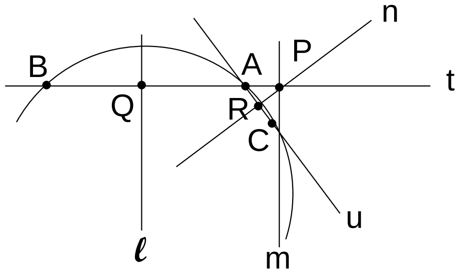
GEOMETRIA 2006 **Harjoitus 7**
D380 keskiviikkona klo 8-10, 12-14 ja 16-18.

1. Olkoon ℓ suora ja H_1 ja H_2 sen määräämät puolitasot. Leikatkoon suora $s \neq \ell$ suoran ℓ pisteessä A. Osoita, että joukot $D_1 = \{P \mid P \text{ on suoralla } s \text{ ja puolitasossa } H_1\}$ ja $D_2 = \{P \mid P \text{ on suoralla } s \text{ ja puolitasossa } H_2\} \cup \{A\}$ toteuttavat Dedekindin ehdot. Mitä sanoo Dedekindin aksiooman väite tässä tilanteessa?. (Miksi se on tylsää?)

2. Todista ainakin pääpiirteittäin, että paralleeliaksiooma seuraa Pythagoraan lauseesta eli että Pythagoraan lause ei päde hyperbolisessa geometriassa.

3. Etsi virhe seuraavasta paralleeliaksiooman todistusyrityksestä:

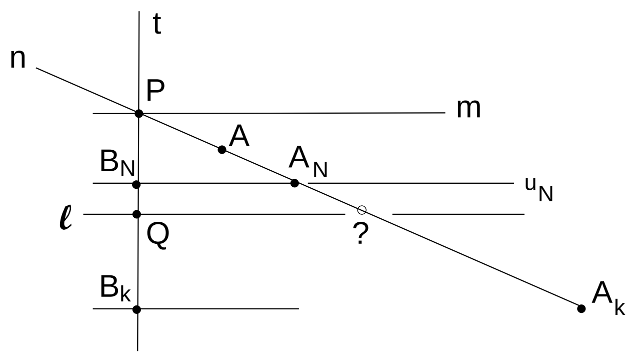
Olkoon ℓ suora ja P piste sen ulkopuolella. Olkoon t pisteen P kautta kulkeva ℓ:n normaali. Leikatkoon se ℓ:ää pisteessä Q. Olkoon m pisteen P kautta kulkeva t:n normaali. Tällöin $\ell \parallel m$. Olkoon $n \neq m$ jokin toinen P:n kautta kulkeva suora. Pitää osoittaa, että n ei ole ℓ:n suuntainen, vaan ne leikkaavat. Asia on selvä, jos $n = t$. Olkoon siis $n \neq t$. Valitaan A siten, että $P * A * Q$ ja valitaan B siten, että $A * Q * B$ ja $AQ \cong QB$.



Olkoon u pisteen A kautta kulkeva n:n normaali. Leikatkoon u suoraa n pisteessä R. Valitaan C siten, että $A * R * C$ ja $AR \cong RC$. Tällöin B, A ja C eivät ole samalla suoralla, joten niiden kautta kulkee yksikäsitteisesti määrätty ympyrä, jonka keskipiste on AB:n ja AC:n keskinormaalien leikkauspiste D. Mutta nytpä ℓ on AB:n ja n on AC:n keskinormaali, joten ℓ ja n leikkaavat pisteessä D. $\square$.

4. Etsi virhe seuraavasta paralleeliaksiooman todistusyrityksestä:

Olkoot ℓ, P, t, Q, m ja n kuten edellisessä tehtävässä. Valitaan suoralta n piste A siten, että AQm. Valitaan sitten kaikilla $N \in \mathbb{N}$ piste $A_N \in \overrightarrow{PA}$ siten, että $\overline{PA_N} = N$. Olkoon u_N pisteen A_N kautta kulkeva $\overleftrightarrow{PQ}$:n normaali, joka leikatkoon $\overleftrightarrow{PQ}$:ta pisteessä B_N. Kun $N \to \infty$, niin $\overline{PA_N} \to \infty$, joten myös $\overline{PB_N} \to \infty$. Tällöin riittävän suurella k on voimassa $\overline{PB_k} > \overline{PQ}$, jolloin $B_k \ell P$.



Koska $u_k \parallel \ell$, niin $A_k B_k \ell$. Siten $P \ell A_k$, joten PA_k leikkaa ℓ:ää. Koska $PA_k \subset n$, niin siis n leikkaa ℓ:ää. $\square$.

5. Lue monisteesta sinin ja kosinin määritelmä **euklidisessa** geometriassa ja hieman eteenpäin. Ratkaise sitten seuraava tehtävä: Merkitään kolmiossa $\triangle ABC$ $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = \beta$ ja $\measuredangle C = \gamma$. Sekä $BC = a$, $AC = b$ ja $AB = c$. Olkoot lisäksi h_a, h_b ja h_c sivujen a, b ja c vastaiset korkeusjanat. Määritellään (!) kolmion $\triangle ABC$ *pinta-ala* asettamalla

$$\mathrm{ala}(ABC) = \tfrac{1}{2}\overline{a}\overline{h_a}.$$

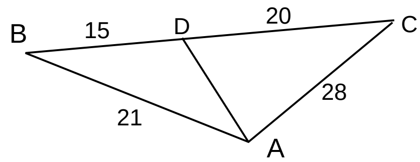
Osoita, että pinta-ala saadaan myös kaavasta

$$\mathrm{ala}(ABC) = \tfrac{1}{2}\overline{a}\overline{b}\sin\gamma.$$

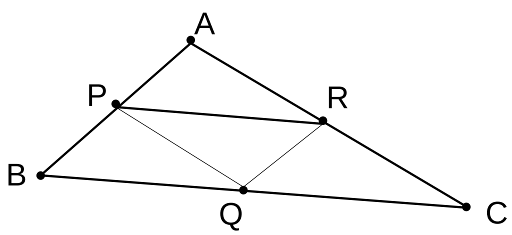
(Lisätehtävä halukkaille: Osoita edelleen, että alan määritelmä on riippumaton valituista sivuista , ts.

$$\tfrac{1}{2}\overline{a}\overline{h_a} = \tfrac{1}{2}\overline{b}\overline{h_b} = \tfrac{1}{2}\overline{c}\overline{h_c}.)$$

6. (tavallaan jatkoa) Kuinka pitkä on seuraavassa kuvassa jana AD?



7. Osoita defektin avulla, että **hyperbolisessa** geometriassa, jossa siis jokaisen komion defekti on positiivinen, tapahtuu seuraavaa:



Jos $\triangle ABC$ on kolmio ja P, Q, R sivujen AB, BC ja CA keskipisteet, niin tällöin jokin yhtälöistä $\overline{PR} = \overline{BQ}$, $\overline{PQ} = \overline{AR}$, $\overline{QR} = \overline{BP}$ on VÄÄRIN.