GEOMETRIA 2006 **Harjoitus 6**

D380 keskiviikko 25.10. 12-14 ja 16-18.

Ensimmäinen välikoe pidetään samana päivänä, siis 25.10. ja toinen 19.12. Loppukoe pideään myöhemmin. Harjoituksista saatavat lisäpisteet otetaan huomioon sekä kummassakin välikokeessa että tässä loppukokeessa.

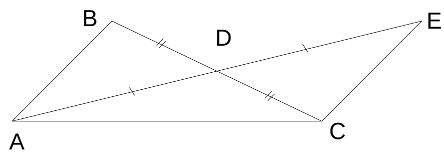
Hilbertin geometriaa.

Oletamme seuraavissa tehtävissä Hilbertin aksioomat (H1)-(H14).

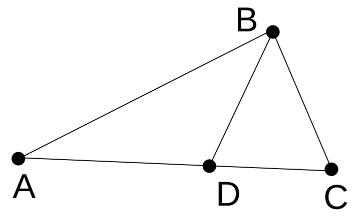
1. Todista lause 2.4.17: Olkoon ℓ suora sekä m ja n sen eri normaaleja. Tällöin $m \parallel n$.

2. Todista lause 2.4.18. Olkoon ℓ suora ja P piste, jonka kautta ℓ ei kulje. Silloin on olemassa ainakin yksi suora, joka on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa ja joka kulkee pisteen P kautta.

3. Saccherin ja Legendren lauseen 2.5.22 todistuksessa kolmiota $\triangle ABC$ muunnetaan kulmaa terävöittäen ja kulmien summan säilyttäen. Osoita, että se onnistuu seuraavalla tavalla (kuva alla): Olkoon D sivun BC keskipiste ja E puolisuoralla $\overrightarrow{AD}$ niin, että $AD \cong DE$. Näytä, että kolmiolla $\triangle AEC$ on sama kulmien mittalukujen summa kuin alkuperäisellä kolmiolla $\triangle ABC$ ja että joko $(\measuredangle EAC)^\circ$ tai $(\measuredangle AEC)^\circ$ on alle puolet luvusta $(\measuredangle BAC)^\circ$. Vihje: Osoita aluksi, että $\triangle BDA \cong \triangle CDE$ ja sitten, että $(\measuredangle EAC)^\circ + (\measuredangle AEC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ)$. (Janamitan ja kulmamitan perusominaisuudet ovat kääntöpuolella.)



4. Kolmion *defekti* Def($\triangle ABC$) on määritelmän mukaan 180−(kulmien astelukujen summa). Todista defektin additiivisuuslause 3.5.24, jonka mukaan kuvan tilanteessa Def($\triangle ABC$)=Def($\triangle ABD$)+Def($\triangle DBC$). (Vihje: Saccheri-Legendre.)



Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Janamamitan perusominaisuudet. Olkoon OI annettu jana. Tällöin on tasan 1 tapa liittää jokaiseen janaan $AB, \ldots$ reaaliluku $\overline{AB}$ siten, että

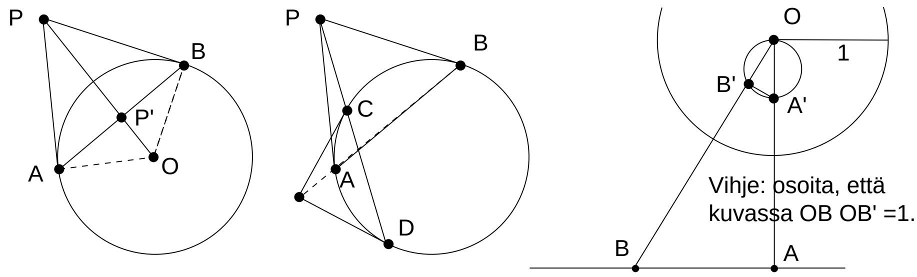
(1) $\overline{AB} > 0$.
(2) $\overline{OI} = 1$.
(3) $\overline{AB} = \overline{CD}$, joss $AB \cong CD$.
(4) $\overline{AB} < \overline{CD}$, joss $AB < CD$.
(5) $A * B * C$, joss $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
(6) Jokaista lukua $0 < x$ kohti on olemassa jana AB, jolla $\overline{AB} = x$.

Kulmamitan perusominaisuudet. On tasan 1 tapa liittää jokaiseen kulmaan $\measuredangle A, \measuredangle B, \ldots$ reaaliluku $(\measuredangle A)^\circ$ siten, että

(1) $0 < (\measuredangle A)^\circ < 180$
(2) $(\measuredangle A)^\circ = 90$, joss $\measuredangle A$ on suora kulma.
(3) $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle B)^\circ$, joss $\measuredangle A \cong \measuredangle B$.
(4) $(\measuredangle A)^\circ < (\measuredangle B)^\circ$, joss $\measuredangle A < \measuredangle B$.
(5) Jos $\overrightarrow{AC}$ on kulman $\measuredangle DAB$ sisällä, niin $(\measuredangle DAB)^\circ = (\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle CAB)^\circ$
(6) Jokaista lukua $0 < x < 180$ kohti on olemassa kulma $\measuredangle A$, jolla $(\measuredangle A)^\circ = x$.
(7) Jos $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ ovat täydennyskulmat, niin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = 180$.

Eukleideen geometrian jatkoa:.

5. Todista, että 1-säteisen ympyrän keskipisteestä etäisyydellä 2 olevan suoran kuva inversiossa on 1/4 - säteinen ympyrä — yhtä pistettä vaille, tosin. (kuva a)



Tehtävä 1 Tehtävä 6 Tehtävä 10 / kierros 3

6. Annettuna O-keskinen ympyrä α ja sitä pisteessä P sivuava ympyrä β. Osoita, että β:n kuva inversiossa on ympyrä.

7. $*$-tehtävä: Ratkaise millä keinolla tahansa: Olkoon γ ympyrä ja P sen ulkopuolinen piste, josta ympyrälle piirrettyjen tangenttien sivuamiskohdat olkoot A ja B. Olkoon edelleen s suora, joka kulkee pisteen P kautta ja leikkaa ympyrän kohdissa C ja D. Osoita, että pisteisiin C ja D piirretyt tangentit leikkaavat toisensa suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, jos ollenkaan. (kuva b) (Kilpailu: kenellä elegantein todistusidea.)

8. (jatkoa) Osaatko arvata, päteekö edellinen tulos, kun ympyrä korvataan ellipsillä tai muulla kartioleikkauksella?