

SISÄLLYS

0. Koulutietojen kertaus ja täydennys	2
0.1. Avaruuden, tason ja lukusuoran vektorit	2
0.2. Laskutoimituksia vektoreilla	3
0.3. Vektorimuuttujan vektoriarvoinen funktio	5
0.4. Tason ja suoran yhtälöitä	9
0.5. Lineaarikuvaukset	13
0.6. Matriisit	17
0.7. Tason kierto	21
0.8. Suunnikkaan ja suuntaissärmiön tilavuus	24
0.9. Kompleksiluvut tulkittuna tasoksi \mathbb{R}^2 ja suoraksi \mathbb{C}^1	25
0.10. Trigonometrian kaavoja	25
1. Lineaarinen yhtälöryhmä ja matriisi	27
1.1. Alustava yritelmä — kaksi yhtälöä ja kaksi tuntematonta	27
1.2. Yleinen lineaarinen yhtälöryhmä ja sen ratkaiseminen Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmällä	28
1.3. Homogeeninen yhtälöryhmä	32
1.4. Vektorit ja matriisit	33
1.5. Neliömatriisin käänteismatriisi	37
1.6. Transponoitu matriisi	40
2. Determinantti	42
2.1. Kaksiriviset determinantit	42
2.2. Kolmiriviset determinantit	43
2.3. Yleinen n -rivinen determinantti	47
2.4. Yleisen determinantin ominaisuuksia	50
2.5. Determinantin yhteys käänteismatriisiin	55
2.6. Cramerin sääntö	56
3. Vektoriavaruus ja sen dimensio eli ulotteisuus	57
3.1. Lineaarikombinaatiot ja lineaarinen riippumattomuus	57
3.2. Aliavaruus	60
3.3. Lineaarinen verho	63
3.4. Kanta, koordinaatit ja dimensio	65
3.5. Vektoriavaruus	68
3.6. Esimerkkejä vektoriavaruuksista ja laskemisesta niissä	70
3.7. Hamelin kanta ääretönulotteisessa vektoriavaruudessa V	73

4. Lineaarikuvaukset	76
4.1. Kuvaukseen liittyvien peruskäsitteiden kertaus ja täydennys	76
4.2. Lineaarikuvauksen perusominaisuuksia	77
4.3. Lineaarikuvaukset ja kannat	81
4.4. Dimensiolause ja Gaussin ja Jordanin menetelmä	84
4.5. Kannan vaihtamisen yleinen teoria	87
5. Ominaisarvoprobleema	91
5.1. Diagonalisoituvuus	91
5.2. Matriisin ominaisvektorien ja -arvojen laskemisesta	94
5.3. Lineaarikuvauksen diagonalisointi	97
5.4. Kartioleikkausten tunnistamisesta	97
6. Sisätuloavaruudet	102
6.1. Sisätulo	102
6.2. Normi, etäisyys ja kulma	103
6.3. Ortogonaalisuus	107
6.4. Ortonormaali kanta	108
6.5. Gramin–Schmidtin ortogonalisointimenetelmä	109
6.6. Isometriset lineaarikuvaukset eli ortogonaalikuvaukset	111
6.7. Symmetrisen lineaarikuvauksen diagonalisointi	114
6.8. Neliömuoto	116
6.9. Ääriarvotehtäviä sisätuloavaruudessa. Pienin neliösumma	118
7. Kompleksista lineaarialgebraa	123
7.1. Kompleksiset vektoriavaruudet	123
7.2. Kompleksiset lineaarikuvaukset ja matriisit	124
7.3. Kompleksiset ominaisarvot	124
7.4. Kompleksiset sisätuloavaruudet	124
7.5. Unitaariset ja hermiittiset operaattorit	125
7.6. Hermiittisen operaattorin unitaarinen diagonalisointi	127
Hakemisto	129