GEOMETRIA 2004 **Harjoitus 6**

D380 keskiviikko 8-10, 12-14 ja 16-18.

Hilbertin geometriaa.

Oletamme seuraavissa tehtävissä Hilbertin aksioomat (H1)-(H14).

1. Todista jokin kohta lauseesta 2.3.10

2. Sanomme kolmion sisäpuolisten pisteiden joukkoa *avoimeksi kolmioksi.* Osoita, että seuraava *Hausdorffin ehto* toteutuu:

(HE) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa avoimet kolmiot $\triangle_P$ ja $\triangle_Q$ siten, että $P \in \triangle_P$, $Q \in \triangle_Q$ ja $\triangle_Q \cap \triangle_P = \emptyset$.

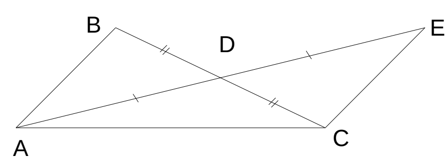
3. Olkoot AB ja CD janoja. Keksi tai katso, miten määritellään janojen summa ja janan monikerta. Perustele, että jos $AB \cong CD$, niin $n \cdot AB \cong n \cdot CD$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. (Entäpä kääntäen ?)

4. Tavallinen koordinaattigeometria on malli tähänastisille aksioomille. On aika iso työ todeta, että näin on. Laadi suunnitelma tuolle työlle.

5. (jatkoa) aiva monisteesta peruskäsitteiden määritelmät koordinaattigeometriassa ja todista sitten jonkin aksiooman (H5) – (H14) voimassaolo tavallisessa koordinaattigeometriassa.

6. Kuten edellinen, mutta eri tehtävä.

7. Saccheri-Legendren lauseen todistuksessa kolmiota $\triangle ABC$ muunnetaan kulmaa terävöittäen ja kulmien summan säilyttäen. Osoita, että se onnistuu seuraavalla tavalla (kuva alla): Olkoon D sivun BC keskipiste ja E puolisuoralla $\overrightarrow{AD}$ niin, että $AD \cong DE$. Näytä, että kolmiolla $\triangle AEC$ on sama kulmien mittalukujen summa kuin alkuperäisellä kolmiolla $\triangle ABC$ ja että joko $(\measuredangle EAC)^\circ$ tai $(\measuredangle AEC)^\circ$ on alle puolet luvusta $(\measuredangle BAC)^\circ$. Vihje: Osoita aluksi, että $\triangle BDA \cong \triangle CDE$ ja sitten, että $(\measuredangle EAC)^\circ + (\measuredangle AEC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ$).



8. Todista Eukleideen systeemissä, että ympyrän peilikuva on ympyrä. (Määrittele tarvittavat käsitteet.)

Käännä

Janamamitan perusominaisuudet. Olkoon OI annettu jana. Tällöin on tasan 1 tapa liittää jokaiseen janaan $AB, \ldots$ reaaliluku $\overline{AB}$ siten, että

(1) $\overline{AB} > 0$.
(2) $\overline{OI} = 1$.
(3) $\overline{AB} = \overline{CD}$, joss $AB \cong CD$.
(4) $\overline{AB} < \overline{CD}$, joss $AB < CD$.
(5) $A * B * C$, joss $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
(6) Jokaista lukua $0 < x$ kohti on olemassa jana AB, jolla $\overline{AB} = x$.

Kulmamitan perusominaisuudet. On tasan 1 tapa liittää jokaiseen kulmaan $\measuredangle A, \measuredangle B, \ldots$ reaaliluku $(\measuredangle A)^\circ$ siten, että

(1) $0 < (\measuredangle A)^\circ < 180$
(2) $(\measuredangle A)^\circ = 90$, joss $\measuredangle A$ on suora kulma.
(3) $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle B)^\circ$, joss $\measuredangle A \cong \measuredangle B$.
(4) $(\measuredangle A)^\circ < (\measuredangle B)^\circ$, joss $\measuredangle A < \measuredangle B$.
(5) Jos $\overrightarrow{AC}$ on kulman $\measuredangle DAB$ sisällä, niin $(\measuredangle DAB)^\circ = (\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle CAB)^\circ$
(6) Jokaista lukua $0 < x < 180$ kohti on olemassa kulma $\measuredangle A$, jolla $(\measuredangle A)^\circ = x$.
(7) Jos $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ ovat täydennyskulmat, niin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = 180$.