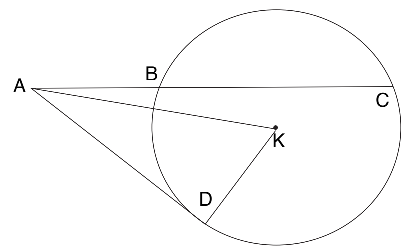
JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 3 / 2008**
D380 keskiviikkoisin 8-10, 12-14 ja 16-18.

1. Vieläkin Eukleideen geometrian harjoittelua

1. Osoita Pythagoraan lausetta käyttäen, että kuvan tilanteessa $\overline{AD}^2 = \overline{AB}\,\overline{AC}$. Huomaa, että kulma ADK on suora kulma.



Aksioomien ristiriidattomuus ja riippumattomuus

Tarkastellaan edellisessä harjoituksessa esitettyjä "uusgeometrisia" insidenssiaksioomia, joissa peruskäsitteitä ovat *piste*, *suora* ja *suora kulkee pisteen kautta*.

(1) (A1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa ainakin yksi suora, joka kulkee niiden kautta.
(2) (A2) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa korkeintaan yksi suora, joka kulkee niiden kautta.
(3) (A3) Jos l ja m ovat eri suoria, niin on olemassa ainakin yksi piste P, jonka kautta sekä l että m kulkevat.
(4) (A4) On olemassa ainakin yksi suora.
(5) (A5) Jokainen suora kulkee ainakin kolmen eri pisteen kautta.
(6) (A6) Jos l on suora, niin on olemassa ainakin yksi piste, jonka kautta l ei kulje.
(7) (A7) Jokainen suora kulkee korkeintaan kolmen eri pisteen kautta.

2. Osoita, että ylläoleva aksioomajärjestelmä on ristiriidaton konstruoimalla malli joka toteuttaa kaikki aksioomat (A1)-(A7).

3. Aksiooma (A3) sanoo, että jos l ja m ovat eri suoria, niin on olemassa ainakin yksi piste P, jonka kautta sekä l että m kulkevat. Itse asiassa on olemassa tasan yksi tällainen piste. Todista tämä lause.

4. Todista että "geometriassa", joka toteuttaa aksioomat (A1)–(A7), on olemassa ainakin seitsemän pistettä. Bonuskysymys, jos ehditään: Voiko niitä olla enemmänkin? Kuinka monta suoraa on?

KÄÄNNÄ

Välissäolo

5. Konstruoi ”viiden pisteen suora” eli viisi pistettä sisältävä malli Hilbertin välissäoloaksioomille (H4)–(H6), ((H7) ei mukana).

6. Osoita, että Hilbertin aksioomista (H1)–(H7) seuraa, että pisteitä on ääretön määrä. (Vihje: induktio, lause 2.3.4 tai 2.3.7.)

(Lisätieto: Aksioomille (H1)-(H6) on olemassa äärellinen malli, jossa on 21 pistettä ja 21 suoraa.).

7. Todista, että Paschin lause on yhtä vahva kuin Hilbertin aksiooma (H7), toisin sanoen että jos (H1)–(H6) ja Paschin lause pätevät, niin myös (H7) on voimassa.

8. Osoita, että jokaisen kolmion sisäpuolella on ainakin yksi piste. (Entä useampia? Onko jokainen tason piste jonkin a) kulman b) kolmion sisäpuolella?)