GEOMETRIA 2002 Harjoitus 4
D380 keskiviikkoisin 8-10, 12-14 ja 16-18.

Tietokoneharjoituksia aloitellaan torstaina 3.10. klo 13-16. Ryhmässä on vielä muutama paikka vapaana. Lisää ryhmiä tulee myöhemmin. Seuraa ilmoitustaulua. Jos on ongelmia käydä, kysy minulta sähköpostitse.

2 ov. kurssin loppukoe ja 4ov kurssin välikoe pidetään keskiviikkona 13.11.

1. Todista Hilbertin insidenssiaksioomista H1, H2 ja H3 alkaen

LAUSE 2.2.1. *Olkoot l ja m eri suoria, jotka eivät ole yhdensuuntaisia. Silloin on olemassa täsmälleen yksi piste, jonka kautta sekä l että m kulkevat.*

2. Todista edelleen:

LAUSE 2.2.2. *Jokaisen suoran ulkopuolella on ainakin yksi piste.*

3. Todista edelleen:

LAUSE 2.2.3. *Jos P on mielivaltainen piste, niin on olemassa ainakin yksi suora, johon P ei sisälly.*

4. Todista edelleen:

LAUSE 2.2.4. *Jokaisen pisteen kautta kulkee ainakin kaksi eri suoraa.*

——

5. Tarkastellaan seuraavaa yksikköpallon pinnan

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

geometriaa. Sovimme, että *pisteet* ovat joukkoja $S \cap A$, missä A on 1-ulotteinen aliavaruus (eli origon kautta kulkeva suora), ja *suorat* ovat joukkoja $S \cap B$, missä B on 2-ulotteinen aliavaruus eli origon kautta kulkeva taso. Sanomme, että *suora l kulkee pisteen P kautta*, jos $P \subset l$. Osoita, että Hilbertin aksioomat (H1), (H2) ja (H3) toteutuvat tässä mallissa.

6. Osoita, että edellisen tehtävän mallissa ei ole lainkaan yhdensuuntaisia suoria.

——-

7. Olkoon $A * B * C$ ja $A * C * D$. Osoita, että $A * B * D$.

8. Osoita, että jos aksioomat (H1)–(H7) pätevät, niin pisteitä on ääretön määrä. (Vihje: induktio, lause 2.3.5). Mahtaisiko todistaminen onnistua ilman aksioomaa (H7)?

——-

9. Ympyrän sisään piirretyn säännöttömän kuusikulmion vastakkaiset sivut kohtaavat kolmessa pisteessä. Osoita, että nämä ovat samalla suoralla. (Edelleen hankala juttu! Päteekö sama ellipsille?)