JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 4 / 2009**
D380 keskiviikkoisin 12-14 ja 16-18.

1. Hilbertin geometriaa

1. Osoita, että suoria on äärettömän paljon.

2. Merkintä $\ell \parallel m$ tarkoittaa, että suorilla ℓ ja m ei ole yhtään yhteistä pistettä. Olkoot ℓ, m ja n eri suoria siten, että $\ell \parallel m$ ja $m \parallel n$. Olkoon lisäksi A l:n piste, B m:n piste ja C n:n piste siten, että $A * B * C$. Osoita, että $\ell \parallel n$.

3. Olkoon $C \in \overrightarrow{AB}$ ja $AB \cong AC$. Onko välttämättä $B = C$?

4. Todista lause 2.4.2: "Olkoot $A*B*C$, $D*E*F$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $BC \cong EF$." (Ideaehdotus: Kopioi jana BC janan DE jatkoksi ja näytä, että päädyt pisteeseen F. Olisiko edellisestä tehtävästäkin hyötyä?)

2. Koordinaattigeometriasta

Descartesin koordinaattigeometria eli tavallinen koordinaattigeometria on malli tähänastisille aksioomille. On aika iso työ todeta, että näin on. Seuraavat tehtävät sisältävät tämän työn oleellisia kohtia.

Koordinaattigeometriassa eli luvun 2.2 mallissa 5 täydennettynä luvun 2.3 esimerkillä 1 määriteltiin

(1) *Pisteet* $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,
(2) *suorat* $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \lambda \in \mathbf{R}\}$, missä $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ ja $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ kiinteitä.
(3) Piste P *kulkee suoran l kautta*, jos $P \in l$.
(4) *(Tavallinen) välissäolo*: Pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2) \in \mathbf{R}^2$ asetetaan $A*B*C$, mikäli on olemassa $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ja $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ siten, että $\lambda < \mu < \nu$ tai $\lambda > \mu > \nu$ ja $\begin{cases} (a_1, a_2) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \\ (b_1, b_2) = (x_0, y_0) + \mu(\alpha, \beta), \\ (c_1, c_2) = (x_0, y_0) + \nu(\alpha, \beta). \end{cases}$
(5) *Janojen yhtenevyys* määritellään esimerkissä 4 s. 26.
(6) *Kulmien yhtenevyys* määritellään esimerkissä 7 s. 27.

KÄÄNNÄ

Seuraavia tehtäviä varten määritellään kaksi apukuvausta: Olkoot $b \in \mathbf{R}^2$ ja $\phi \in [0, 2\pi[$. Määritellään bijektiot T_b ja $R_\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ siten, että

$T_b x = x + b$ ja

R_ϕ on lineaarikuvaus, jonka matriisi on $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$,

toisin sanoen T_b on siirto vektorin b verran ja R_ϕ on kierto origon ympäri kulman ϕ verran.

5. Todista, että T_b ja R_ϕ ”säilyttävät välissäolon”, mikä tarkoittaa sitä, että

$A * B * C \iff T_b(A) * T_b(B) * T_b(C)$ ja

$A * B * C \iff R_\phi(A) * R_\phi(B) * R_\phi(C)$.

6. (jatkoa) Olkoon $\ell((x_0, y_0), (\alpha, \beta)) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \lambda \in \mathbf{R}\}$, tason $\mathbf{R}^2$ mielivaltainen suora. Miten se voidaan kuvata x-akselille käyttäen edellisen tehtävän kuvauksia T_b ja R_ϕ.

7. (jatkoa) Todista jonkin aksiooman (H4) – (H13) voimassaolo koordinaattigeometriassa.

Geometrian monisteessa harjoitustehtäviksi jätettyjä kohtia

8. Todista lause 2.3.4 kohta (ii): Jos $D*A*B$ ja $A*B*C$, niin $D*A*C$ ja $D*B*C$.

9. Todista Pappuksen käänteinen tulos, jonka mukaan kolmion kantakulmien yhtenevyys takaa tasakylkisyyden. Vihje: saat käyttää lausetta 2.4.9 eli KSK -sääntöä.