Hilbertin geometriaa.

Oletamme seuraavissa tehtävissä Hilbertin aksioomat (H1)-(H7) kulloinkin tarvittavine seurauksineen.

1. Olkoon $A * B * C$ ja $A * C * D$. Osoita, että $A * B * D$.

2. Osoita, että pisteitä on ääretön määrä. (Vihje: induktio, lause 2.3.5). Mahtaisiko todistaminen onnistua ilman aksioomaa (H7)?

3. Todista, että Paschin lause on yhtä vahva kuin Hilbertin aksiooma (H7) siinä mielessä, että jos (H1)–(H6) ja Paschin lause pätevät, niin myös (H7) on voimassa.

4. Osoita tai kumoa, etta suorien yhdensuuntaisuus on transitiivinen relaatio.

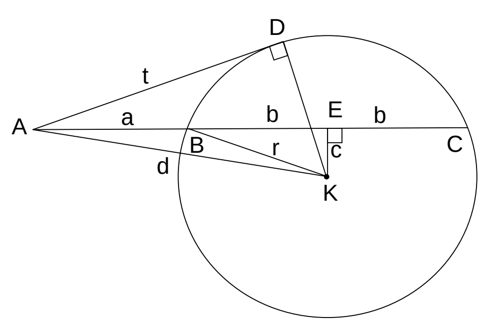
5. Olkoot l, m ja n eri suoria siten, että $l \parallel m$ ja $m \parallel n$. Olkoon lisäksi A l:n piste, B m:n piste ja C n:n piste siten, että $A * B * C$. Osoita, että $l \parallel n$. (Voisitko heikentää oletusta $A * B * C$ tai jopa jättää sen pois?)

6. Osoita, että suoria on äärettömän paljon.

7. Osoita, että jokaisen kolmion sisäpuolella on ainakin yksi piste. (Entä useampia? Onko jokainen tason piste jonkin kolmion sisäpuolella?)

Eukleideen geometrian harjoittelua.

8. Todista *sekantti- ja tangenttilause:* Kuvassa $\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AC}^2$.



Kuva 22: Sekantti ja tangentti.

Vihje Todistus perustuu Pythagoraan lausen käyttöön.

9. Todista: Jos kaksi (saman ympyrän) jännettä leikaavat toisensa, niin kummankin osista muodostetut suorakulmiot ovat yhtä suuret. (Helppo tapaus, jossa leikkauspiste on keskipiste, on käsiteltävä erikseen.)