JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

**GEOMETRIA** **Harjoitus 11 (viimeiset) / 2009**
**D380 keskiviikkoisin 12-14 ja 16-18.**

## Euklidista geometriaa

**1.** Merkitään kolmiossa $\triangle ABC$ kulmia $\alpha, \beta$ ja $\gamma$ sekä niiden vastaisten sivujen pituuksia $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$. Todista, että
$\overline{a} = \overline{b}\cos\gamma + \overline{c}\cos\beta$ ja

**2.** Jos $\beta + \gamma$ on kulma, jonka astemitta on $(\beta)^\circ + (\gamma)^\circ$, niin $\sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta$. (Tämä on tuttu sinin yhteenlaskukaava. Käytä hyväksesi kohtaa i) ja sinilausetta sekä sinin määritelmää.)

**3.** Olkoon $r$ kolmion $\triangle ABC$ sisälle piirretyn ympyrän säde ja $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}, c = \overline{AB}$. Todista, että jos $P, Q$ ja $R$ ovat pisteet, joissa kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretty ympyrä $\alpha$ sivuaa sivuja $AB, BC$ ja $CA$. Merkjitään vielä $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, joka siis *kolmion piirin puolikas*. Todista, että $\overline{AP} = p - a, \overline{BQ} = p - b$ ja $\overline{CR} = p - c$.

**4.** Monisteessa on *Heronin lauseeksi* nimetty kaava "(ala $ABC = \frac{1}{2}(a+b+c)r$", joka on helppo nähdä todeksi yhdistämällä kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste kulmiin ja laskemalla kolmen osakolmion alat. Tämä ei ole koko totuus. Tosiasiassa *Heron Aleksandrialisen kaavana* tunnetaan lauseke, joka antaa kolmion alan, kun pelkät sivut tunnetaan:

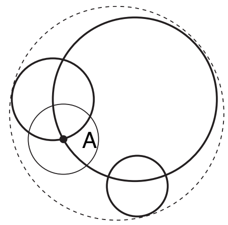
$$\text{ala}(\triangle ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

missä $p$ on piirin puolikas $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Koetapa todistaa tämä. Jos et pian onnistu, käytä apuna tietokonetta etsimällä todistusta Googlen tai Wikipedian avulla.

## Inversio euklidisessa geometriassa ja Poincarén malli

**5.** (Kertaus inversiosta) Olkoon $\alpha$ annettu ympyrä ja $i$ peilaus $\alpha$:n suhteen. Konstruoi, käyttäen harppia ja viivoitinta,
a) annetun pisteen $P$ kuva $i(P)$,
b) annetun suoran $s$ kuva $i(s)$ ,
c) annetun ympyrän $\beta$ kuva $i(\beta)$.
d) annetun ortogonaalisen ympyrän $\gamma$ kuva $i(\gamma)$.
Koeta muistaa, miksi konstruktiot ovat oikein

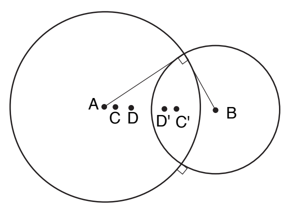
**Käännä**



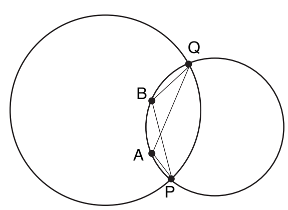

***-tehtävä. Tehdään, jos jää aikaa ja intoa.** (Toinen Apollonioksen ongelma) Miten konstruoit harpilla ja viivoittimella ympyrän, joka sivuaa kolmea annettua ympyrää. Vihje: Tarkastele (ensin) tilannetta, jossa ainakin kaksi annetuista ympyröistä leikkaavat toisiaan jossain pisteessä $A$ ja invertoi jonkin $A$-keskisen ympyrän suhteen.

Muista lause 4.2.1, joka sanoo että heijastus $\mathcal{P}$-suorassa eli inversio mallin reunaa $\alpha$ vasten kohtisuorassa ympyrässä $\beta$ kuvaa mallin itselleen eli Poincaré- pisteet Poincaré-pisteiksi ts. mallia edustavan $A$-keskisen ympyrän $\alpha$ kuva on se itse. Vielä toisin sanoen: Jokainen liike on bijektio $\{P\text{-pisteet }\} \to \{P\text{-pisteet.}\}$.

**6.** Todista suoraan laskemalla, että liike eli heijastus Poincaré-suorassa $\ell = A \cap \beta$ eli inversio ympyrässä $\beta$ säilyttää euklidisella janalla $AB$ (mutta tietenkin $\alpha$:n sisällä) olevien Poincaré-pisteiden etäisyydet: $d(CD) = d(C'D')$.




Muista, että etäisyyden määritelmä Poincarén mallissa on $d(AB) = \left|\log\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}\right)\right|$.




## Hyperbolista geometriaa

**7.** Täydennä lauseen 4.3.9 todistus. Lauseessa oletetaan, että $\ell$ ja $m$ normaalisti yhdensuuntaisia ja $n$ niiden yhteinen normaali, $P$ $m$:n ja $n$:n sekä $Q$ suorien $\ell$ ja $n$ yhteinen piste. Väitetään, että $\overline{PQ} = \min\{d(R,\ell) \bigm| R \in m\}$.

(Suoraan määritelmän mukaan on $\overline{PQ} = d(P,\ell)$, joten riittää osoittaa, että $d(R,\ell) \geq \overline{PQ}$ kaikilla $R \in \ell \setminus \{P\}$. Olkoon $S \in \ell$ siten, että $\overleftrightarrow{RS} \perp \ell$, jolloin $\overline{RS} = d(R,\ell)$. Todista, että $(\measuredangle R)^\circ \leq 90$, ja koska hyperbolisessa geometriassa ei ole suorakulmioita, niin siis $(\measuredangle R)^\circ < 90$. Todista epäsuorasti, että $\overline{PQ} < \overline{RS}$. Muista myös viime kerran tehtävä 1.)