GEOMETRIA 2004 **Harjoitus 8**

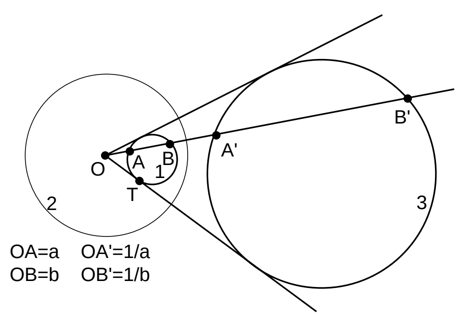
D380 keskiviikko 8-10, 12-14 ja 16-18.

Kurssin **tietokoneosuus** muodostuu oppilaan esitiedoista riippuen kahdesta tai kolmesta noin kahden tunnin jaksosta. Kun salissa MaD 353 on tilaa, voi tehdä mitä jaksoa tahansa. Parhaiten se käy, kun olen paikalla. Aion päivystää ainakin tiistaina klo 14.15 alkaen ja uudelleen/edelleen 16.15 alkaen. Keskiviikkona en ehdi. Myöhemmät ajat - joita kyllä tulee riittävästi - ilmoitan seuraavassa demolapussa ja luennolla.

1. Todista ainakin pääpiirteittäin, että paralleeliaksiooma seuraa Pythagoraan lauseesta eli että Pythagoraan lause ei päde hyperbolisessa geometriassa.

2. Todista, että minkä tahansa suoran - paitsi keskipisteen kautta kulkevan, kuva inversiossa on ympyrä. (Viime kerran tehtävän 7 idea toimii tässäkin. Mikä muuten on keskipsiteen kautta kulkevan suoran kuva?)

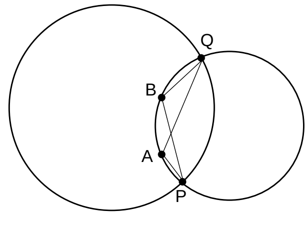
3. Todista, että kuvan tilanteessa ympyrän 1 kuva inversiossa 1-säteisen ympyrän 2 suhteen eli joukko 3 on ympyrä. Vihje: $a : \frac{1}{b} = b : \frac{1}{a}$ ja koulutiedot homotetiasta.



Seuraavissa tehtävissä voit olettaa tunnetuksi, että yleensäkin ympyrän kuva inversiossa on ympyrä.

4. Piirrä Poincaré-malliin suorakulmainen kolmio, jonka sivuista yksi / kaksi/ ei yhtään on tyyppiä 1 (eli origon kautta kulkevan suoran osa) ja suora kulma origossa / muualla.

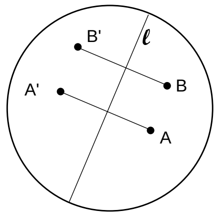
5. Piirrä (tai konstruoi) Poincaré-malliin kaksi yhtä pitkää janaa mahdollisimman "yleisessä tilanteessa". Saat käyttää kaikkia keinoja, jopa laskinta ja viivainta, jossa on asteikko. (Hyperbolisen etäisyyden määritelmä Poincarén mallissa eli ympyrän sisäpisteiden joukossa on $d(AB) = \left|\log\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}\right)\right|$.)



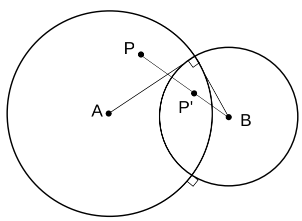
KÄÄNNÄ

6. Piirrä (tai konstruoi) Poincaré-malliin kaksi yhtä suurta kulmaa mahdollisimman "yleisessä tilanteessa". Saat käyttää laskinta ja viivainta, jossa on asteikko.

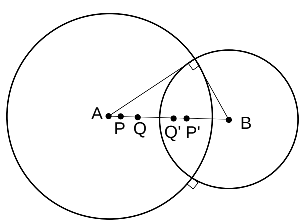
7. Todista, että heijastus origon kautta kulkevassa suorassa säilyttää Poincaré-pisteiden etäisyydet. (Tässä tehtävässä heijastus on tavllinen euklidinen. Poincarén mielessä heijastus tuon suoran suhteen olisi kyllä sama asia! Miksihän?)



8. Todista, että heijastus P-suorassa eli inversio mallin (keskipiste A, tällä kertaa helpointa valita mieliv. säde r) reunaa vasten kohtisuorassa ympyrässä (keskipiste B, tähän säde 1) kuvaa Poincaré- pisteet Poincaré-pisteiksi. Huomaat samalla, että A-ympyrän kuva on se itse.



9. (jatkoa) Todista, että heijastus Poincaré-suorassa $\ell = \mathcal{A} \cap \beta$ säilyttää origosta lähtevällä (kuvassa B-keskistä) inversioympyrää 2 vastaaan (euklidisesti) kohtisuoralla puolisuoralla olevien Poincaré-pisteiden etäisyydet: $d(PQ) = d(P'Q')$.



10. (Tähtitehtävä) Miten todistaisit, että heijastus missä tahansa P-suorassa säilyttää origosta lähtevällä puolisuoralla olevien Poincaré-pisteiden etäisyydet $d(PQ) = d(P'Q')$.?