GEOMETRIA 2002 **Harjoitus 5**
D380 keskiviikkoisin 8-10, 12-14 ja 16-18.

2 ov. kurssin loppukoe ja 4 ov. kurssin välikoe pidetään keskiviikkona 13.11.

1. Todista insidenssiaksiooman **H1** riippumattomuus aksioomista **H2** ja **H3** rakentamalla malli, joissa jälkimmäiset pätevät, ensimmäinen ei.

2. Todista insidenssiaksiooman **H2** (ja samoin **H3**) riippumattomuus kahdesta muusta insidenssiaksioomasta rakentamalla malli, joissa ne pätevät, mutta **H2** (**H3**) ei.

3. Todista lause 2.4.1. (Ks. moniste).

4. Määrittele viiden pisteen joukkoon $\{A, B, C, D, E\}$ "välissäolo" niin, että aksioomat (H4)–(H6) toteutuvat. (Insidenssiä ei tässä tarvitse määritellä ollenkaan, vaan kaikki tapahtuu samalla "viiden pisteen suoralla".)

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan luvun 2.2 mallia 5 luvun 2.3 esimerkillä 1 täydennettynä eli tavallista koordinaattitasoa ja siinä tavallista välissäoloa, ts. *(Pisteet* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *suorat* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \lambda \in \mathbb{R}\}$, missä $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ kiinteitä. Piste P *kulkee suoran l kautta*, jos $P \in l$. Pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ asetetaan $A * B * C$, mikäli on olemassa $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ja $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\lambda < \mu < \nu \text{ tai } \lambda > \mu > \nu \text{ ja } \begin{cases} (a_1, a_2) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \\ (b_1, b_2) = (x_0, y_0) + \mu(\alpha, \beta), \\ (c_1, c_2) = (x_0, y_0) + \nu(\alpha, \beta). \end{cases}$$

5. Olkoot $b \in \mathbb{R}^2$ ja $\phi \in [0, 2\pi[$. Määritellään bijektiot

$$T_b \text{ ja } R_\phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

siten, että $T_b x = x + b$ ja R_ϕ on lineaarikuvaus, jonka matriisi on

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

R_ϕ on siis kierto tasossa kulman ϕ verran. Osoita, että T_b ja R_ϕ säilyttävät välissäolon eli $A * B * C$ jos ja vain jos $f(A) * f(B) * f(C)$ kun $f = T_b$ tai $f = R_\phi$.

6. Olkoon l tason $\mathbb{R}^2$ mielivaltainen suora. Osoita, että se voidaan kuvata x-akselille käyttäen edellisen tehtävän kuvauksia T_b ja R_ϕ.

7. Olkoot $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ ja $C = (c, 0)$ x-akselin pisteitä. Osoita, että edellisten tehtävien mallissa $A * B * C$, jos ja vain jos $a < b < c$ tai $a > b > c$.

8. Todista, että edellisten tehtävien malli toteuttaa Hilbertin aksioomat (H1)–(H6) käyttäen hyväksi aiempien tehtävien tuloksia.

9. Ympyrän sisään piirretyn säännöttömän kuusikulmion vastakkaiset sivut kohtaavat kolmessa pisteessä. Osoita, että nämä ovat samalla suoralla. (Edelleen hankala juttu! Päteekö sama ellipsille; entä paraabelille?)