, joss $\measuredangle A < \measuredangle B$.
(5) Jos $\overrightarrow{AC}$ on kulman $\measuredangle DAB$ sisällä, niin $(\measuredangle DAB)^\circ = (\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle CAB)^\circ$
(6) Jokaista lukua $0 < x < 180$ kohti on olemassa kulma $\measuredangle A$, jolla $(\measuredangle A)^\circ = x$.
(7) Jos $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ ovat toistensa täydennyskulmat, niin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = 180$.