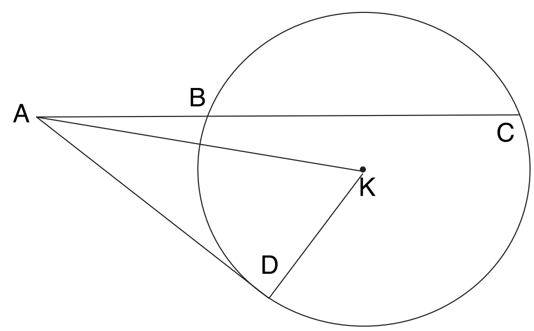
JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 3 / 2009**
D380 keskiviikkoisin 12-14 ja 16-18.

Vieläkin Eukleideen geometrian harjoittelua

1. Osoita Pythagoraan lausetta käyttäen, että kuvan tilanteessa $\overline{AD}^2 = \overline{AB}\,\overline{AC}$. Huomaa, että tangentin ja säteen välinen kulma $\measuredangle ADK$ on suora kulma.



Ristiriidattomuus ja todistaminen

Tarkastellaan edellisessä harjoituksessa esitettyjä ”uusgeometrisia” insidenssiaksioomia, joissa peruskäsitteitä ovat *piste*, *suora* ja *suora kulkee pisteen kautta*.

(1) (A1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa ainakin yksi suora, joka kulkee niiden kautta.
(2) (A2) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa korkeintaan yksi suora, joka kulkee niiden kautta.
(3) (A3) Jos l ja m ovat eri suoria, niin on olemassa ainakin yksi piste P, jonka kautta sekä l että m kulkevat.
(4) (A4) On olemassa ainakin yksi suora.
(5) (A5) Jokainen suora kulkee ainakin kolmen eri pisteen kautta.
(6) (A6) Jos l on suora, niin on olemassa ainakin yksi piste, jonka kautta l ei kulje.
(7) (A7) Jokainen suora kulkee korkeintaan kolmen eri pisteen kautta.

2. Osoita, että ylläoleva aksioomajärjestelmä on ristiriidaton konstruoimalla malli, joka toteuttaa kaikki aksioomat (A1)-(A7).

3. Aksiooma (A3) sanoo, että jos l ja m ovat eri suoria, niin on olemassa ainakin yksi piste P, jonka kautta sekä l että m kulkevat. Itse asiassa on olemassa tasan yksi tällainen piste. Todista tämä lause lähtien aksioomista (A1)…(A7).

4. Todista että ”geometriassa”, joka toteuttaa aksioomat (A1)–(A7), on olemassa ainakin seitsemän pistettä. (Bonuskysymys, jota tuskin ehditään: Voiko niitä olla enemmänkin? Kuinka monta suoraa on?)

KÄÄNNÄ

Välissäolo

5. Osoita, että Hilbertin aksioomista (H1)–(H7) seuraa, että pisteitä on ääretön määrä. (Vihje: induktio, lause 2.3.4 tai 2.3.7.) (Lisätieto: Aksioomille (H1)-(H6) on itse asiassa olemassa äärellinen malli, jossa on 21 pistettä ja 21 suoraa.)

6. Todista lause 2.3.2: Olkoon ℓ suora sekä A, B ja C eri pisteitä, jotka eivät sisälly suoraan ℓ. Jos $AB\ell$ ja $B\ell C$, niin $A\ell C$.

7. Todista, että Paschin lause on yhtä vahva kuin Hilbertin aksiooma (H7), toisin sanoen että jos (H1)–(H6) ja Paschin lause pätevät, niin myös (H7) on voimassa. (Pasch itse taisikin esittää asiansa aksioomana. Onko näin? Googleta Pasch axiom!)

8. Osoita, että jokaisen kolmion sisäpuolella on ainakin yksi piste. (Entä useampia? Onko jokainen piste edes jonkin a) kulman b) kolmion sisäpuolella?)

Malli

9. Todista, että monisteen esimerkin 5 malli ((s.10 ja s.13), tavallinen koordinaattigeometria, toteuttaa aksiooman (H4).