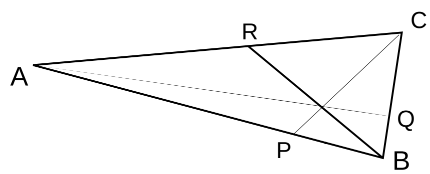
GEOMETRIA 2004 **Harjoitus 10**

D380 keskiviikko 8-10, 12-14 ja 16-18.

Tietokoneohjauksia pidetään viikolla 48 ainakin vielä tiistaina klo 14-18, keskiviikkona klo 14-18 ja todennäköisesti myös perjantaina klo 12-14. Myöhemmistä ilmoitan erikseen.

1. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $A * P * B$, $B * Q * C$, $C * R * A$. Pisteet P, Q, R ovat siis kolmion sivuilla, mutta eivät kärjissä. Oletetaaan, että janat AQ, BR ja CP leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Osoita, että

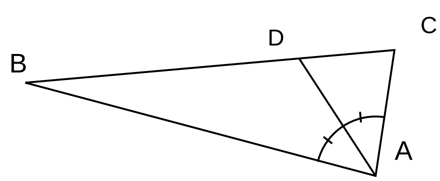
$$(*) \qquad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = 1$$



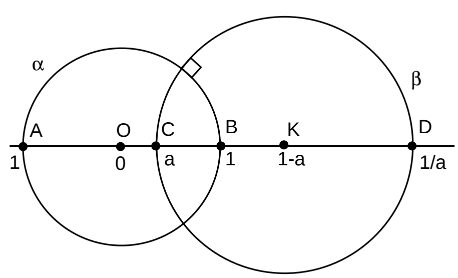
Ohje: vertaile sopivien kolmioiden pinta-aloja.

2. (jatkoa) Todista käänteinen tulos, siis että jos $(*)$ pätee, niin ko. janat kulkevat saman pisteen kautta.

3. Osoita, että kolmion kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, siis kuvan tilanteessa $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

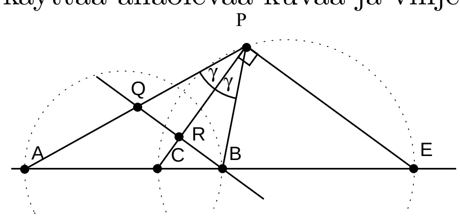


4. Tarkastellaan kuvan tilannetta, jossa ympyrät α ja β leikkaavat toisiaan suorakulmaisesti, jolloin Cja D ovat toistensa inversssit α:n suhteen ja A ja B ovat toistensa inverssit β:n suhteen. Osoita, että



Yl puolella pisteen nimi, alapuolella pisteen et isyys pisteest O kaksoissuhde $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = 1$, eli $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ eli pisteet C ja D jakavat janan AB samassa suhteessa – toinen sisäpulitse ja toinen ulkopuolitse. Huomaa, että samalla A ja B jakavat janan CD keskenään samassa suhteessa– toinen sisäpulitse ja toinen ulkopuolitse. Tässä tilanteessa sanotaan, että pisteet A, B, C, jaD muodostavat *harmonisen nelikön.* (Vihje: helppo!)

5. (jatkoa) Edellinen tehtävä antaa aiheen kysyä, onko D:n lisäksi olemassa muitakin pisteitä P , joille $\overline{CACB} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ – ei tietenkään suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, mutta muualla tasossa! Todista *Apollonioksen lause*, jonka mukaan , että niiden pisteiden P joukko, joille ehto toteutuu, on ympyrä, jonka halkaisija on CD. Voit laskea koordinaatein taimikä on nopeampaa, käyttää allaolevaa kuvaa ja vihjettä:



Vihje: Tarkastele pistettä P, jolla on ominaisuus $\overline{CACB} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$. Huomaa, että silloin γ-kulmat ovat todella samat (Miksi?). Valitse E siten, että **kulma** $\measuredangle CPE$ **on suora.** Piirrä B:n kautta EP:n suuntainen suora ja todista, että silloin $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$.)

6. Hyperbolinen geometria on mahdollista tulkita ”Riemannin geometriaksi pinnalla, jonka kaarevuus oin vakio -1”. Samoin on pallogeometria ”Riemannin geometriaa pinnalla, jonka kaarevuus on vakio +1”. Siksi geometrioissa on paljon yhteisiä tai täysin vastakkaisia piirteitä. Yksi niistä on, että pallolla (isoympyröiden kaarista muodostetun) kolmion kulmien summa on aina yli 180 astetta. Itse asiassa kulmasumman ylitys eli kolmion *eksessi* $\alpha+\beta+\gamma-180$ on suoraan verrannollinen kolmion pinta-alaan. Totea tämä kolmiolle, jossa on kaksi suoraa kulmaa. (Yleinen tulos mv. pallokolmiolle on todistettavissa, mutta ei ihan helppo!)

7. Kulman puolittajien avulla voi helposti konstruoida ympyrän, joka sivuaa kolmea annetua erisuuntaista suoraa, jotka eivät kulje saman pisteen kautta. Miten konstruoit ympyrän, joka sivuaa kahta suoraa ja annettua ympyrää? Mieti eri tapaukset.

8. (Toinen Apollonioksen ongelma) Miten konstruoit harpilla ja viivoittimella ympyrän, joka sivuaa kolmea annettua ympyrää. Vihje: Tarkastele (ensin) tilannetta, jossa ainakin kaksi annetuista ympyröistä leikkaavat toisiaan jossain pisteessä A ja invertoi jonkin A-keskisen ympyrän suhteen.