GEOMETRIA 2006 **Harjoitus 4**
D380 keskiviikkoisin 8-10, 12-14 ja 16-18.

Hilbertin geometriaa.

1. Todista, että Paschin lause on yhtä vahva kuin Hilbertin aksiooma (H7), toisin sanoen että jos (H1)–(H6) ja Paschin lause pätevät, niin myös (H7) on voimassa.

2. Osoita, että jokaisen kolmion sisäpuolella on ainakin yksi piste. (Entä useampia? Onko jokainen tason piste jonkin kolmion sisäpuolella?)

3. Olkoon $C \in \overrightarrow{AB}$ ja $AB \cong AC$. Osoita, että $B = C$.

4. Todista lause 2.4.2:

"Olkoot $A * B * C$, $D * E * F$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $BC \cong EF$."

(Ideaehdotus: Kopioi jana BC janan DE jatkoksi ja näytä, että päädyt pisteeseen F. Olisiko edellisestä tehtävästäkin hyötyä?)

5. Merkintä $\ell \parallel m$ tarkoittaa, että suorilla ℓ ja m ei ole yhtään yhteistä pistettä.

Olkoot ℓ, m ja n eri suoria siten, että $\ell \parallel m$ ja $m \parallel n$. Olkoon lisäksi A l:n piste, B m:n piste ja C n:n piste siten, että $A * B * C$. Osoita, että $\ell \parallel n$. (Voisitko heikentää oletusta $A * B * C$ tai jopa jättää sen pois?)

6. Osoita tai kumoa, etta suorien yhdensuuntaisuus on transitiivinen relaatio.

"Eukleideen geometriaa".

7. Todista Eukleideen mielessä, että ympyrän peilikuva on ympyrä. Määrittele ensin tarvittavat käsitteet.

Koordinaattigeometriasta.

8. Tavallinen koordinaattigeometria on malli tähänastisille aksioomille. (Katso kääntöpuota) On aika iso työ todeta, että näin on. Laadi suunnitelma tuolle työlle.

9. (jatkoa) Katso kääntöpuolelta peruskäsitteiden määritelmät koordinaattigeometriassa ja todista sitten jonkin aksiooman (H5) – (H13) voimassaolo tavallisessa koordinaattigeometriassa.

Käännä

Koordinaattigeometriasta.

Tavallisessa koordinaattigeometriassa eli luvun 2.2 mallissa 5 täydennettynä luvun 2.3 esimerkillä 1 määriteltiin *tavallinen välissäolo*:

(Pisteet $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *suorat* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \lambda \in \mathbb{R}\}$, missä $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ kiinteitä. Piste P *kulkee suoran* l *kautta*, jos $P \in l$. Pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ asetetaan $A * B * C$, mikäli on olemassa $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ja $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ siten, että $\lambda < \mu < \nu$ tai $\lambda > \mu > \nu$ ja $\begin{cases} (a_1, a_2) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \\ (b_1, b_2) = (x_0, y_0) + \mu(\alpha, \beta), \\ (c_1, c_2) = (x_0, y_0) + \nu(\alpha, \beta). \end{cases}$

Janojen pituus määritellään tunnetulla tavalla ja janojen yhtenevyys sanomalla, että yhtä pitkät janat ovat yhtenevät. Kulma määritellään tunnetulla tavalla kosinilauseen ja sisätulon avulla ja kulmien yhtenevyys sanomalla, että yhtä suuret kulmat ovat yhtenevät.

Todistuksia varten on paras käyttää lineaarialgebran tietoja.

Olkoot $b \in \mathbb{R}^2$ ja $\phi \in [0, 2\pi[$. Määritellään bijektiot

$$T_b \text{ ja } R_\phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

siten, että $T_b x = x + b$ ja R_ϕ on lineaarikuvaus, jonka matriisi on

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

R_ϕ on siis kierto tasossa kulman ϕ verran. Osoita, että T_b ja R_ϕ säilyttävät välissäolon eli $A * B * C$ jos ja vain jos $f(A) * f(B) * f(C)$ kun $f = T_b$ tai $f = R_\phi$.

Olkoon l tason $\mathbb{R}^2$ mielivaltainen suora. Se voidaan kuvata x-akselille käyttäen edellisen tehtävän kuvauksia T_b ja R_ϕ.