JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 7 / 2008**

D380 keskiviikkoisin 8-10, 12-14 ja 16-18.

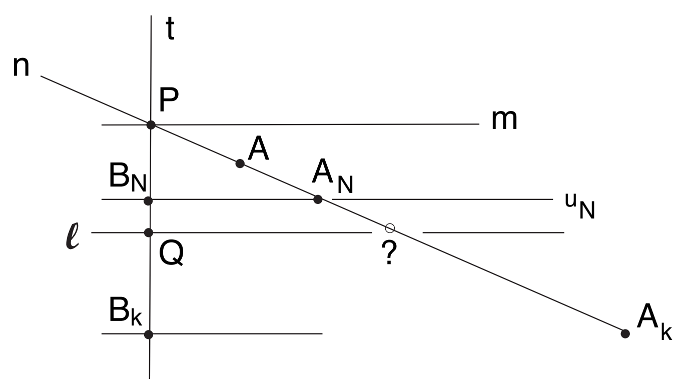
1. Neutraalia ja hyperbolista geometriaa

Oletamme seuraavissa tehtävissä Hilbertin aksioomat (H1)-(H13) ja (AA).

1. Todista lause 2.5.23 eli parannettu ulkokulmaepäyhtälö.

2. Todista lauseen 2.5.26 todistuksessa tarvittu lemma, jonka mukaan suorakulmiossa vastakkaiset sivut ovat yhtenevät. eli parannettu ulkokulmaepäyhtälö.

3. Etsi virhe seuraavasta paralleeliaksiooman todistusyrityksestä:



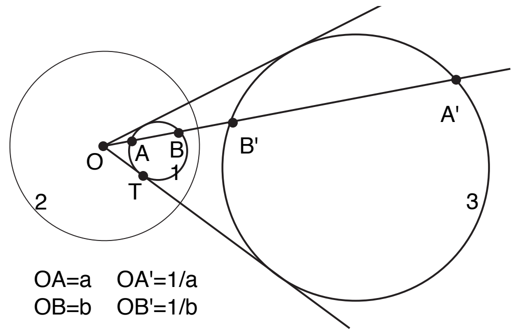
Olkoot ℓ, P, t, Q, m ja n kuten kierroksen 6 tehtävässä 6. Valitaan suoralta n piste A siten, että AQm. Valitaan sitten kaikilla $N \in \mathbb{N}$ piste $A_N \in \overrightarrow{PA}$ siten, että $\overline{PA_N} = N$. Olkoon u_N pisteen A_N kautta kulkeva $\overleftrightarrow{PQ}$:n normaali, joka leikatkoon $\overleftrightarrow{PQ}$:ta pisteessä B_N. Kun $N \to \infty$, niin $\overline{PA_N} \to \infty$, joten myös $\overline{PB_N} \to \infty$. Tällöin riittävän suurella k on voimassa $\overline{PB_k} > \overline{PQ}$, jolloin $B_k \ell P$. Koska $u_k \parallel \ell$, niin $A_k B_k \ell$. Siten $P \ell A_k$, joten PA_k leikkaa ℓ:ää. Koska $PA_k \subset n$, niin siis n leikkaa ℓ:ää. $\square$.

4. Olkoon ℓ suora ja H_1 ja H_2 sen määräämät puolitasot. Leikatkoon suora $s \neq \ell$ suoran ℓ pisteessä A. Osoita, että joukot $D_1 = \{P \mid P \text{ on suoralla } s \text{ ja puolitasossa } H_1\}$ ja $D_2 = \{P \mid P \text{ on suoralla } s \text{ ja puolitasossa } H_2\} \cup \{A\}$ toteuttavat Dedekindin ehdot. Mitä sanoo Dedekindin aksiooman väite tässä tilanteessa? (Miksi se on tylsää?)

KÄÄNNÄ

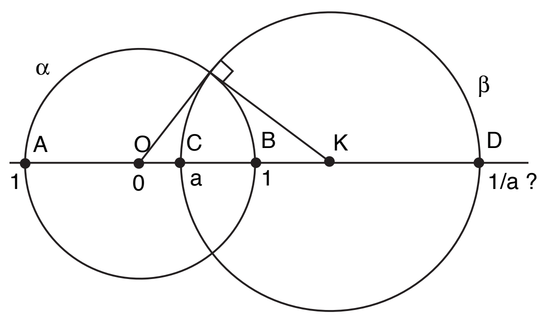
2. Eukleideen (ja Steinerin) geometriaa

5. Perustele, miksi kuvan tilanteessa ympyrän 1 kuva inversiossa 1-säteisen ympyrän 2 suhteen eli joukko 3 on ympyrä. Vihje: $a : \frac{1}{b} = b : \frac{1}{a}$ ja koulutiedot homotetiasta. Vastaavalla tavalla voi todistaa, että yleensäkin ympyrän kuva inversiossa on ympyrä



(tai suora) – siis myös silloin, kun se leikkaa inversioympyrää 2.

6. Tarkastellaan kuvan tilannetta, jossa ympyrät α ja β leikkaavat toisiaan suorakulmaisesti. Miksi C ja D ovat toistensa inversssit α:n suhteen? (Vastaavasti A ja B ovat sitten tietenkin toistensa inverssit β:n suhteen.)



Yläpuolella pisteen nimi, alapuolella pisteen etäisyys pisteestä O

7. (jatkoa) Osoita, että $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ eli pisteet C ja D jakavat janan AB samassa suhteessa — toinen *sisäpuolitse* ja toinen *ulkopuolitse*. Huomaa, että samalla A ja B jakavat janan CD keskenään samassa suhteessa — toinen sisäpuolitse ja toinen ulkopuolitse. Tässä tilanteessa sanotaan, että pisteet A, B, C ja D muodostavat *harmonisen nelikön.*

Lukua $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (tässä $= 1$) sanotaan janojen CA, CB, DA ja DB (pituuksien) *kaksoissuhteeksi* .