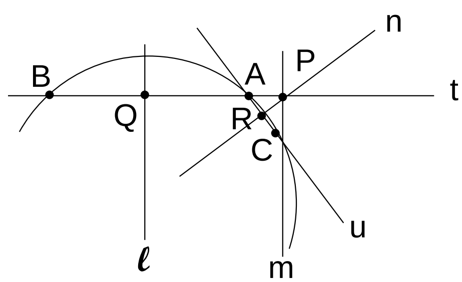
GEOMETRIA 2004 **Harjoitus 9**

D380 keskiviikko 8-10, 12-14 ja 16-18.

1. Etsi virhe seuraavasta paralleeliaksiooman todistusyrityksestä:

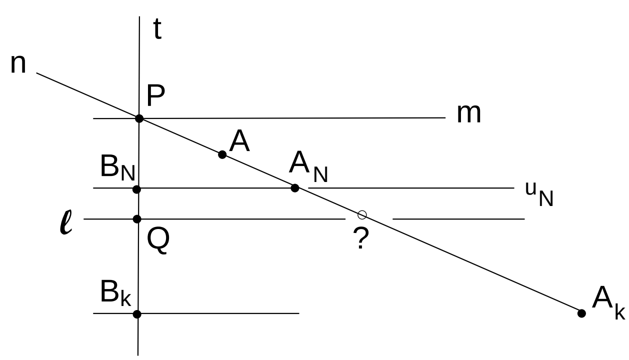
Olkoon ℓ suora ja P piste sen ulkopuolella. Olkoon t pisteen P kautta kulkeva ℓ:n normaali. Leikatkoon se ℓ:ää pisteessä Q. Olkoon m pisteen P kautta kulkeva t:n normaali. Tällöin $\ell \parallel m$. Olkoon $n \neq m$ jokin toinen P:n kautta kulkeva suora. Pitää osoittaa, että n ei ole ℓ:n suuntainen, vaan ne leikkaavat. Asia on selvä, jos $n = t$. Olkoon siis $n \neq t$. Valitaan A siten, että $P * A * Q$ ja valitaan B siten, että $A * Q * B$ ja $AQ \cong QB$.



Olkoon u pisteen A kautta kulkeva n:n normaali. Leikatkoon u suoraa n pisteessä R. Valitaan C siten, että $A * R * C$ ja $AR \cong RC$. Tällöin B, A ja C eivät ole samalla suoralla, joten niiden kautta kulkee yksikäsitteisesti määrätty ympyrä, jonka keskipiste on AB:n ja AC:n keskinormaalien leikkauspiste D. Mutta nytpä ℓ on AB:n ja n on AC:n keskinormaali, joten ℓ ja n leikkaavat pisteessä D. $\square$.

2. Etsi virhe seuraavasta paralleeliaksiooman todistusyrityksestä:

Olkoot ℓ, P, t, Q, m ja n kuten edellisessä tehtävässä. Valitaan suoralta n piste A siten, että AQm. Valitaan sitten kaikilla $N \in \mathbb{N}$ piste $A_N \in \overrightarrow{PA}$ siten, että $\overline{PA_N} = n$. Olkoon u_N pisteen A_N kautta kulkeva $\overleftrightarrow{PQ}$:n normaali, joka leikatkoon $\overleftrightarrow{PQ}$:ta pisteessä B_N. Kun $N \to \infty$, niin $\overline{PA_N} \to \infty$, joten myös $\overline{PB_N} \to \infty$. Tällöin riittävän suurella k on voimassa $\overline{PB_k} > \overline{PQ}$, jolloin $B_k \ell P$.



Koska $u_k \parallel \ell$, niin $A_N B_k \ell$. Siten $P \ell A$, joten PA_k leikkaa ℓ:ää. Koska $PA_k \subset n$, niin siis n leikkaa ℓ:ää. $\square$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

3. Lue monisteesta sivuilta 95 sinin ja kosinin määritelmä **euklidisessa** geometriassa ja hieman etennpäin. Ratkaise sitten seuraava tehtävä: Merkitään kolmiossa $\triangle ABC$ $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = \beta$ ja $\measuredangle C = \gamma$. Sekä $BC = a$, $AC = b$ ja $AB = c$. Olkoot lisäksi h_a, h_b ja h_c sivujen a, b ja c vastaiset korkeusjanat. Määritellään (!) kolmion $\triangle ABC$ *pinta-ala* asettamalla

$$\text{ala}(ABC) = \tfrac{1}{2}\overline{a}\overline{h_a}.$$

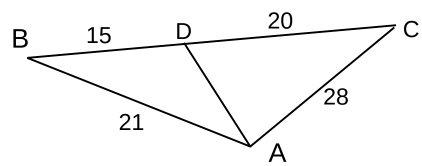
Osoita, että pinta-ala saadaan myös kaavasta

$$\text{ala}(ABC) = \tfrac{1}{2}\overline{a}\overline{b}\sin\gamma.$$

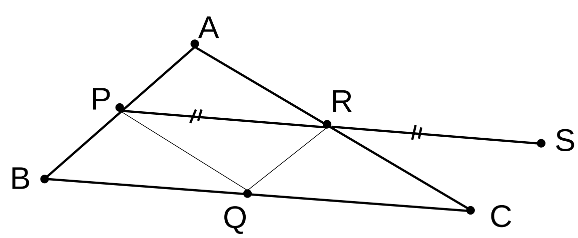
(Lisätehtävä halukkaille: Osoita edelleen, että alan määritelmä on riippumaton valituista sivuista , ts.

$$\tfrac{1}{2}\overline{a}\overline{h_a} = \tfrac{1}{2}\overline{b}\overline{h_b} = \tfrac{1}{2}\overline{c}\overline{h_c}.)$$

4. (tavallaan jatkoa) Kuinka pitkä on seuraavassa kuvassa jana AD?



5. Osoita defektin avulla, että **hyperbolisessa** geometriassa tapahtuu seuraavaa:



Jos $\triangle ABC$ on kolmio ja P, Q, R sivujen AB, BC ja CA keskipisteet, niin tällöin jokin yhtälöistä $\overline{PR} = \overline{BQ}$, $\overline{PQ} = \overline{AR}$, $\overline{QR} = \overline{BP}$ on VÄÄRIN.

6. Osoita, että hyperbolisessa geometriassa ei jokaisella kolmiolla ole ympäripiirrettyä ympyrää. Ohje: Käytä Poincarén mallia.

7. ylimääräisiä eli *-tehtäviä

a) Voiko itse asiassa yksikään päteä tehtävässä 5? Vihje: Valitse S kuten kuvassa.

b) Onko jokaisella hyperbolisella kolmiolla sisään piirrettyä ympyrää?