JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 5 / 2009**
D380 keskiviikkoisin 12-14 ja 16-18.

1. Hilbertin geometriaa

Oletamme seuraavissa tehtävissä Hilbertin aksioomat (H1)-(H14).

1. Todista ainakin yksi kohta lauseesta 2.3.10: Olkoon $\measuredangle BAC$ kulma ja D piste sen sisäpuolella. Tällöin:

(i) jos $P \in \overrightarrow{AD}$ ja $P \neq A$, niin P on kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella;
(ii) jos $P * A * D$, niin P ei ole kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella;
(iii) jos $B * A * E$, niin C on kulman $\measuredangle DAE$ sisäpuolella.

2. Olkoot AB ja CD janoja. Muista tai katso monisteesta (määr 2.11. sivulla 27) miten määritellään janan monikerta. Todista, että jos $AB \cong CD$, niin $n \cdot AB \cong n \cdot CD$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

(Entäpä kääntäen: miksi yhtenevien janojen n:nnet osat (määrittele!) ovat yhtenevät? Tätä et varmaan (vielä) osaa selittää, mutta yritä, niin huomaat ongelman.)

3. Muista määritelmä 2.13, jonka mukaan $AB < CD$, jos on olemassa piste E siten, että $C * E * D$ ja $AB \cong CE$. Todista sitten ainakin yksi kohta lauseesta 2.4.4:

Olkoot AB, CD ja EF janoja.

(i) Jos $AB < CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB < EF$.
(ii) Jos $AB < CD$ ja $CD < EF$, niin $AB < EF$.
(iii) Tasan yksi seuraavista on voimassa:

$$AB < CD,\ AB \cong CD \text{ tai } CD < AB.$$

2. Koordinaattigeometriaa

Kierroksen 4 harjoitustehtävissä määriteltiin kaksi bijektiota T ja $R : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ siten, että $Tx = x + b$ ja $\text{Mat}\,(R) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$. Tässä $b \in \mathbf{R}^2$ ja $\phi \in [0, 2\pi[$.

4. Todista, että T ja R ”säilyttävät janojen yhtenevyyden ja kulmien yhtenevyyden”, mikä tarkoittaa sitä, että kaikilla janoilla ja kulmilla pätee

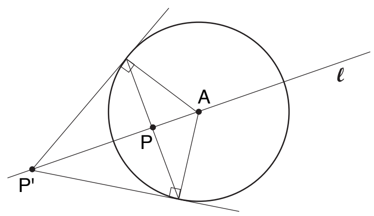
$$\begin{aligned}
AB \cong CD &\iff T(A)T(B) \cong T(C)T(D),\\
AB \cong CD &\iff R(A)R(B) \cong R(C)R(D),\\
\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF &\iff \measuredangle T(A)T(B)T(C) \cong \measuredangle T(D)T(E)T(F) \text{ ja}\\
\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF &\iff \measuredangle R(A)R(B)R(C) \cong \measuredangle R(D)R(E)R(F).
\end{aligned}$$

5. Todista jonkin aksiooman (H8) – (H13) voimassaolo koordinaattigeometriassa.

3. Eukleideen geometriaa

Jakob Steinerin[1] oivalluksiin kuuluu, että euklidisessa geometriassa on paljon hyötyä inversiosta eli "peilauksesta ympyrän suhteen", jota esitellään seuraavissa tehtävissä. Ratkaisuissa riittää esittää perusideat hieman Eukleideen malliin - Steinerhan eli ennen Hilbertiä. Inversioaiheeseen palaamme vielä eri yhteyksissä.

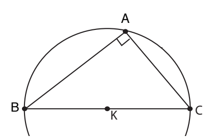
6. Todista Pythagoraan lauseen avulla, että allaolevan kuvan tilanteessa pisteet P ja P' ovat toistensa kuvat *inversiossa* eli *peilauksessa 1-säteisen (!) ympyrän suhteen*, eli että $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = 1$ (ja tietenkin $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP'}$).



7. (jatkoa) a) Annettuna ympyrä ja sen sisäpuolinen piste P (ei keskipiste). Konstruoi harpilla ja viivoittimella piste $P' = i(P)$ eli pisteen P kuva inversiossa.

b) Annettuna ympyrä ja sen ulkopuolinen piste P'. Konstruoi harpilla ja viivoittimella $P = i(P')$ eli pisteen P' kuva inversiossa.

Ohje: Tangenttien konstruoimiseksi voit esimerkiksi käyttää apuna tunnettua *kehäkulmalauseen* erikoistapausta, jonka mukaan kehäkulma puoliympyrässä on suora kulma.



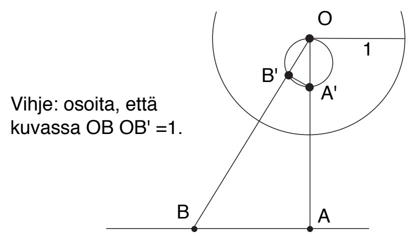
[1] Jakob Steiner (1796 – 1863) was a Swiss mathematician. He did not learn to read and write until he was 14 and only went to school at the age of 18, against the wishes of his parents. He then studied at the Universities of Heidelberg and Berlin, supporting himself with a very modest income from tutoring.

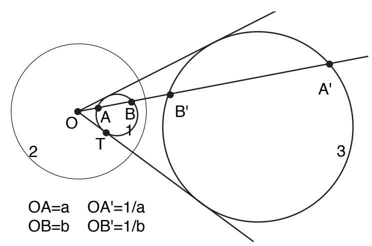
He was an early contributor to Crelle's Journal, the first journal devoted entirely to mathematics founded in 1826. He was appointed to a chair at the University of Berlin in 1834, a post he held until his death.

He was one of the greatest contributors to projective geometry. He discovered the Steiner surface which has a double infinity of conic sections on it. Another famous result is the Poncelet-Steiner theorem which shows that *only one given circle and a straight edge are required for Euclidean constructions.*

He disliked algebra and analysis and believed that calculation replaces thinking while geometry stimulates thinking. He was described by Thomas Hirst as follows:- *He is a middle-aged man, of pretty stout proportions, has a long intellectual face, with beard and moustache and a fine prominant forehead, hair dark rather inclining to turn grey. The first thing that strikes you on his face is a dash of care and anxiety, almost pain, as if arising from physical suffering - he has rheumatism. He never prepares his lectures beforehand. He thus often stumbles or fails to prove what he wishes at the moment, and at every such failure he is sure to make some characteristic remark.* Article by J J O'Connor and E F Robertson.

8. Todista, että 1-säteisen ympyrän keskipisteestä etäisyydellä 2 oleva suora ja kuvan mukainen 1/4 - säteinen ympyrä ovat toistensa kuvat inversiossa kuvion 1-säteisen ympyrän suhteen - yhtä pistettä vaille, tosin. (Vihje: yhdenmuotoiset kolmiot.)





Lisätehtävä kiinnostuneille: Annettuna O-keskinen ympyrä α ja sitä pisteessä P sivuava tangentti t . Osoita, että t:n kuva inversiossa on ympyrä, jonka halkaisija on jana OP. (Väitteessä on pieni virhe. Mikä?)