JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 8 / 2008**
D380 keskiviikkoisin 8-10, 12-14 ja 16-18.

1. Dedekindin aksiooma

1. Todista lause 2.6.4: Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $B{*}D{*}C$. Tällöin $\overline{AD} < \max\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.

2. Todista lause 2.6.5: Olkoon α ympyrä ja $A, B \in \alpha \cup \{P \mid P \text{ on } \alpha\text{:n sisäpuolella}\}$ s.e. $A * C * B$. Tällöin C on α:n sisäpuolella.

3. Reaalilukujen aksioomiin kuuluu kunta- ja järjestysaksioomien lisäksi täydellisyysaksiooma, joka usein muotoillaan sillä tavalla, jota tällä kurssillakin käytettiin: "Jokaisella ylöspäin rajoitetulla epätyhjällä joukolla reaalilukuja on supremum." Richard Dedekind (1831 – 1916) muotoili aikoinaan täydellisyyden "Dedekindin leikkausten" avulla eli oleellisesti seuraavasti: (Vrt. Wikipedian teksti tehtävän lopussa .)

Jos $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ja jos A sisältää alkioidensa väliset luvut (Siis jos $a \in A$, $c \in A$ ja $a < b < c$, niin $b \in A$), ja samoin B sisältää alkioidensa väliset luvut, niin silloin on olemassa tasan yksi luku $d \in \mathbb{R}$ siten, että ($A =]-\infty, d[$ ja $B = [d, \infty[$) tai ($A =]-\infty, d]$ ja $B =]d, \infty[$).

Todista toinen tai molemmat seuraavista (olettaen $\mathbb{R}$:n muut ominaisuudet) :

a) Jos $\mathbb{R}$ on täydellinen sup-mielessä, niin $\mathbb{R}$ on täydellinen Dedekindin mielessä.

b) Jos $\mathbb{R}$ on täydellinen Dedekindin mielessä, niin $\mathbb{R}$ on täydellinen sup-mielessä.

From Wikipedia, the free encyclopedia:

In mathematics, a Dedekind cut, named after Richard Dedekind, in a totally ordered set S (Tässä $S = \mathbb{R}$) is a partition of it into two non-empty parts, (A, B), such that A is "closed downwards" (meaning that for all a in A, $x \leq a$ implies that x is in A as well) and B is "closed upwards", and A contains no greatest element. The cut itself is, conceptually, the "gap" defined between A and B.

Dedekind used his cut to construct the irrational, real numbers. The Dedekind cut resolves the contradiction between the continuous nature of the number line continuum and the discrete nature of the numbers themselves. Wherever a cut occurs and it is not on a real rational number, an irrational number (which is also a real number) is created by the mathematician. Through the use of this device, there is considered to be a real number, either rational or irrational, at every point on the number line continuum, with no discontinuity.

---

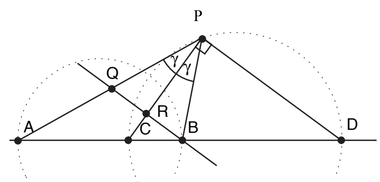
2. Paralleeliaksiooma ja Hilbertin euklidista geometriaa

4. Todista lause 2.6.8: Olkoon $\alpha = \{P \mid \overline{OP} = r\}$ O-keskinen r-säteinen *ympyrä* ja ℓ suora, joka kulkee pisteen $P \in \alpha$ kautta. Tällöin ℓ on α:n *tangentti* — toisin sanoen suoralla ℓ ei ole muita α:n pisteitä kuin P — jos ja vain jos ℓ on suoran $\overleftrightarrow{OP}$ normaali. Koskeeko tämä lause pelkästään euklidista geometriaa?

5. Todista lause 2.6.9: Olkoon AB jana ja ℓ sen keskinormaali ja $P \neq A, B$ mielivaltainen piste. Tällöin $\overline{AB} = \overline{BP}$, jos ja vain jos ℓ kulkee pisteen P kautta.

3. Eukleideen ja Steinerin geometriaaa

6. (jatkoa) Kierroksen 7 tehtävät 6 ja 7 antavat aiheen kysyä, onko D:n lisäksi olemassa muitakin pisteitä P, joille $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ – ei tietenkään suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, mutta muualla tasossa! Todista *Apollonioksen lause*, jonka mukaan niiden pisteiden P joukko, joille ehto toteutuu, on ympyrä, jonka halkaisija on CD. Voit laskea koordinaatein tai- mikä on nopeampaa, käyttää allaolevaa kuvaa ja vihjettä: (Vihje: Tarkastele pistettä P,



jolla on ominaisuus $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$. Huomaa, että silloin γ-kulmat ovat todella yhtäsuuret (Voit käyttää monisteen lausetta 3.1.27, jonka pitäisi olla lukiosta tuttu. Osaatko todistaa sen?) (Miksi?) Valitse D siten, että **kulma $\measuredangle CPD$ on suora.** Piirrä B:n kautta EP:n suuntainen suora ja todista, että silloin $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$.)

7. Olkoot α ja β ortogonaalisia ympyröitä, keskipisteinään A ja B. Todista, että A on on β:n ulkopuolella ja B on on α:n ulkopuolella.